

## Course Syllabus

### Course Title

Path Integral: Stochastic Processes and Basics of Quantum Mechanics

### Course Title (in Russian)

Функциональный интеграл: Стохастические процессы и основы квантовой механики

### Lead Instructor

Andrew G. Semenov

## 1. Annotation

### Course Description

One of the most powerful methods of modern theoretical physics is the method of functional integration or path integration. The foundations of this approach were developed by N. Wiener at the beginning of the 20th century, but it spread widely after R. Feynman, who applied this approach in quantum mechanics. At present, the functional integral has found its application in the theory of random processes, polymer physics, quantum and statistical mechanics, and even in financial mathematics. Despite the fact that in some cases its applicability has not yet been mathematically rigorous proven, this method makes it possible to obtain exact and approximate solutions of various interesting problems with surprising elegance. The course is devoted to the basics of this approach and its applications to the theory of random processes and quantum mechanics. In the first part of the course, using the example of stochastic differential equations, the main ideas of this approach will be described, as well as various methods for exact and approximate calculation of functional integrals. Further, within the framework of the course, the main ideas of quantum mechanics will be considered, and both the operator approach and the approach using functional integration will be considered. It will be demonstrated that, from the point of view of formalism, the description of random processes and the description of quantum mechanical systems are very similar. This will make it possible to make a number of interesting observations, such as, for example, the analogy between supersymmetric quantum mechanics and the diffusion of a particle in an external potential. In the final part of the course, depending on the interests of the audience, various applications of the functional integration method will be discussed, such as polymer physics, financial mathematics, etc.

### Course Description (in Russian)

Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода и его приложениям к теории случайных процессов и квантовой механике. В первой части курса на примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее в рамках курса будут рассмотрены основные идеи квантовой механики, причем будет рассмотрен как операторный подход, так и подход с использованием функционального интегрирования. Будет продемонстрировано, что с точки зрения формализма описание случайных процессов и описание квантовомеханических систем весьма похоже. Это позволит сделать ряд интересных

наблюдений, таких как, например, аналогию между суперсимметричной квантовой механикой и диффузией частицы во внешнем потенциале. В заключительной части курса, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях метода функционального интегрирования, таких как физика полимеров, финансовая математика и др.

## 2. Basic Information

Course Academic Level

BSc

MSc

PhD

Number of ECTS credits

6

Type of Assessment

Graded

Mapping from grades to percentage:

A: 86

B: 76

C: 66

D: 56

E: 46

F: 0

Term

Term 1

Term 2

Students of Which Programs do You Recommend to Consider this Course as an Elective?

BSc Programs	Masters Programs	PhD Programs
	Mathematical and Theoretical Physics Photonics and Quantum Materials	Mathematics and Mechanics Physics

Maximum Number of Students

	Maximum Number of Students
Overall:	15
Per Group (for seminars and labs):	15

Course Stream

Science, Technology and Engineering (STE)

## 3. Course Content

Topic	Summary of Topic	Contact Hours: Lectures	Contact Hours: Seminars	Contact Hours: Labs	Non-contact Hours: Student's Independent Study
Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы. Производящий функционал. Марковский и Гауссов случайные процессы.		2	2	0	9
Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла. Вычисление простейших функциональных интегралов.		2	2	0	9
Вывод уравнения Фоккера — Планка. Некоторые свойства его решений.		2	2	0	9
Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда–Яглома.		2	2	0	9
Приближенное вычисление некоторых функциональных интегралов.		2	2	0	9

Topic	Summary of Topic	Contact Hours: Lectures	Contact Hours: Seminars	Contact Hours: Labs	Non-contact Hours: Student's Independent Study
Основные идеи квантовой механики. Интеграл по траекториям и амплитуда перехода.		2	2	0	9
Операторный подход в квантовой механике. Гильбертово пространство состояний и канонические коммутационные соотношения.		2	2	0	9
Эволюция состояний в квантовой теории и уравнение Шредингера. Собственные состояния Гамильтониана.		2	2	0	9
Наблюдаемые в квантовой теории. Процедура измерения и редукция состояний.		2	2	0	9

Topic	Summary of Topic	Contact Hours: Lectures	Contact Hours: Seminars	Contact Hours: Labs	Non-contact Hours: Student's Independent Study
Вывод представления для амплитуды перехода квантовомеханической частицы в виде функционального интеграла из операторного подхода.		2	2	0	9
Сходство и различие между уравнениями и Фоккера–Планка и Шредингера. Суперсимметричная квантовая механика.		2	2	0	9
Приближенные методы квантовой механики. Формула Ван–Флека и ее интерпретация в терминах классической механики.		2	2	0	9
Применение функционального интеграла в физике полимеров и финансовой математике. Дальнейшее развитие идей. (При наличии времени и желания)		2	2	0	2

## 4. Learning Outcomes

Skoltech Learning Outcomes are indicated as per [Skoltech Learning Outcomes Framework](#).

### 1. FUNDAMENTAL KNOWLEDGE

1.1. KNOWLEDGE OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

### 2.1. COGNITION AND MODES OF REASONING

2.1.1. Analytical reasoning and problem solving

2.1.3. Creative thinking

### 2.2. ATTITUDES AND LEARNING PROCESS

2.2.5. Self-awareness and a commitment to self-improvement, lifelong learning and educating

### 3.1. COMMUNICATIONS IN INTERNATIONAL ENVIRONMENTS

3.1.3. Oral presentation and discussion

3.1.4. Inquiry, listening and dialogue

### 4.1. MAKING SENSE OF GLOBAL SOCIETAL ENVIRONMENTAL AND BUSINESS CONTEXT

4.1.1. Appreciating the potential and limitations of science and technology, their role in society and society's role in their evolution

### 4.2. VISIONING – INVENTING NEW TECHNOLOGIES THROUGH RESEARCH

4.2.1. The research process – hypothesis, evidence and defense

4.2.2. Basic research leading to new scientific discovery

## 5. Assignments and Grading

**Physical Attendance Requirement**      50  
(% of classes)

### In-person Attendance Requirement Comment

Certainly, students can master the material and pass the exam on their own, but the course contains original ideas that are difficult to find in existing literature.

Assignment Type	Assignment Summary	% of Final Course Grade
Homework Assignments	There are some interesting problems to solve at home. Typically, it takes about a week to complete them.	30
Homework Assignments	There are some interesting problems to solve at home. Typically, it takes about a week to complete them.	30
Final Exam	Discussion about course and homeworks.	40

## 6. Assessment Criteria

### Assignment 1 Type

Homework Assignments

#### Sample of Assignment 1

The lecture proved the Gelfand-Yaglom theorem for the determinant of an operator acting on functions defined on the interval from 0 to 1 and vanishing at the ends. Generalize this statement to the case when the operator acts on periodic functions.

#### Assessment Criteria for Assignment 1

It is necessary to solve this problem completely.

### Assignment 2 Type

Final Exam

#### Sample of Assignment 2

Discussion about course and homeworks.

Deep understanding of all themes discussed within the course.

## 7. Textbooks and Internet Resources

You can request at most two required textbooks. Additionally, you can suggest up to nine recommended textbooks.

Required Textbooks	ISBN-13 (or ISBN-10)
Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001	9780367397142
Faddeev, L.D., IAkubovskii, O.A. Lectures on quantum mechanics for mathematics students. 2009	9780821846995

Web-resources (links)	Description
<a href="https://arxiv.org/">https://arxiv.org/</a>	A lot of papers.



## 8. Facilities

Labs for Education

NRU HSE-Skoltech International Laboratory of  
Representation Theory and Mathematical Physics

## 9. Additional Notes

**The proposed course 1) has explicit academic content and requirements for receiving credits, 2) is in alignment with the program's learning outcomes, 3) adheres to policies and Skoltech regulations.**

Lead Instructor confirms