Инстантоны и qq-характеры

Наблюдаемые в суперсимм. калибровочных теориях, которые намекают на наличие интересных нелокальных симметрий, интегрируемость и т.д.

Начнем с матричных моделей

$$Z_V = \int_{N\times N} dM\, e^{-\frac{1}{g_s}\operatorname{Tr} V(M)}$$

V – полином степени k

$$\langle \operatorname{Tr} M^{k_1} \dots \operatorname{Tr} M^{k_p} \rangle =$$

$$= \frac{1}{Z_V} \int dM \, e^{-\frac{1}{g_s} \operatorname{Tr} V(M)}$$

$\langle W(x) \rangle$

$\delta M \sim \frac{1}{x-M}$

$M \to M + \delta M$

$$W(x) = g_s \operatorname{Tr} \frac{1}{x-M} - V'(x)$$

$\mathcal{O}(x)$

$$\langle W^2(x) - g_s \partial_x W \rangle = V'(x)^2 + f(x)$$

полином, степени $\deg V - 2$

$$\langle [x^{-p}] \mathcal{O}(x) \rangle = 0 \quad \forall p > 0$$

$N \to \infty$, $g_s \to 0$ $\qquad \hbar = g_s N$ – конечна

алгебраическое соотношение на

$\langle \widetilde{W}(x) \rangle$

$$\widetilde{W} = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \frac{1}{x - M} - \frac{1}{\hbar} V'(x)$$

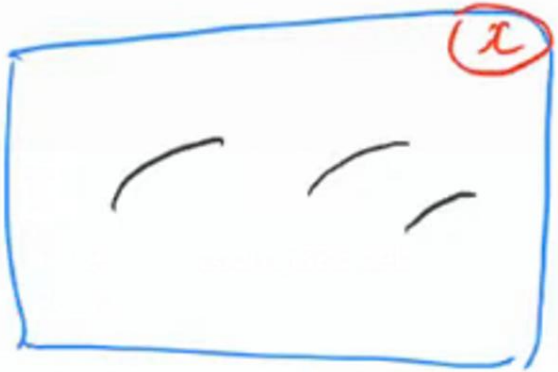
$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x - m_i} = \int \frac{\rho(m)\, dx}{x - m}$$

плотность собств. значений

1) в интегралах полезно двигать контур

2) полезно искать наблюдаемое $O(x)$

$\langle O(x) \rangle$ регулярна по x



есть голоморфный объект, живущий на накрытии x-плоскости разреза вместо $\int dM e^{-\operatorname{Tr} V(M)}$

$$\int_{\widetilde{\mathcal{M}}_k} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_e$$

$\widetilde{\mathcal{M}}_k$ — гладкое гиперкэлерово многообразие, $\dim = 4kN$

разрешение особенностей $\mathcal{M}_k$

$$\mathcal{M}_k = \{A \mid F_A^+ = 0\} / \mathcal{G}_\infty$$

$$\mathcal{G}_\infty = \left\{ g(x) \;\middle|\; g: \mathbb{R}^4 \to U(N),\ g \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 \right\}$$

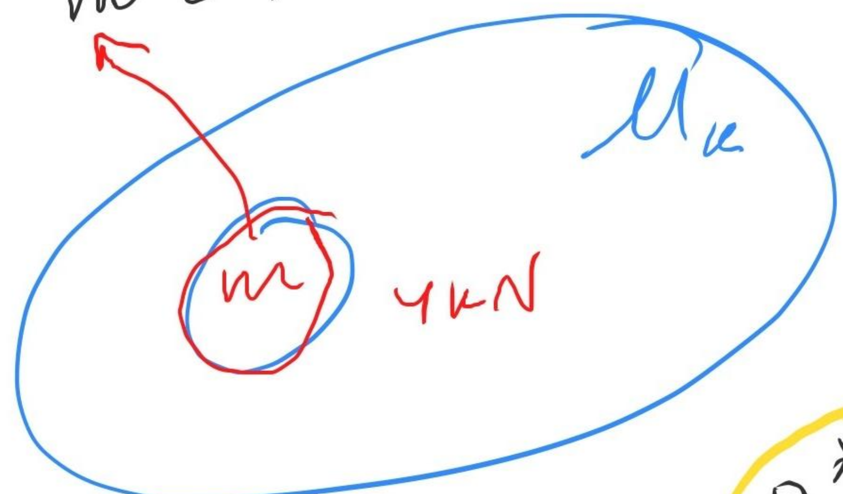
A — калибровочное поле $U(N)$ на $\mathbb{R}^4$

$$k = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} F \wedge F$$

$A(x;m) = A_\mu(x;m)\,dx^\mu$

$\mu = 1,\dots,4$

$m \in \mathcal{M}_k$



$F_A^+ = 0$

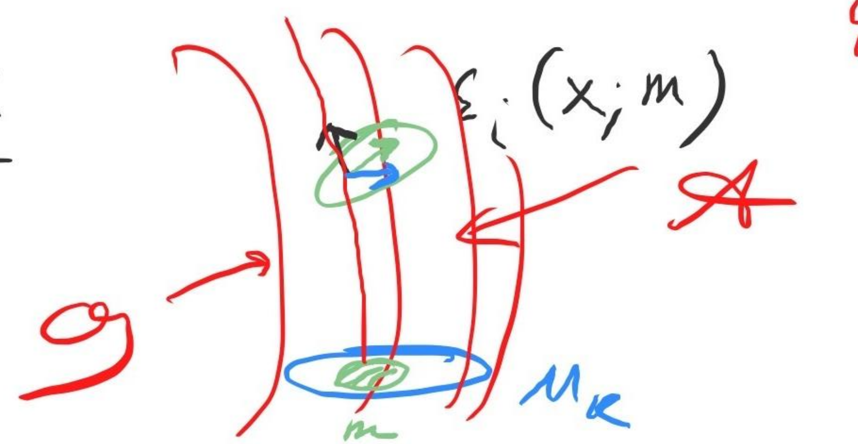
$D_A^+ \dfrac{\partial A}{\partial m_i} = 0$

$D_A^+ \Psi = 0 \quad , \quad D_A^* \Psi = 0$

$\perp$ gauge orbit

$\dfrac{\partial A_\mu}{\partial m_i} = \Psi_{i\mu} + D_\mu \epsilon_i$

$i = 1, \dots, 4kN$



$\Delta_A^{-1} D_A^* \dfrac{\partial A}{\partial m_i} = \vdots \quad \epsilon_i$

$$\Phi_{ij}^{a} = \partial_{m_i} \xi_j^{a} - \partial_{m_j} \xi_i^{a} + [\xi_i, \xi_j]^{a}$$

$\to$ 2 форма на M_k со значением в $g = \mathrm{Lie}\,G$

$$\omega_p = \mathrm{Tr}\, \Phi^{p} \quad - 2p\text{-форма на } M_k$$

$i, j = 1, \dots, \dim M_k$

$a = 1, \dots, \dim G$

$N=2$ super Yang Mills

$SL(2,\mathbb{C})$ $\qquad S \cong \mathbb{C}^2$ $\qquad \varepsilon \in \Lambda^2 S^*$

$g \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{S}$

$S \otimes \bar{S} \simeq V$

$ad-bc=1$

$\xi, \eta \in S$

$\varepsilon(g\xi, g\eta) = \varepsilon(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$

$g(\xi_1 \otimes \bar{\eta}_1, \xi_2 \otimes \bar{\eta}_2) := \varepsilon(\xi_1, \xi_2)\,\varepsilon(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$

— метрика Минковского

поле $N=2$ $d=4$

$A \in V \otimes \mathfrak{g}$ $\lambda \in S \otimes C \otimes \mathfrak{g}$ $\bar{\lambda} \in \bar{S} \otimes C \otimes \mathfrak{g}$ $\phi, \bar{\phi} \in \mathfrak{g}$

разные $\mathbb{R}$-структуры

$C \cong \mathbb{C}^2$

суперсимметрии порождаются

$\omega \in \Lambda^2 C^*$

$C = \mathbb{C}^2$

$\eta \in S \otimes C$

$\bar{\eta} \in \bar{S} \otimes C$

$SL(2,\mathbb{C}) = H$ $\nearrow$ R-symmetry

не путать ее с $SL(2,\mathbb{C}) = L$ Lorentz

$\sigma : V \otimes S \to \bar{S}$

$\bar{\sigma} : V \otimes \bar{S} \to S$

$$\delta A = \omega(\eta \otimes \bar{\lambda}) + \omega(\bar{\eta} \otimes \lambda)$$

$\in S \otimes \bar{S} \simeq V$

$\varepsilon \in \Lambda^2 S^*$

$$\delta \lambda = F_A^+ \eta + [\phi, \bar{\phi}]\eta + \sigma(D_A \phi \otimes \bar{\eta})$$

$F_A^+ \eta$: $\eta \in S \otimes C$; $D_A \phi \in V \otimes \mathfrak{g}$

$F \in \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$

$\Lambda^2 V^*$: инфинитез. поворот $\in$ Lie L

$\delta \bar{\lambda}$

$\delta \phi = \omega \cdot \varepsilon(\eta \otimes \lambda)$

$$\sigma : V \otimes S \to \bar{S}$$

$$\bar{\sigma} : V \otimes \bar{S} \to S$$

$$\sigma \cdot \bar{\sigma} : \Lambda^2 V \otimes \bar{S} \to \bar{S}$$

$$\bar{\sigma}\sigma : \Lambda^2 V \otimes S \to S$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] =: \Omega$$

$$\shortparallel$$

$$\cancel{F}$$

Математический супер Янг-Миллс

$C \simeq \bar{S}$

$L \hookrightarrow L \times H$

A

$(\lambda, \bar{\lambda}) \longrightarrow$

$\psi \in \Omega^1$

$\chi \in \Omega^{2,+} \otimes \mathfrak{g}$

$\lambda \in \Omega^0$

$\phi, \bar{\phi}$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta A &= \Psi \\ \delta \Psi &= D_A \phi \\ \delta \phi &= 0 \end{aligned}}$$

$\delta^{[+1]}$

$U(1)_{\text{духовое}}$

$\delta \chi^+ = H^+$ — вспомог. бозонное поле $\in \Omega^{2,+} \otimes \mathfrak{g}$

$\delta H^+ = [\phi, \chi^+]$

$HF - g^2 H^2 \to \frac{1}{g^2} F^{+2}$

число

$\delta \bar{\phi} = \lambda$

$\delta \lambda = [\phi, \bar{\phi}]$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi}\tau \, \mathrm{Tr}\, F \wedge F + \delta\Big(i \,\mathrm{Tr}\, \chi^+ (F_A^+ - \cancel{g^2} H^+) + \mathrm{Tr}\, \cancel{\lambda}[\phi, \bar{\phi}] + \mathrm{Tr}\, \Psi \wedge * D_A \bar{\phi} \Big)$$

$$\tau = \frac{\vartheta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$$

Extremum H^{+}

$$\int_{M^4} \mathcal{L} = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{Tr}\, F_A \wedge * F_A + \int D_A \Phi \wedge * D_A \bar{\Phi}$$

$$+ \frac{i\theta}{8\pi^2}\int \mathrm{Tr}\, F_A \wedge F_A$$

$$+ \int \mathrm{Tr}\, [\Phi, \bar{\Phi}]^2 + \int \mathrm{Tr}\, \chi^{+} D_A^{+} \psi + \mathrm{Tr}\, \lambda D_A^{*} \psi +$$

Yukawa's

$$\mathrm{Tr}\, \psi \wedge * [\psi, \bar{\Phi}]$$

$$\mathrm{Tr}\, \chi \wedge * [\chi, \Phi]$$

$$\mathrm{Tr}\, \lambda \wedge * [\lambda, \Phi]$$

Какие наблюдаемые хорошие?

$$\mathcal{O}_p(x) = \mathrm{Tr}\,\phi^p(x)$$

$$\delta \mathcal{O}_p = 0$$

$$d\mathcal{O}^{(1)}_p = \delta \mathcal{O}^{(2)}_p$$

$$\delta\left(\int_\Sigma \mathcal{O}^{(2)}_p\right) = 0$$

$$d\mathcal{O}_p = p\,\mathrm{Tr}\left(\phi^{p-1} D_A \phi\right) = \delta\Big(\underbrace{p\,\mathrm{Tr}\,\phi^{p-1}\psi}_{=\mathcal{O}^{(1)}_p}\Big)$$

$$\delta\left(\oint_\gamma \mathcal{O}^{(1)}_p\right) = 0$$

$$\mathcal{O}^{(2)}_p,\ \mathcal{O}^{(3)}_p,\ \mathcal{O}^{(4)}_p$$

$$\mathcal{L} + \sum_p t_p \mathcal{O}^{(4)}_p$$

$$\Big\langle \delta\text{-замкнутое наблюдаемое} \Big\rangle_{\mathcal{L}+\delta T} =$$

$$= \Big\langle \delta\text{-замкнутые набл} \Big\rangle_{\mathcal{L}}$$

(интегр по частям)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Tr} F \wedge F + \delta\left(i \operatorname{Tr} \chi^+ F_A^+ + \psi \wedge * D_A \bar{\Phi} \right)$$

$$= \frac{i}{4\pi} \operatorname{Tr} F \wedge F + i \operatorname{Tr} H^+ F_A^+ - \chi^+ D_A^+ \psi + \operatorname{Tr} D_A \Phi \wedge * D \bar{\Phi} -$$

$$- \operatorname{Tr} \psi \wedge * [\psi, \bar{\Phi}] - \cancel{\operatorname{Tr} \psi \wedge * D_A \lambda}$$

$$+ \operatorname{Tr} \lambda \, D_A^* \psi$$

$U(1)$

$$\psi = \sum_{i=1}^{4kN} \alpha^{(i)} \psi_i$$

SO_3

$$\int_M \psi^{(i)} \wedge * \psi^{(j)} = \delta^{ij}$$

$$\begin{cases} F_A^+ = 0 \\ \boxed{D_A^* D_A \Phi = [\psi \wedge * \psi]} \end{cases}$$

$$\underset{\delta/\delta\chi^+}{D_A^+ \psi = 0}, \quad \underset{\delta/\delta\lambda}{D_A^* \psi = 0}$$

если добавить духи,
то появится ε_i

$$\phi = \left(\partial_i \varepsilon_j - \partial_j \varepsilon_i + [\varepsilon_i, \varepsilon_j]\right) dm^i \wedge dm^j$$

$$\Phi = \psi_i \psi_j \, \frac{1}{\Delta_A} [\alpha_i^{(i)}, \chi^{(j)}]$$