

Листок 2. Модель Годена и кристаллы.

Задача 1. (а) Пусть $e(z), h(z), f(z)$ – образующие алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на уровне k . Докажите, что при $k \neq -2$ коэффициенты ряда $S(z) =: e(z)f(z) + f(z)e(z) + \frac{1}{2}h(z)^2$ порождают алгебру Вирасоро, и найдите уровень этой алгебры Вирасоро в зависимости от k .

(б) Докажите, что коэффициенты ряда $S(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} S_r z^{-r}$ при $k = -2$ центральны (т.е. коммутируют с $e(z), h(z), f(z)$).

(в) Выпишите $S_r v_0$ в вакуумном модуле на уровне -2 как элемент $U(t^{-1}\mathfrak{sl}_2[t^{-1}])$.

(г) Для $u \in \mathbb{C}$ определим $ev_u : t^{-1}\mathfrak{sl}_2[t^{-1}] \rightarrow \mathfrak{sl}_2$ – гомоморфизм вычисления, $t \rightarrow u$. Покажите, что образ $S(z)v_0$ при гомоморфизме вычисления $ev_{z_1} \otimes \dots \otimes ev_{z_n} : U(t^{-1}\mathfrak{sl}_2[t^{-1}]) \rightarrow U(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes n}$ является гамильтонианом модели Годена $H(z)$.

Задача 2. (а) Для всех точек $\overline{M_{0,4}}$, соответствующих вырожденным кривым, опишите соответствующие подалгебры Годена в $U(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes 3}$.

(б) Вычислите спектр этих подалгебр в тензорном произведении представлений $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3}$.

(в) Опишите биекции между этими спектрами, получающиеся из параллельных переносов вдоль отрезков в $\overline{M_{0,4}}(\mathbb{R})$.

(г) Сравните это с действием "крашеной" кактусной группы PJ_3 на старших элементах кристалла $B_{\lambda_1} \otimes B_{\lambda_2} \otimes B_{\lambda_3}$.

Задача 3. (а) Нарисуйте кристаллы \mathfrak{sl}_3 со старшими весами $2\omega_1 + 2\omega_2$ и $\omega_1 + 3\omega_2$.

(б) Объясните, как выглядит \mathfrak{sl}_3 -кристалл с произвольным старшим весом.

Задача 4. (а) Выпишите явно все возможные коммутаторы в тензорном произведении кристаллов $B_{\omega_1} \otimes B_{\omega_1} \otimes B_{\omega_1}$ для \mathfrak{sl}_3 .

(б) Опишите орбиты кактусной группы J_3 на множестве элементов веса 0 в этом тензорном произведении.

(в) Тот же вопрос для "крашеной" кактусной группы PJ_3 .