Листок 1. Центр универсальной обертывающей алгебры и интегрируемые системы.

Задача 1. **(а)** Докажите, что элементы $C_k = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \ldots E_{i_k i_1} \in U(\mathfrak{gl}_n)$ лежат в центре $U(\mathfrak{gl}_n)$.

(б)* Докажите, что элементы $C_1, \ldots, C_n$ алгебраически независимы.

(в)* Докажите, что эти элементы порождают центр.

Задача 2.

(а) Докажите, что на модуле Верма M_λ центральные элементы $U(\mathfrak{gl}_2)$ действуют скалярами, и найдите этот скаляр для квадратичного центрального элемента (элемента Казимира).

(б) Докажите, что в весовом пополнении $\widehat{M_\lambda}$ модуля Верма M_λ (т.е. пространстве бесконечных формальных сумм весовых векторов) при общем значении λ имеется единственный с точностью до пропорциональности *вектор Уиттекера* $w \in \widehat{M_\lambda}$, такой, что $E_{12} w = w$.

(в) Покажите, что функция на торе $\Phi_\lambda(t) := \langle w, tw \rangle$ является собственной функцией гамильтониана Тоды. Здесь элемент тора $diag(t_1, t_2)$ действует на любом весовом векторе веса (μ_1, μ_2) с собственным значением $t_1^{\mu_1} t_2^{\mu_2}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – форма Шаповалова, т.е. такая форма на M_λ, что $\langle v_\lambda, v_\lambda \rangle = 1$ и $\langle v, E_{ij} v' \rangle = \langle E_{ji} v, v' \rangle$.

(г) Выпишите эту функцию явно в виде степенного ряда для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_2$.

(д)* Те же задачи для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$.

Задача 3. **(а)** Пусть V_{λ_i} – неприводимые конечномерные $\mathfrak{sl}_2$-модули, и $V_\Lambda = V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}$. Для $x \in \mathfrak{sl}_2$ определим $x(z) : V_\Lambda \to V_\Lambda$ следующим образом: $x(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x^{(i)}}{z - z_i}$. Покажите, что операторы $H(z) := e(z) f(z) + f(z) e(z) + \frac{1}{2} h^2(z)$ попарно коммутируют при всех $z \in \mathbb{C}$.

(б) Аналогично можно рассмотреть операторы $H(z) = \sum E_{ij}(z) E_{ji}(z)$ в тензорном произведении конечномерных неприводимых $\mathfrak{gl}_n$-модулей. Покажите, что эти операторы тоже коммутируют при всех $z \in \mathbb{C}$.

Задача 4. **(а)** Пусть $v_\Lambda \in V_\Lambda = V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}$ – произведение старших векторов. Покажите, что вектор $f(w_1) \ldots f(w_k) v_\Lambda$ является собственным относительно гамильтонианов $H(z)$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{w_j - z_i} + \sum\limits_{s \neq j} \frac{-2}{w_j - w_s} = 0$.

(б) Найдите соответствующее собственное значение.

(в) Покажите, что соответствующий вектор является старшим относительно диагонального $\mathfrak{sl}_2$.

Задача 5. Найдите все собственные значения гамильтониана Годена для **(а)** $n = 2$, $\lambda_i = 1$; **(б)** $n = 3$, $\lambda_i = 1$.