

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ОТДЕЛ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

ГОРОДКОВ ДЕНИС АЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 515.16

Комбинаторное вычисление первого класса Понтрягина
и приложения

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
А. А. Гайфуллин

Москва 2020

Оглавление

Оглавление	2
Введение	4
1 Алгоритм разложения цикла бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер	20
1.1 Комплекс \mathcal{T}^n и граф Γ_2	20
1.1.1 Комплекс \mathcal{T}^n	20
1.1.2 Бизвездные преобразования	22
1.1.3 Граф Γ_2	23
1.2 Алгоритм разложения цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных	25
1.2.1 Значения класса когомологий c на элементарных циклах	35
1.3 Основные шаги алгоритма	36
2 Минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости	39
2.1 Многообразия Илса-Кёйпера	39
2.2 Комплексы Брема-Кюнеля	42
2.3 Особенности реализации	45
2.3.1 Описание программы	49
3 Явный представитель формулы для первого класса Понтрягина в терминах перераспределения кривизны двумерных комбинаторных сфер	51
3.1 Формулировка результата	52
3.1.1 Цикл ξ	53

3.1.2	Обобщённый коэффициент зацепления	55
3.1.3	Формула	57
3.2	Доказательство теоремы 3.1.5	58
3.2.1	Порождаемость $C_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ циклами первого типа	58
3.2.2	Четырёхмерная сфера L_{β_1, β_2}	65
3.2.3	Набор двумерных цепей \mathcal{N}	66
3.2.4	Трёхмерная сфера $L_{p, q}$	72

Введение

Задача о комбинаторном вычислении характеристических классов многообразий является классической задачей алгебраической топологии. Общая постановка задачи такова: пусть даны кусочно линейно инвариантный характеристический класс φ , то есть класс когомологий $\varphi \in H^*(BPL; G)$ классифицирующего пространства BPL и кусочно линейное многообразие с зафиксированной комбинаторной триангуляцией M . Требуется предъявить способ подсчета $\varphi(M)$, использующий только данные триангуляции как абстрактного симплициального комплекса. Желаемым ответом обычно считается симплициальный цикл (на исходной триангуляции или ее подразбиении), представляющего класс гомологий, двойственный φ .

В случае классов Штифеля-Уитни касательного расслоения триангулированного гладкого многообразия (в дальнейшем под характеристическими классами гладкого многообразия подразумеваются именно характеристические классы касательного расслоения) задача комбинаторного вычисления, поставленная Е. Штифелем [46], была решена Х.Уитни в 1940 году [48]. Независимо и более аккуратно задачу решили С. Гальперин и Д. Толедо в 1972 году [35]. Ее ответ очень легко сформулировать: для n -мерного гладкого многообразия M и его гладкой триангуляции K цикл, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре $w_i(TM) \in H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, i -му классу Штифеля-Уитни, можно выбрать как сумму по модулю 2 всех $(n - i)$ -мерных симплексов барицентрического подразделения K' . Р. Гольдстейн и Е. Тёрнер [32] предъявили способ комбинаторно вычислять представляющие классы Штифеля-Уитни циклы как циклы на исходной триангуляции, а не на M' , а также, пользуясь кусочно линейной инвариантностью классов Штифеля-Уитни, обобщили формулу для классов Штифеля-Уитни произвольного эйлера многообразия. При этом формулировка ответа остается прежней. В

дальнейшем в рамках текущей работы мы будем рассматривать исключительно характеристические классы касательного расслоения.

Другим классическим семейством характеристических классов векторных расслоений являются классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M; \mathbb{Z})$. Хронологически первым было определение классов Понтрягина касательного расслоения в терминах циклов особенностей наборов векторных полей с ограничениями сверху на ранги подсистем. Также классы Понтрягина можно определить через клеточное разбиение многообразия Грассмана как порождающие классы когомологий в многообразии Грассмана ориентированных подпространств. Дифференциально геометрический подход к определению классов Понтрягина позволяет записать вещественные классы Понтрягина в терминах когомологий де Рама как интегралы некоторых сверток тензора кривизны гладкого риманова многообразия M . В общем случае классы Понтрягина являются целочисленными характеристическими классами векторных расслоений. Все эти определения были введены Понтрягиным в работах [12–16].

Рациональные классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M; \mathbb{Q})$, в отличие от целочисленных, являются комбинаторными инвариантами, как показали В. А. Рохлин и А. С. Шварц [17] и, независимо, Р. Том [47], а также определены для всех кусочно линейных многообразий. Доказательство основано на формуле Хирцебруха о сигнатуре и результатах Тома о реализации циклов, а также определенности L-классов Хирцебруха для кусочно линейных многообразий. В случае топологической категории верна классическая теорема С. П. Новикова [11], утверждающая, что рациональные классы Понтрягина являются топологическими инвариантами. Задача о нахождении комбинаторной формулы для рациональных классов Понтрягина была одной из центральных задач алгебраической топологии в начале 1970х годов. Попытки решения этой задачи привели, в частности, к созданию теории Черна-Саймонса [26]. В знаменитой работе 1975 года А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд и М. В. Лосик строят формулу для первого класса Понтрягина триангулированного гладкого многообразия. На каждом симплексе максимальной размерности триангуляции гладкого многообразия выбирается плоская связность, в результате чего на симплексах меньших размерностей возникает несколько связностей, по одной с каждой связности на объемлющих симплексах максимальной размерности.

Габриэлов, Гельфанд и Лосик построили формулу для p_1 в терминах этих индуцированных связностей. Необходимо отметить, что при таком подходе помимо триангуляции многообразия M для подсчета первого класса Понтрягина $p_1(M)$ необходимо фиксировать сглаживание M . Эту процедуру весьма сложно проделать явно. Более того, по этой причине формула Габриэлова-Гельфанда-Лосика применима только для комбинаторных многообразий, являющихся триангуляциями гладких многообразий. В работах [4, 42] посредством усреднения по всем сглаживаниям были получены симплициальные циклы, зависящие только от комбинаторного строения триангуляции, однако процесс усреднения в общем случае не описывается явно в комбинаторных терминах. На настоящий момент единственное комбинаторное многообразие, для которого удалось полностью провести подсчет первого класса Понтрягина посредством формулы Габриэлова-Гельфанда-Лосика, – это минимальная триангуляция комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ с 9 вершинами [43].

Основным объектом в работах Габриэлова-Гельфанда-Лосика являются пространства конфигураций комбинаторных сфер. Сложность вычислений связана, в первую очередь, со сложностью устройства этого пространства. Переход от пространств конфигураций к ориентированным матроидам позволили И. М. Гельфанду и Р. Макферсону [31] написать формулу для старших классов Понтрягина, однако все еще применимую лишь в случае триангуляции гладкого многообразия и требующую неконтролируемого количества барицентрических подразбиений исходной триангуляции.

Принципиально другой подход к задаче о комбинаторном вычислении классов Понтрягина принадлежит Джеффу Чигеру [25]. Основная идея состоит во введении кусочно евклидовой метрики на комбинаторном многообразии и рассмотрении операторов Лапласа на линках симплексов многообразия. Тогда классы Понтрягина можно выразить через спектры этих операторов Лапласа. Однако при таком подходе конкретные вычисления также очень сложны (более того, не всегда возможны), а спектры операторов Лапласа явно не выражаются в комбинаторных терминах, поэтому подход Дж. Чигера нельзя рассматривать как комбинаторную формулу, хотя он и предоставляет крайне интересную связь между аналитическими и топологическими инвариантами многообразий.

Наконец, в 2004 году А.А. Гайфуллин в работе [5] предложил алгоритм подсчета первого рационального класса Понтрягина для произвольного комбинаторного многообразия, использующий только комбинаторные данные и применимый на практике. В работе [5] описывается множество всех локальных формул для $p_1(M)$. (Универсальной) локальной формулой для характеристического класса $F \in H^k(M; \mathbb{Q})$ называется запись цикла

$$f_{\sharp}(M) = \sum_{\sigma^{n-k} \in K} f(\text{link } \sigma)\sigma,$$

где $f_{\sharp} \in C_{n-k}(M; \mathbb{Q})$ является циклом для всякого комбинаторного многообразия M , представляющим класс гомологий, двойственный к F , а f – функция на множестве $(k-1)$ -мерных ориентированных комбинаторных сфер. Локальность формулы состоит в том, что коэффициент в искомом цикле f_{\sharp} зависит только от комбинаторики линка симплекса σ . При этом функция f также не зависит и от многообразия M , и поэтому формула называется универсальной. Существование локальных формул обеспечивается результатом Н. Левитта и К. Рурка 1978 года [40]. Построив подходящую модель классифицирующего пространства $B\widetilde{PL}_m$, Левитт и Рурк доказывают, что для любого однородного полинома от классов Понтрягина существуют локальные формулы. Множество всех локальных формул описывается в [5] в терминах бизвездных преобразований, локальных преобразований комбинаторных многообразий, заменяющих полный подкомплекс полной размерности $\sigma * \partial\tau$ на комплекс $\partial\sigma * \tau$. Если две трехмерных комбинаторных сферы L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β , то значение функции f , задающей локальную формулу для первого рационального класса Понтрягина, должно изменяться следующим образом: $f(L_2) - f(L_1) = \sum h(\beta_v)$. Здесь суммирование ведется по всем общим вершинам L_1 и L_2 , в линках которых индуцируются бизвездные преобразования двумерных комбинаторных сфер, β_v – индуцированные бизвездные преобразования в $\text{link } v$, а h – функция на бизвездных преобразованиях двумерных комбинаторных сфер. На h накладывается следующее ограничение: в естественном графе Γ_2 , вершины которого соответствуют двумерным ориентированным комбинаторным сферам, а ребра – бизвездным преобразованиям между ними, функция h является коциклом, представляющим некоторый фиксированный, явно описываемый

класс когомологий c . Для подсчета значений класса c на произвольном цикле в графе Γ_2 необходимо указать набор порождающих и алгоритм разложения в пространстве циклов $Z_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$. Это было проделано в работе [8], однако в алгоритме разложения были пропущены несколько случаев, и в первой главе текущей работы мы устраняем неточность в предыдущем доказательстве. Полный обзор по существующим подходам к задаче о комбинаторном вычислении классов Понтрягина был написан А. А. Гайфуллиным [6].

Важной задачей, возникающей после нахождения всех возможных локальных формул, является указание конкретной локальной явно вычисляемой формулы. Это эквивалентно нахождению естественного представителя $h \in C^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ класса когомологий c . Решение этой задачи — один из основных результатов этой диссертации.

Вторая глава текущей работы посвящена явному вычислению первого класса Понтрягина некоторого 8-мерного комбинаторного многообразия с 15 вершинами, являющегося кандидатом в минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$. Кроме того, в ней реализован алгоритм Гайфуллина компьютерной программой, которая эффективно работает для всех существующих примеров комбинаторных многообразий, описанных явно.

Минимальной триангуляцией кусочно линейного многообразия X называется такое комбинаторное многообразие, что среди всех триангуляций X у него наименьшее количество вершин.

Задача о нахождении минимальных триангуляций возникла как естественная задача в комбинаторной топологии. Тривиальным замечанием является то, что минимальная триангуляция n -мерной сферы — граница $n + 1$ -мерного симплекса, соответственно, в ней $n + 2$ вершины. Для произвольного многообразия найти минимальную триангуляцию представляется безнадежной задачей, однако имеется несколько случаев, где задача полностью решена. Часто для нахождения требуется использования компьютера, что объясняет столь поздние результаты в этой области даже в простых случаях. В случае двумерных поверхностей Дж. Хивуд еще в 1890 году [36] нашел оценку на количество вершин, используя эйлерову характеристику, а Юнгерман и Рингель в 1980 году [37] построили явно примеры, доказывающие точность

оценки. Достигнутая оценка (за исключением сферы с двумя ручками, бутылки Клейна и неориентируемой поверхности рода 3 – там оценка получена явно) следующая: если n – количество вершин, то $C_{n-3}^2 \geq 3(2 - \chi(M))$ – необходимое и достаточное условие для того, чтобы поверхность M была триангулируема в n вершин. В частности, минимальной триангуляция будет, если неравенство вырождается в равенство. Из общих оценок отдельно хочется отметить работу [20] Ульриха Брема и Вольфганга Кюнеля 1987 года, в которой авторы находят некоторые ограничения на количество вершин v в зависимости от размерности многообразия n . Они получили, что если многообразие M не является сферой, то $v \geq 3\lfloor n/2 \rfloor + 3$, причем равенство может достигаться только в случае $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ или $n = 16$. Более того, при таких n при достижении равенства многообразие M является многообразием Илса-Кёйпера, то есть допускает кусочно линейную функцию Морса с ровно тремя критическими точками. Естественными примерами таких многообразий являются проективные плоскости над \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} и \mathbb{O} . В частности, в размерности 2 равенству удовлетворяет только минимальная триангуляция $\mathbb{R}P_6^2$ вещественной проективной плоскости в 6 вершин, а в размерности 4 – только минимальная триангуляция $\mathbb{C}P_9^2$ комплексной проективной плоскости.

В размерности 8 три различных примера комбинаторных многообразий (кусочно линейно гомеоморфных друг другу) с 15 вершинами, не кусочно линейно гомеоморфного сфере, были построены в 1992 году У. Бремом и В. Кюнелем. Эти многообразия являются многообразиями Илса-Кёйпера. Брем и Кюнель выдвинули гипотезу, что эти комбинаторные многообразия являются триангуляциями кватернионной проективной плоскости. В размерностях 8 и 16 многообразия Илса-Кёйпера классифицируются своими числами Понтрягина, поэтому для доказательства этой гипотезы достаточно посчитать числа Понтрягина трех комбинаторных многообразий, построенных Бремом и Кюнелем, и сравнить их с числами Понтрягина кватернионной проективной плоскости. Доказательству этой гипотезы посвящена первая часть текущей диссертации. В размерности 16 на момент написания не известно примеров комбинаторных многообразий с 27 вершинами, не являющихся триангуляцией сферы.

Таким образом, получается отдельное семейство многообразий с естествен-

но появляющейся минимальной триангуляцией — проективные плоскости. Для проективной плоскости над октавами никаких явных результатов на данный момент нет. Единственная бесконечная (по размерности) серия многообразий, для которых известны минимальные триангуляции, кроме сфер, — скрученные произведения сфер. Этот результат был получен Кюнелем в 1986 году [39]. Скрученным (устоявшегося перевода нет, англ. *twisted*) произведением сфер называется следующее многообразие M^n : $M^n = S^{d-1} \times S^1$ при четных n , и $M^n = S^{d-1} \rtimes S^1$ при нечетных n . Количество вершин — $2d + 3$. Перечислим все многообразия, для которых на данный момент известны минимальные триангуляции: сферы любой размерности, двумерные поверхности, скрученные произведения сфер, $S^2 \times S^1$, $\mathbb{R}P^3$, линзовое пространство $L(3, 1)$, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $(S^2 \times S^2) \sharp (S^2 \times S^2)$, $\mathbb{R}P^4$, $S^3 \times S^2$, $S^3 \times S^3$, $\mathbb{H}P^2$ [41]. Для большинства других многообразий в маленьких размерностях известны кандидаты в минимальные триангуляции, однако минимальность не удаётся доказать. Для многообразий произвольной размерности в большинстве случаев неизвестны примеры триангуляций как таковых. Из примеров, представляющий наибольший интерес, отметим кандидата в минимальные триангуляции трехмерной гомологической сферы Пуанкаре (см. [19]).

Цель диссертации

Целью диссертации является доказательство гипотезы Брема-Кюнеля о кусочно линейной гомеоморфности некоторого специального 8-мерного комбинаторного многообразия кватернионной проективной плоскости, явная реализация формулы Гайфуллина для первого рационального класса Понтрягина комбинаторного многообразия, а также построение формулы для первого рационального класса Понтрягина в терминах перераспределения комбинаторной кривизны при бизвездных преобразованиях двумерных комбинаторных сфер.

Методы исследования

В работе используются методы алгебраической топологии и комбинаторной топологии.

Научная новизна

Основные новые научные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Исправлен алгоритм разложения цикла в графе Γ_2 на элементарные циклы, приведенного в [8]. Реализация алгоритма Гайфуллина посредством компьютерной программы.
2. Доказана гипотеза Брема-Кюнеля о гомеоморфности комбинаторного многообразия M_{15}^8 кватернионной проективной плоскости.
3. Предъявлен канонический выбор локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина (среди множества всех локальных комбинаторных формул, явно описанного в [5]).

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по алгебраической топологии.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

1. **06/16** *Международная молодежная школа-конференция “Шестая летняя школа по геометрии и математической физике”, Красновидово, Россия; “Minimal triangulations of projective planes”*

2. **08/16** *Международная конференция “XIX Geometrical Seminar”, Златибор, Сербия; “A 15-vertex triangulation of the quaternionic projective plane”*
3. **09/16** *Международная конференция “Геометрические дни в Новосибирске – 2016”, Новосибирск, Россия; “Три минимальных триангуляции кватернионной проективной плоскости”*
4. **09/16** *Международная конференция “Вероятность, анализ и геометрия”, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; ”Минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости”*
5. **10/16** *Семинар “Узлы и теория представлений”, МГУ им. М. В. Ломоносова; “Комбинаторные характеристические классы и минимальные триангуляции”*
6. **10/18** *Семинар “Stanford Topology Seminar”, Stanford, CA, USA; “Combinatorial characteristic classes and the minimal triangulation of the quaternionic projective plane”*
7. **08/19** *Международная конференция “Топология, геометрия и динамика: Рохлин – 100”, Математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия; “Триангуляции кватернионной проективной плоскости и классы Понтрягина”*
8. **10/19** *Семинар отдела геометрии и топологии МИАН “Геометрия, топология и математическая физика”, Москва, Россия; “Перераспределение кривизны при бизвездных преобразованиях и комбинаторная формула для первого класса Понтрягина”*
9. **12/19** *Семинар “Характеристические классы и теория пересечений”, Москва, Россия; “Redistribution of curvature under bistellar flips and a combinatorial formula for the first Pontryagin class”*

Публикации

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в 3 работах [9, 10, 33], ссылки на которые даны в библиографии в конце диссертации.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и 3 глав. Текст диссертации изложен на 88 страницах и содержит 27 рисунков. Список литературы включает 48 наименований.

Основные определения, обозначения и соглашения

Звездой симплекса σ симплициального комплекса K называется подкомплекс $\text{star}_K \sigma \subset K$, состоящий из всех симплексов, содержащих σ , а также их подсимплексов. *Линком* симплекса $\sigma \in K$ называется подкомплекс $\text{link}_K \sigma$, состоящий из всех симплексов в $\text{star}_K \sigma$, не пересекающихся с σ . Из определения следует, что

$$\text{star}_K \sigma = \sigma * \text{link}_K \sigma. \quad (1)$$

Симплициальный комплекс, кусочно линейно гомеоморфный границе стандартного симплекса $\partial\Delta^{n+1}$, называется n -мерной *комбинаторной сферой*. *Комбинаторным многообразием* размерности n называется симплициальный комплекс, такой что линк каждой его вершины кусочно линейно гомеоморфен границе n -мерного симплекса $\partial\Delta^n$, то есть является комбинаторной сферой.

Если K — ориентированное комбинаторное многообразие и σ — его ориентируемый симплекс, то формула (1) позволяет индуцировать ориентацию на $\text{link}_K \sigma$. Мы будем обозначать через $[v_1, \dots, v_n]$ симплекс на множестве вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$, с ориентацией, заданной указанным порядком вершин.

Бизвездным преобразованием $\beta_{M,\sigma}$ комбинаторного многообразия M называется преобразование β , заменяющее полный подкомплекс полной размерности $\sigma * \partial\tau$ в M на комплекс $\tau * \partial\sigma$, где σ и τ — симплексы. Там, где это не вызывает двусмысленностей, мы будем обозначать бизвездное преобразование β_σ , опуская само многообразие M . (Используются соглашения $\partial \text{pt} = \emptyset$, $\sigma * \emptyset = \sigma$.)

Вершины M , присутствующие в M и в образе M под действием бизвездного преобразования β , линки которых изменяются под действием β , будем называть *участвующими* в β , и множество всех таких вершин будем обозначать $U(\beta)$.

Если σ или τ — вершина, то множество вершин в L_1 и L_2 не совпадает.

Пусть вершина $v \in U(\beta)$ участвует в преобразовании β , причем v присутствует как в L_1 , так и в L_2 . Тогда β индуцирует бизвездное преобразование β_v из $\text{link}_{L_1} v$ в $\text{link}_{L_2} v$.

Изоморфизмом комбинаторных многообразий M_1 и M_2 мы будем называть линейный на симплексах гомеоморфизм, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между симплексами многообразий M_1 и M_2 . Мы будем пользоваться стандартным обозначением $M_1 \cong M_2$. Заметим, что это определение не совпадает с кусочно линейным гомеоморфизмом комбинаторных многообразий. Если на комбинаторном многообразии M зафиксирована ориентация, то через \bar{M} будем обозначать многообразие M с обращенной ориентацией.

Будем обозначать через $C_*(K; \mathbb{Q})$ клеточный цепной комплекс CW-комплекса K с рациональными коэффициентами, а через $Z_*(K, \mathbb{Q})$ пространство циклов, то есть ядро дифференциала. Для комбинаторного многообразия M имеется два естественных клеточных разбиения — исходная триангуляция M и двойственное клеточное разбиение M^* . Соответствующие цепные комплексы $C_*(M; \mathbb{Q})$ и $C_*(M^*; \mathbb{Q})$ приводят к одним и тем же пространствам гомологий. Для упрощения обозначений дифференциалы всех встречающихся цепных комплексов мы будем обозначать через ∂ .

Под изоморфизмом клеточных комплексов мы всегда будем понимать симплициальный изоморфизм, индуцирующийся с изоморфизма их барицентрических подразбиений.

Основные результаты

Рассмотрим граф Γ_2 , вершинами которого являются классы изоморфизма двумерных ориентированных комбинаторных сфер, а ребрами — существенные бизвездные преобразования между этими сферами. Направление бизвездного преобразования задает ориентацию соответствующего ребра в графе. Назовем *элементарными циклами первого типа* циклы в графе Γ_2 , состоящие из последовательных ребер, соответствующих преобразованиям β_{L, σ_1} , β_{L_1, σ_2} , $\beta_{L_2, \sigma_1}^{-1}$ и β_{L, σ_2}^{-1} , где L , L_1 , L_2 , σ_1 и σ_2 таковы, что $L_1 = \beta_{L, \sigma_1}(L)$, $L_2 = \beta_{L, \sigma_2}(L)$ и все указанные бизвездные преобразования корректно определены (см. формулу 1.2 и рис. 1.2 в главе 1). *Элементарными циклами второго*

типа называется специальное семейство из трех различных видов циклов, изображенное на рис. 1.3.

Предложение 0.0.1 (А. А. Гайфуллин, [5]). *Всякий цикл в графе Γ_2 раскладывается в сумму элементарных циклов первого и второго типов.*

В работе [5] А. А. Гайфуллин построил локальную формулу для первого рационального класса Понтрягина в терминах некоторого специального класса когомологий $c \in H^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ на графе Γ_2 , значения которого на элементарных циклах заданы явно. Для непосредственного подсчета значений c на произвольном цикле нужно конструктивное доказательство предложения 0.0.1. Оно было приведено в статье [8], однако в алгоритме разложения в сумму элементарных циклов были пропущены некоторые случаи, в работе же [5] приведено неконструктивное доказательство предложения 0.0.1.

Первым основным результатом текущей работы является полное конструктивное доказательство предложения 0.0.1.

Второй основной результат заключается в доказательстве гипотезы о кусочно линейной гомеоморфности некоторого 8-мерного комбинаторного многообразия кватернионной проективной плоскости. До настоящей работы не было известно ни одной триангуляции кватернионной проективной плоскости.

Для вещественной и комплексной проективной плоскостей хорошо известны примеры минимальных триангуляций с 6 и 9 вершинами соответственно. В силу следующего результата было естественно предполагать наличие триангуляции кватернионной проективной плоскости с 15 вершинами.

Теорема (У. Брем, В. Кюнель, [20], 1987). *Пусть M^n – комбинаторное многообразие с t вершинами. Тогда если $t < \lceil 3n/2 \rceil + 3$, то M^n кусочно линейно гомеоморфно сфере, а если $t = \lceil 3n/2 \rceil + 3$, то M^n может быть не кусочно линейно гомеоморфно сфере, только если $n = 2, 4, 8$ и, возможно, 16. В этом случае M^n является многообразием Илса–Койпера, то есть допускает функцию Морса с тремя критическими точками в смысле статьи [27].*

В случае $n = 2$ единственное соответствующее комбинаторное многообразие – минимальная триангуляция $\mathbb{R}P^2$, а при $n = 4$ – только минимальная

триангуляция $\mathbb{C}P^2$. В случае размерности $n = 8$ У. Брем и В. Кюнель [20] построили комбинаторное многообразие M_{15}^8 и выдвинули следующую гипотезу, которую мы доказываем в настоящей работе:

Гипотеза. *Многообразие M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$.*

Классификация многообразий, допускающих функцию Морса с тремя критическими точками [27], показывает, что для доказательства гипотезы достаточно посчитать числа Понтрягина многообразия Брема–Кюнеля M_{15}^8 и сравнить их с числами Понтрягина $\mathbb{H}P^2$.

Для подсчета чисел Понтрягина M_{15}^8 мы впервые применили явный алгоритм подсчета первого класса Понтрягина, построенный А. А. Гайфуллиным в 2004 году [5]. В процессе подсчета использовались компьютерные вычисления, а также была написана общая программа, позволяющая вычислить первый класс Понтрягина комбинаторного многообразия. Подсчет показал, что гипотеза Брема–Кюнеля верна, и комбинаторное многообразие M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно кватернионной проективной плоскости.

Последний основной результат текущей диссертации — предъявление канонического выбора локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина (среди множества всех локальных комбинаторных формул, явно описанного в [5]).

Комбинаторной кривизной в вершине v двумерной симплициальной сферы L назовем число $W_L(v) = 1 - \frac{d_v}{6}$, где d_v — степень вершины v . Сумма кривизн во всех вершинах равна эйлеровой характеристике сферы, то есть 2.

По бизвездному преобразованию $\beta: L_1 \rightsquigarrow L_2$ ориентированных двумерных симплициальных сфер построим ориентированную трехмерную симплициальную сферу $L_\beta = \text{cone } L_1 \cup \text{cone } L_2 \cup (\sigma * \tau)$, где конусы склеиваются по общему подкомплексу $L_1 \setminus \text{Int}(\sigma * \partial\tau) = L_2 \setminus \text{Int}(\partial\sigma * \tau)$. Вершину конуса $\text{cone } L_i$ обозначим через a_i .

Далее, преобразованию β сопоставим набор \mathcal{H} симплициальных цепей $\eta \in C_1(L_\beta; \mathbb{Q})$ с весами, обозначаемыми через $W(\eta)$, по следующим правилам.

- (1) Для каждой вершины w , присутствующей в обеих сферах L_1 и L_2 , вклю-

чим в набор \mathcal{H} цепь $\eta = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом

$$W(\eta) = \begin{cases} W_{L_1}(w) = W_{L_2}(w), & \text{если } w \notin \sigma * \tau, \\ W_{L_2}(w) (\neq W_{L_1}(w)), & \text{если } w \in \sigma, \\ W_{L_1}(w) (\neq W_{L_2}(w)), & \text{если } w \in \tau. \end{cases}$$

(2) Для каждой пары вершин $w_1 \in \sigma, w_2 \in \tau$ включим в набор \mathcal{H} цепь $\eta = [a_1, w_1] + [w_1, w_2] + [w_2, a_2]$ с весом $W(\eta) = -1/12$, если σ и τ – ребра, и $W(\eta) = 1/6$, если σ или τ – вершина.

Предложение. Цепь $\xi(\beta) \in C_1(L_\beta; \mathbb{Q}) \otimes C_1(L_\beta; \mathbb{Q})$, определяемая по формуле

$$\xi(\beta) = \sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}} W(\eta_1)W(\eta_2)\eta_1 \otimes \eta_2 - 2 \sum_{\eta \in \mathcal{H}} W(\eta)\eta \otimes \eta,$$

является циклом по отношению к дифференциалу $\partial \otimes 1 - 1 \otimes \partial$.

Пусть M – ориентированная трехмерная симплициальная сфера и $Z_1(M; \mathbb{Q}) \subset C_1(M; \mathbb{Q})$ – ядро граничного оператора. Для циклов $\varphi, \psi \in Z_1(M; \mathbb{Q})$ с непересекающимися носителями определен их коэффициент зацепления $\text{lk}(\varphi, \psi) \in \mathbb{Q}$. Для произвольных $\varphi, \psi \in Z_1(M; \mathbb{Q})$ определим их *обобщенный коэффициент зацепления* по формуле $\widetilde{\text{lk}}(\varphi, \psi) = \text{lk}(\varphi, \text{Shift}(\psi))$, где $\text{Shift}: C_1(M; \mathbb{Q}) \rightarrow C_1(M^*; \mathbb{Q})$ – оператор сдвига цепи в двойственное разбиение M^* . Оператор Shift будет определен явно и переводит каждое ребро в цепь с носителем в объединении клеток, двойственных вершинам этого ребра. Отображение $\widetilde{\text{lk}}$ продолжается линейно на $Z_1(M; \mathbb{Q}) \otimes Z_1(M; \mathbb{Q})$.

Согласно теореме У. Пахнера [45] любая трехмерная симплициальная сфера может быть получена из границы симплекса $\partial\Delta^4$ при помощи последовательности бизвездных преобразований.

Теорема. Зададим функцию f на множестве ориентированных трехмерных симплициальных сфер индуктивно по формулам

$$f(\partial\Delta^4) = 0 \quad \text{и} \quad f(L_2) - f(L_1) = \sum \widetilde{\text{lk}}(\xi(\beta_v)),$$

если L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β . Здесь суммирование ведется по всем вершинам $v \in \sigma * \tau$, присутствующим в обеих сферах L_1 и

L_2 , и β_v обозначает бизвездное преобразование двумерных сфер, индуцированное преобразованием β в линке вершины v . Тогда f корректно определена и соответствующий цикл $f_{\#}(M^n)$, определенный по формуле

$$f_{\#}(M^n) = \sum_{\sigma \in M^n, \dim \sigma = n-4} f(\text{link } \sigma) \sigma,$$

представляет класс $p_1(M^n)$.

Таким образом, вычисление первого рационального класса Понтрягина n -мерного комбинаторного многообразия M сводится к следующим шагам.

1. Для каждого $(n - 4)$ -мерного симплекса σ находим последовательность бизвездных преобразований $\partial \Delta^4 = L_0 \xrightarrow{\beta_1} L_1 \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_k} L_k = \text{link } \sigma$.
2. Для каждого $\beta_i: \sigma_i * \partial \tau_i \mapsto \partial \sigma_i * \tau_i$ возьмем все вершины $v \in \sigma_i * \tau_i$, в линках которых индуцируются бизвездные преобразования $\beta_{i,v}$, и для каждого из них посчитаем значение $\tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_{i,v}))$.
3. Цикл, представляющий класс гомологий, двойственный $p_1(M)$, имеет вид

$$f_{\#}(M) = \sum_{\sigma \in M, \text{codim } \sigma = 4} \sum_{i=1}^k \sum_v \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_{i,v})) \sigma.$$

Содержание работы

Здесь мы кратко опишем структуру работы. Диссертация разбита на главы, главы — на разделы. Теоремы, предложения, примеры, замечания и т.д. нумеруются в пределах раздела.

Глава 1. Алгоритм разложения цикла бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер

В разделе 1.1 мы определяем основные для данной диссертации структуры графа Γ_2 и комплекса \mathcal{T}^n , определяем бизвездные преобразования и формулируем основные результаты, приводящие к комбинаторной формуле для первого класса Понтрягина, построенной в [5].

В разделе 1.2 мы приводим доказательство первого основного результата данной диссертации: построение конструктивного способа разложения цикла

бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер в сумму элементарных.

В последнем разделе 1.3 мы явно излагаем шаги алгоритма подсчета класса p_1 , необходимые нам для результатов в следующей главе.

Глава 2. Минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости

В разделах 2.1 и 2.2 мы излагаем необходимые результаты, приводящие к гипотезе Брема–Кюнеля. В разделе 2.3 мы разбираем изменения в алгоритме, связанные с использованием компьютера в подсчете первого класса Понтрягина комбинаторного многообразия M_{15}^8 и предъявляем доказательство гипотезы Брема–Кюнеля.

Глава 3. Явный представитель формулы для первого класса Понтрягина в терминах перераспределения кривизны двумерных комбинаторных сфер

Последняя глава разбита на разделы 3.1 и 3.2. В разделе 3.1 сформулирован основной результат главы и определяется обобщенный коэффициент зацепления двух 1-циклов в 3-мерной сфере. В разделе 3.2 представлено доказательство основного результата главы, которое разбито на доказательство порождаемости циклов в графе Γ_2 исключительно элементарными циклами первого типа, построением четырехмерной сферы L_{β_1, β_2} по элементарному циклу первого типа γ , и явным подсчетом значения коцикла h на цикле γ как обобщенного коэффициента зацепления специальных одномерных циклов в линках вершин этой четырехмерной комбинаторной сферы.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Александровичу Гайфуллину за постановку задач, решаемых в текущей диссертации, за неоценимый вклад в научное развитие автора и за участие и советы на всех этапах научной деятельности автора.

Глава 1

Алгоритм разложения цикла бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер

В этой главе изложена формула Гайфуллина подсчета первого рационального класса Понтрягина комбинаторного многообразия [5]. Важной составной частью этой формулы является алгоритм разложения цикла в графе Γ_2 бизвездных преобразований двумерных сфер на элементарные. Основным результатом этой главы являются исправление приведенного в [8] алгоритма разложения 1.2.1.

1.1 Комплекс \mathcal{T}^n и граф Γ_2

1.1.1 Комплекс \mathcal{T}^n

Обозначим \mathcal{T}_n абелеву группу всех ориентированных комбинаторных сфер размерности $(n - 1)$ с соотношениями $\langle L_1 \rangle = \langle L_2 \rangle$ при $L_1 \cong L_2$, а также $\langle \bar{L} \rangle = -\langle L \rangle$.

Пусть $f \in \text{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q})$, K^m – ориентированное комбинаторное многообразие. Введем обозначение

$$f_{\sharp}(K) = \sum_{\sigma \in K, \dim \sigma = m-n} f(\langle \text{link } \sigma \rangle) \sigma. \quad (1.1)$$

Определение 1.1.1. Функция $f \in \text{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q}) = \mathcal{T}^n$ называется локальной формулой для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$, если для любого K

цепь $f_{\#}(K)$ является циклом, представитель которого в гомологиях двойственен по Пуанкаре классу $F(p_1(K), p_2(K), \dots)$.

Относительно операций формальной суммы и джойна множество

$$\mathcal{T}_* = \bigoplus_n \mathcal{T}_n$$

превращается в суперкоммутативную ассоциативную градуированную алгебру. На ней можно ввести дифференциал

$$\partial \langle L \rangle = \sum_{v \in V(L)} \langle \text{link } v \rangle .$$

Определим дифференциал $\delta: \mathcal{T}^n \longrightarrow \mathcal{T}^{n+1}$ следующим образом:

$$(\delta f)(L) = (-1)^{n+1} \sum_{v \in V(L)} f(\langle \text{link } v \rangle)$$

Тогда

$$\mathcal{T}^* = \bigoplus_n \text{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q})$$

является суперкоммутативной ассоциативной дифференциальной градуированной коалгеброй с повышающим градуировку дифференциалом δ .

Теорема 1.1.2 (А.А. Гайфуллин, [5]). *Следующие три условия на функцию $f \in \mathcal{T}^n$ эквивалентны:*

1. *цепь $f_{\#}(K)$ является циклом для любого ориентированного комбинаторного многообразия K такого, что $\dim K \geq n$;*
2. *f является локальной формулой для некоторого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина;*
3. *f — коцикл комплекса \mathcal{T}^* , т.е. $\delta f = 0$.*

Когомологичные коциклы комплекса \mathcal{T}^ являются локальными формулами для одного и того же однородного полинома от рациональных классов Понтрягина. Более того, для любого такого полинома существует локальная формула.*

Таким образом, чтобы найти локальную формулу для p_1 (с точностью до пропорциональности) достаточно найти такие функции $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, что $\delta f = 0$.

1.1.2 Бизвездные преобразования

Пусть M – комбинаторное многообразие. Напомним определение бизвездного преобразования:

Определение 1.1.3. Пусть τ – симплекс такой, что $\tau \notin M$, но все его собственные подмножества лежат в M (такой симплекс будем иногда называть *пустым*). Пусть также $\sigma \in M$ такой, что $\sigma * \partial\tau$ – подкомплекс в K полной размерности. Тогда *бизвездным преобразованием* (также *движением Пахнера*) $\beta: M \rightsquigarrow \widetilde{M}$ называется преобразование, заменяющее подкомплекс $\sigma * \partial\tau$ на $\tau * \partial\sigma$. Также будем обозначать $\beta = \beta_{M,\sigma}$ (или β_σ , где это не вызывает двусмысленности) и называть β бизвездным преобразованием, ассоциированным с σ .

На рис. 1.1 изображен вид бизвездных преобразований в размерности 2.



Рис. 1.1: Бизвездные преобразования в размерности 2

Для нас ключевым будет следующий результат:

Теорема 1.1.4 (Пахнер, [44]). Пусть K_1 и K_2 – кусочно линейно гомеоморфные комбинаторные многообразия. Тогда комбинаторное многообразие K_1 может быть переведено в комбинаторное многообразие K_2 при помощи конечной последовательности бизвездных преобразований и изоморфизмов.

Так как любые две комбинаторных сферы соединяются последовательностью бизвездных преобразований, то достаточно показать, как меняется значение $f(\langle L \rangle)$ (где L – трехмерная комбинаторная сфера) при бизвездных преобразованиях.

Будем называть бизвездные преобразования *эквивалентными*, если они соединяют изоморфные комбинаторные многообразия. Если бизвездное преобразование эквивалентно своему обратному, будем называть его *несущим*.

1.1.3 Граф Γ_2

Введем дополнительную конструкцию - граф Γ_n . Вершинами этого графа являются классы изоморфизма ориентированных комбинаторных сфер размерности n . Каждому существенному бизвездному преобразованию $\beta: L_1 \rightsquigarrow L_2$ сопоставим ребро β , соединяющее вершины L_1 и L_2 графа Γ_n .

Рассмотрим группы эквивариантных коцепей $C_{\mathbb{Z}_2}^i(\Gamma_n, \mathbb{Q})$ и эквивариантных когомологий $H_{\mathbb{Z}_2}^i(\Gamma_n, \mathbb{Q})$, где \mathbb{Q} — это рациональные числа \mathbb{Q} как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -модуль по отношению к действию $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ умножением на -1 , а действие $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на графе Γ_n совершается обращением ориентации всех комбинаторных сфер. Обозначим дифференциал комплекса коцепей через d .

Так как граф Γ_n связан, $H_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_n, \mathbb{Q}) = 0$. Очевидно, что $C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_n, \mathbb{Q}) = \mathcal{T}^{n+1}(\mathbb{Q})$. Тогда дифференциал δ можно рассмотреть и как отображение

$$\delta: C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_n, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_{n+1}, \mathbb{Q})$$

Определим аналогичный дифференциал для $C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_*, \mathbb{Q})$.

$$\delta: C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_n, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_{n+1}, \mathbb{Q})$$

$$(\delta h)(\beta) := (-1)^n \sum_{v \in U(\beta)} h(\beta_v)$$

Непосредственной проверкой доказывается, что $d\delta = \delta d$, поэтому d является цепным отображением комплекса $C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_*, \mathbb{Q})$ в комплекс $C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_*, \mathbb{Q})$ (по отношению к дифференциалу δ).

Предложение 1.1.5 ([5]). *d цепно гомотопно нулю как цепное отображение комплексов.*

Путем анализа получившихся из цепного отображения диаграмм и из соображений размерности А.А. Гайфуллин показал, что искомая группа $\ker[\mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{T}^5(\mathbb{Q})]$ изоморфна группе $A \subset C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ такой, что

$$a \in A \Leftrightarrow [a] \in \ker[H_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\delta^*} H_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_3, \mathbb{Q})] = N$$

Изоморфизм $A \longrightarrow \ker[\mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{T}^5(\mathbb{Q})]$ задается отображением $d^{-1}\delta$.

Группа N посчитана в [5]. Она одномерна как \mathbb{Q} -модуль и порождена элементом $c \in H_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2, \mathbb{Q})$. Значение этого класса было явно вычислено А.А.

Гайфуллиным на некотором наборе циклов в графе Γ_2 , которые мы будем называть элементарными (рис. 1.2 и рис. 1.3). Значение на элементарном цикле зависит от количества примыкающих к некоторым вершинам треугольников, обозначенных на рисунках 1.2 и 1.3 p, q, r, s и t . Этот набор важен тем, что любой цикл в графе Γ_2 можно представить в виде линейной комбинации элементарных.

Таким образом, для каждого коцикла $h \in C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$, представляющего класс когомологий c , можно явно указать функцию $f = d^{-1}\delta(h) \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, которая является локальной формулой для класса λp_1 для некоторой рациональной константы λ . Непосредственный подсчет (например, для 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}P^2$, построенной в [38]) показывает, что $\lambda = 1$.

Для явного описания какой-либо локальной формулы нужно выбрать конкретного представителя класса когомологий h . В [5] выбран следующий способ. Для двумерной комбинаторной сферы L определим ее сложность $a(L)$ следующей формулой:

$$a(L) = \begin{cases} k, & \text{если } L \text{ содержит хотя бы одну вершину степени } 3; \\ k + \frac{1}{3}, & \text{если } L \text{ содержит вершину степени } 4, \\ & \text{но не содержит вершин степени } 3; \\ k + \frac{2}{3}, & \text{если } L \text{ не содержит вершин степени } 3 \text{ и } 4. \end{cases}$$

Укажем явно для каждой вершины L графа Γ_2 цепь ξ такую, что $\partial\xi_L = L - \partial\Delta^3$. Рассмотрим все бизвездные преобразования $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, понижающие сложность комбинаторной сферы L , причем $\forall i \beta_i: L \rightarrow L_i$. Тогда положим

$$\xi_L = \sum_{i=1}^r (\xi_{L_i} - \beta_i).$$

Искомый коцикл теперь выписывается по формуле

$$h(\beta) = \langle c, \beta + \xi_{L_1} - \xi_{L_2} \rangle.$$

Заметим, что этот выбор коцикла сохраняет локальность формулы, так как зависит только от комбинаторного типа L .

Сформулируем вывод. Если $\beta: L_1 \rightarrow L_2$ – бизвездное преобразование, то

$$f(L_2) - f(L_1) = \sum_v h(\beta_v),$$

где v – вершина, участвующая в бизвездном преобразовании, $h \in C^1(\Gamma_2, \mathcal{Q})$ – коцикл графа Γ_2 . Все локальные формулы для первого класса Понтрягина, с точностью до умножения на рациональное число, представимы в таком виде, причем для любой формулы класс когомологий $c \in H^1(\Gamma_2, \mathcal{Q})$ коцикла h одинаков.

1.2 Алгоритм разложения цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных

Данный алгоритм был получен А.А. Гайфуллиным в работе [8], однако при $b = 2$ и $b = 4$ были пропущены некоторые случаи. Мы устраняем здесь эту неточность.

Дан цикл в графе Γ_2 , то есть замкнутая последовательность бизвездных преобразований.

Выделим в графе Γ_2 два типа циклов, которые мы будем называть *элементарными циклами* соответственно первого и второго типа. Циклы первого типа изображены на рис. 1.2, второго - на рис. 1.3, причем изображены только те части комбинаторных сфер, которые изменяются под действием участвующих бизвездных преобразований.

Введем обозначение. Если σ_1 и σ_2 – симплексы в L такие, что определены бизвездные преобразования, ассоциированные с σ_1 и σ_2 , а также σ_1 , и σ_2 не содержатся ни в каком общем симплексе L , то обозначим через $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ следующий цикл :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta_{\sigma_1}} & L_1 \\ \uparrow \beta_{\sigma_2}^{-1} & & \downarrow \beta_{\sigma_2} \\ L_2 & \xleftarrow{\beta_{\sigma_1}^{-1}} & L_{12} \end{array}$$

Напомним понятие *сложности* вершины графа Γ_2 как двумерной комбинаторной сферы L с k вершинами.

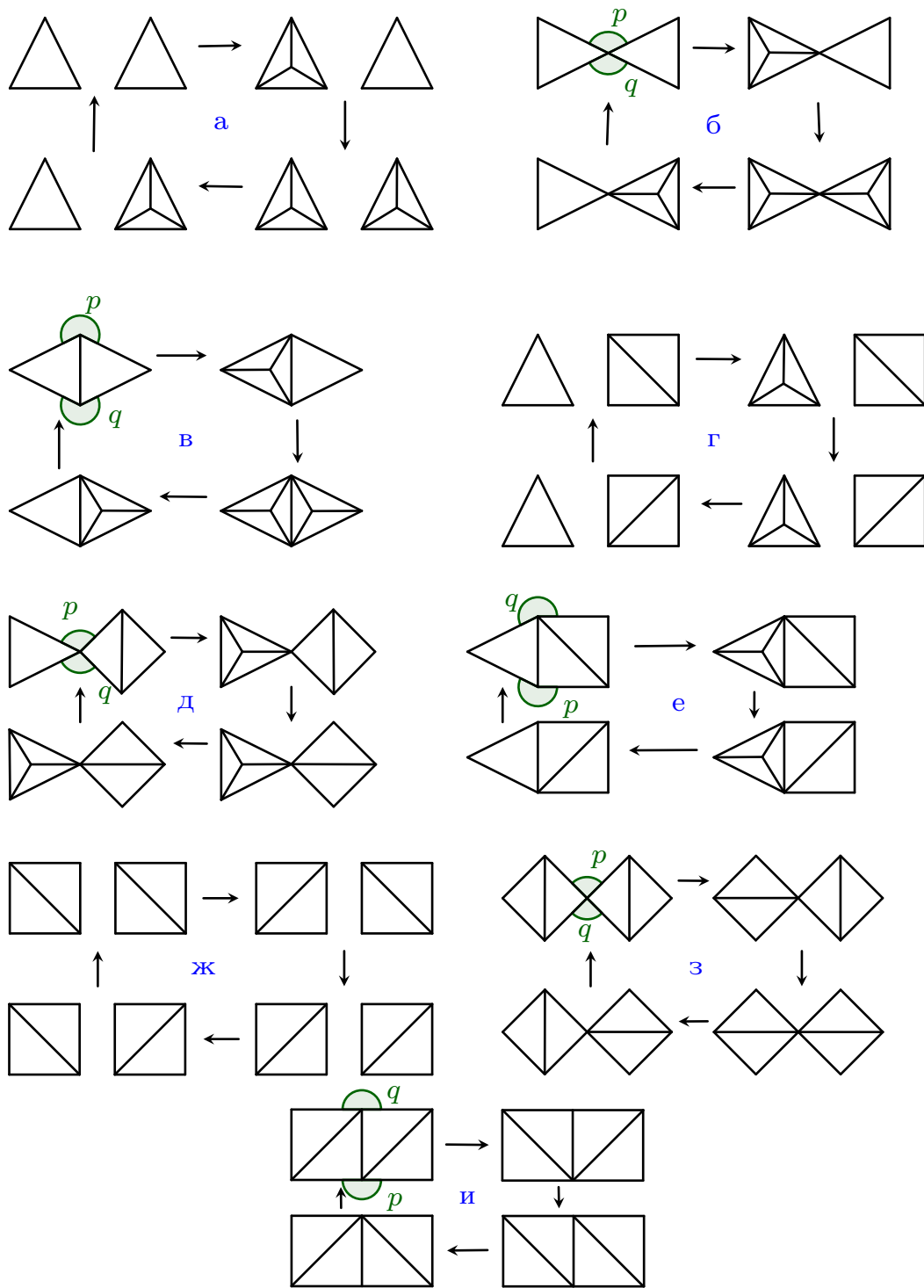


Рис. 1.2: Элементарные циклы первого типа.

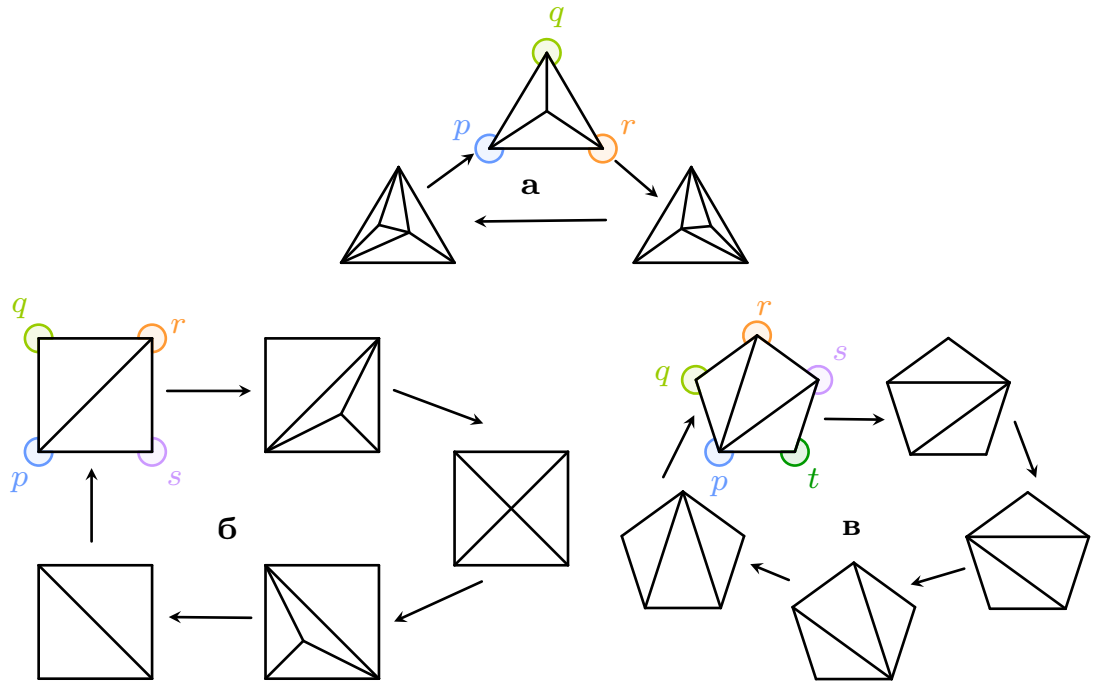


Рис. 1.3: Элементарные циклы второго типа.

$$a(L) = \begin{cases} k, & \text{если } L \text{ содержит хотя бы одну вершину степени } 3; \\ k + \frac{1}{3}, & \text{если } L \text{ содержит вершину степени } 4, \\ & \text{но не содержит вершин степени } 3; \\ k + \frac{2}{3}, & \text{если } L \text{ не содержит вершин степени } 3 \text{ и } 4. \end{cases}$$

Теперь определим *сложность* бизвездного преобразования (ребра графа Γ_2) $\beta: L_1 \rightarrow L_2$.

$$a(\beta) = \begin{cases} \max(a(L_1), a(L_2)), & \text{если } a(L_1) \neq a(L_2); \\ a(L_1) + \frac{1}{6}, & \text{если } a(L_1) = a(L_2). \end{cases}$$

Тогда сложность любой комбинаторной сферы $a(L) \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а сложность любого бизвездного преобразования $a(\beta) \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Обозначим Γ_2^a множество всех вершин и ребер графа Γ_2 со сложностью, не превышающей a . Тогда если любой цикл, лежащий в графе Γ_2^a , будет представлен в виде суммы цикла из $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$ и элементарных циклов, то по индукции мы сможем представить весь цикл в виде линейной комбинации элементарных.

На каждом шаге будем рассматривать наименьшее возможное a для цикла.

Пусть $a = k + \frac{b}{6}$, тогда достаточно доказать вышенаписанное для каждого $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Разберем отдельно случаи четного и нечетного b .

Случай нечетного b . В случае нечетного b в цикле есть преобразование наибольшей сложности

$$\beta: L_1 \longrightarrow L_2,$$

соединяющее две комбинаторных сферы одинаковой сложности $k + \frac{b-1}{6}$ и ассоциированное с некоторым симплексом σ . Мы покажем, что добавлением элементарных циклов возможно убрать β из цикла, и в то же время добавить только преобразования меньшей сложности. Повторив такую процедуру по всем β с наибольшей сложностью, мы получим цикл с носителем в $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$. Таким же образом мы будем поступать во всех остальных случаях.

$b = 1$. При $b = 1$ обе комбинаторные сферы L_1 и L_2 содержат вершины степени 3. Пусть существует вершина v степени 3, такая что ее степень не меняется под действием бизвездного преобразования. Тогда определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, v)$. Носитель цепи $\beta - \gamma(L_1, \sigma, v)$ лежит в графе Γ_2^k (см. рис. 1.4).

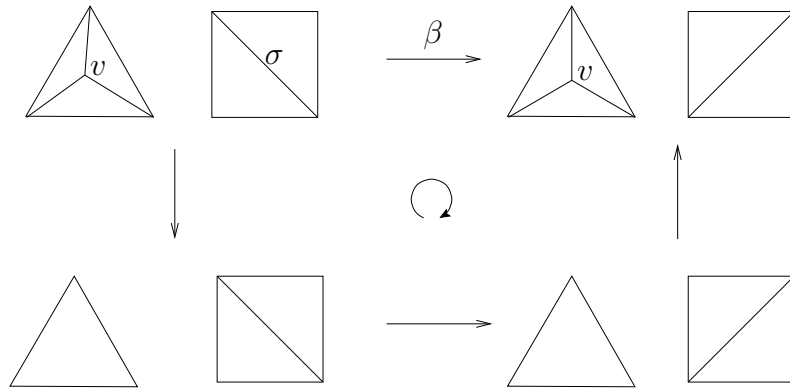


Рис. 1.4: $b = 1$. Случай совпадения вершин v_1 и v_2

Если вершины v , сохраняющей степень 3 под действием β , нет, то существуют вершины v_1 и v_2 , такие что $\deg_{L_1} v_1 = 3 = \deg_{L_2} v_2$ и $\deg_{L_1} v_2 = 4 = \deg_{L_2} v_1$. Тогда цикл $\gamma(L_1, \sigma, v)$ не определен, зато можно вычесть элементарный цикл второго типа (см. рис. 1.5), что понизит сложность исходного цикла.

$b = 3$. При $b = 3$ комбинаторные сферы L_1 и L_2 не содержат вершин степени 3, но содержат вершину степени 4. Разобьем ситуацию на два случая.

1. Существует вершина степени 4 в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2 (обозначим ее v). Тогда эта вершина не участвует в бизвездном преобразовании β . Тогда несложно показать, что одна из диагоналей τ четырехугольника $\text{link } v$ должна отсутствовать в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2 . В противном случае сфера L_1 может состоять только из 5 вершин, и тогда преобразование β несущественное. Рассмотрим ребро $[v, w]$, где вершина w не принадлежит диагонали τ . Тогда определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, [v, w])$, и носитель цепи $\beta - \gamma(L_1, \sigma, [v, w])$ лежит в графе Γ_2^k (см. рис. 1.6).

2. Не существует вершины v , являющейся вершиной степени 4 в обеих сферах L_1 и L_2 . Тогда существуют две вершины v_1 и v_2 , участвующие в β , такие что $\deg_{L_1} v_1 = 4, \deg_{L_2} v_2 = 4$. В сфере L_1 будет не более двух вершин степени

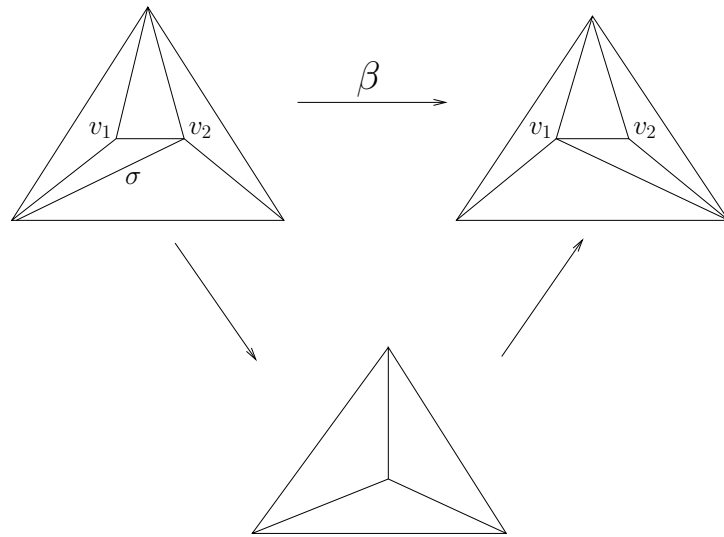


Рис. 1.5: $b = 1$. Случай $v_1 \neq v_2$

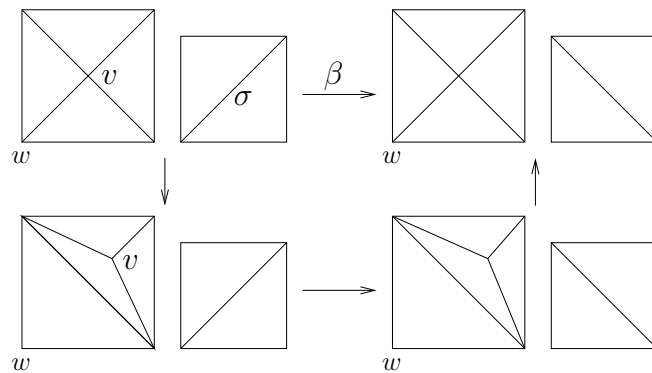


Рис. 1.6: $b = 3$. Случай 1

4. Одну из вершин v_1 или v_2 можно выбрать единственным образом, так как иначе сферы L_1 и L_2 состоят из 6 вершин, и преобразование β является несущественным, что противоречит тому, что β является ребром графа Γ_2 . Таким образом, в L_1 или в L_2 будет ровно одна вершина степени 4. Тогда, используя эйлерову характеристику, несложно показать, что в L_1 найдется хотя бы 8 вершин степени 5. Тогда одна из них не входит в $\text{link } v_1 \cup \text{link } v_2$, назовем ее w . Хотя бы для одного ребра, выходящего из w , существует бизвездное преобразование, ассоциированное с ним. Таким образом, получим три бизвездных преобразования β_1, β_2 и β_3 (см. рис. 1.7), каждое из которых можно упростить согласно предыдущему случаю.

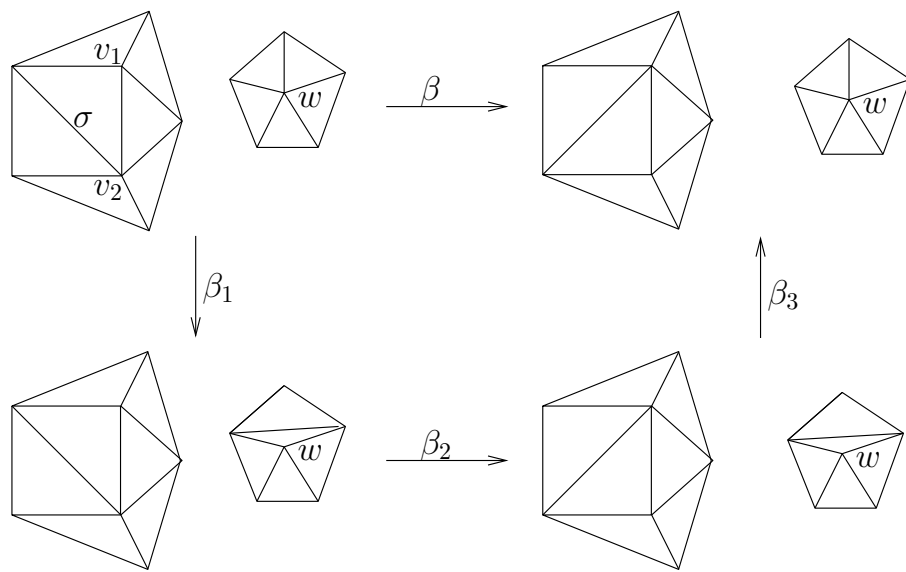
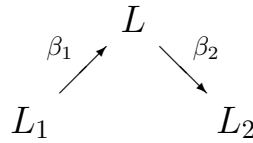


Рис. 1.7: $b = 3$. Случай 2

$b = 5$. Каждая из комбинаторных сфер L_1 и L_2 не содержит вершин степени 3 и 4. В этом случае L_1 содержит хотя бы 12 вершин степени 5. Среди этих 12 вершин обязательно найдется вершина w , не участвующая в β . Обозначим вершины $\text{link } w$ u_1, u_2, u_3, u_4 и u_5 в некотором направлении обхода вокруг w . Из пяти диагоналей в пятиугольнике $\text{link } w$ не более двух присутствуют в каждой из комбинаторных сфер L_1 и L_2 . Значит, хотя бы одна отсутствует в обеих сферах. Без ограничения общности, пусть это диагональ u_2u_5 . Тогда определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, wu_1)$ и цикл $\beta - \gamma(L_1, \sigma, [w, u_1])$ лежит в графе $\Gamma_2^{k+\frac{2}{3}}$.

Случай четного b . В случае четного b бизвездные преобразования наибольшей сложности разбиваются на пары следующих подряд:



Здесь $a(L) > a(L_1)$, $a(L) > a(L_2)$, $a(\beta_1) = a(\beta_2) = a(L)$.

Пусть $\beta_1 = \beta_{L,\sigma_1}^{-1}$, $\beta_2 = \beta_{L,\sigma_2}$.

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Преобразования β_1^{-1} и β_2 уменьшают количество вершин. Цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$ определен всегда, если в L больше 5 вершин.

$\mathbf{b} = \mathbf{2}$. Комплексы L_1 и L_2 содержат вершины степени 3, а L не содержит вершин степени 3, но содержит вершины степени 4. Тогда σ_1 и σ_2 – ребра, выходящие из вершин степени 4.

Если цикл $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ определен, то $\beta_1 + \beta_2 - \gamma(L, \sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$ за исключением единственного случая, когда у вершин v_1 и v_2 (обозначения на рисунке 1.8) одинаковая степень. В этом случае цикл не упрощается путем вычитания $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$. Чтобы уменьшить сложность преобразования β , достаточно добавить два элементарных преобразования второго типа, и носитель цепи $\beta_1 + \beta_2 - \delta_1 - \delta_2$ лежит в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$ (см. рис. 1.8).

.

Цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$ не определен в следующих случаях:

1. Рёбра σ_1 и σ_2 содержатся в каком-нибудь треугольнике Δ комбинаторной сферы, причем общая вершина этих рёбер имеет степень, большую 4 (см. рис. 1.9 вверху). В этом случае возникает дополнительное ребро, обозначенное $[w_1, w_2]$. Если это ребро отсутствует, то прибавлением двух элементарных циклов второго типа мы получим цикл в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$. Если же ребро $[w_1, w_2]$ присутствует, то изображенный способ упростить цикл не годится.

Соответственно, если ребро $[w_1, w_2]$ уже лежит в комплексе L , то удалим его, добавив 2 дополнительных элементарных цикла (см. рис. 1.10). Добавленные элементарные циклы не увеличивают сложностей сфер, а полученная ситуация эквивалентна предыдущему случаю для преобразований β'_1 и β'_2 .

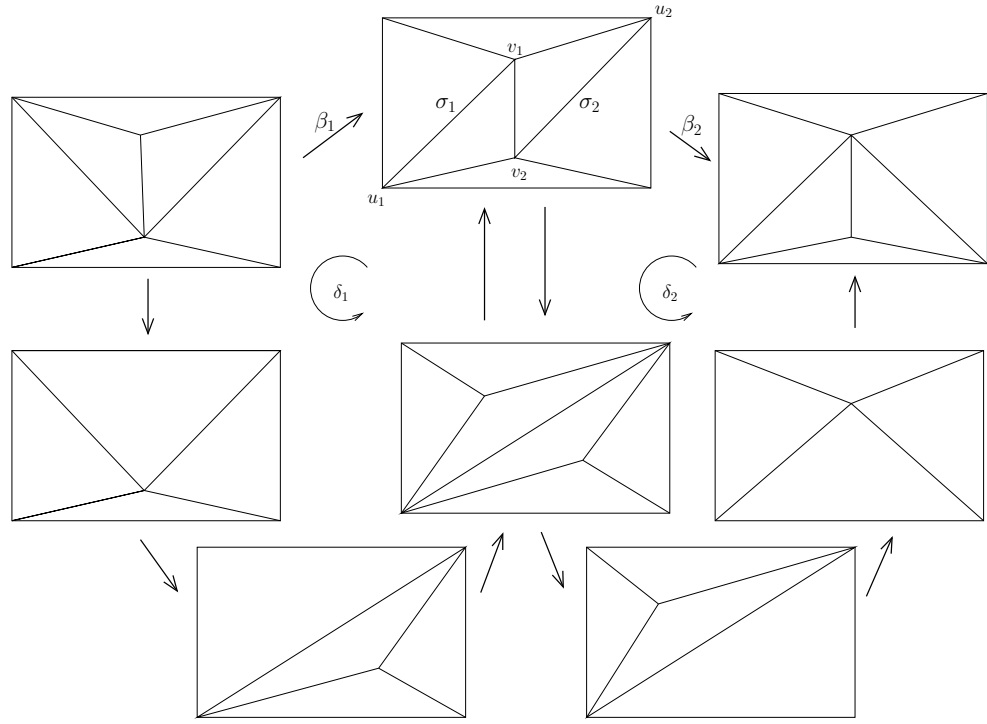


Рис. 1.8: $b = 2$. Случай совпадения степеней вершин v_1 и v_2

2. Рёбра σ_1 и σ_2 содержатся в каком-нибудь треугольнике Δ комбинаторной сферы, причем общая вершина этих рёбер имеет степень, равную 4. В этом случае носитель цепи $\beta_1 + \beta_2 - \delta$ принадлежит графу $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$ (см. рис. 1.11).

3. Рёбра σ_1 и σ_2 не лежат в одном треугольнике, но их линки в L совпадают, так что коммутация преобразований β_{σ_1} и β_{σ_2} невозможна. Тогда имеется два различных случая: σ_1 и σ_2 могут иметь или не иметь общую вершину. Пусть они не пересекаются. Тогда пусть v_1 - вершина степени 4, принадлежащая σ_1 . Ребро $[u, w]$ не может лежать в комбинаторной сфере L , а значит определено преобразование $\beta_3 = \beta_{[w_1, v_1]}$. $\beta_1 + \beta_3$ можно разложить в сумму линейную комбинацию элементарных циклов и цепей с носителем в графе $\Gamma^{k+\frac{1}{6}}$ согласно предыдущему случаю, а разность $\beta_2 - \beta_3$ - с помощью цикла $\Gamma(L, \sigma_2, [w_1, v_1])$ (см. рис. 1.12).

Если у σ_1 и σ_2 есть общая вершина, то упростить цикл можно воспользовавшись циклом второго типа наподобие случая 2. При этом в изображенном четырехугольнике должна отсутствовать диагональ $[u_1, u_2]$, так как она используется в этом цикле (см. рис. 1.13).

Остался последний случай - когда диагональ $[u_1, u_2]$ присутствует в сфере

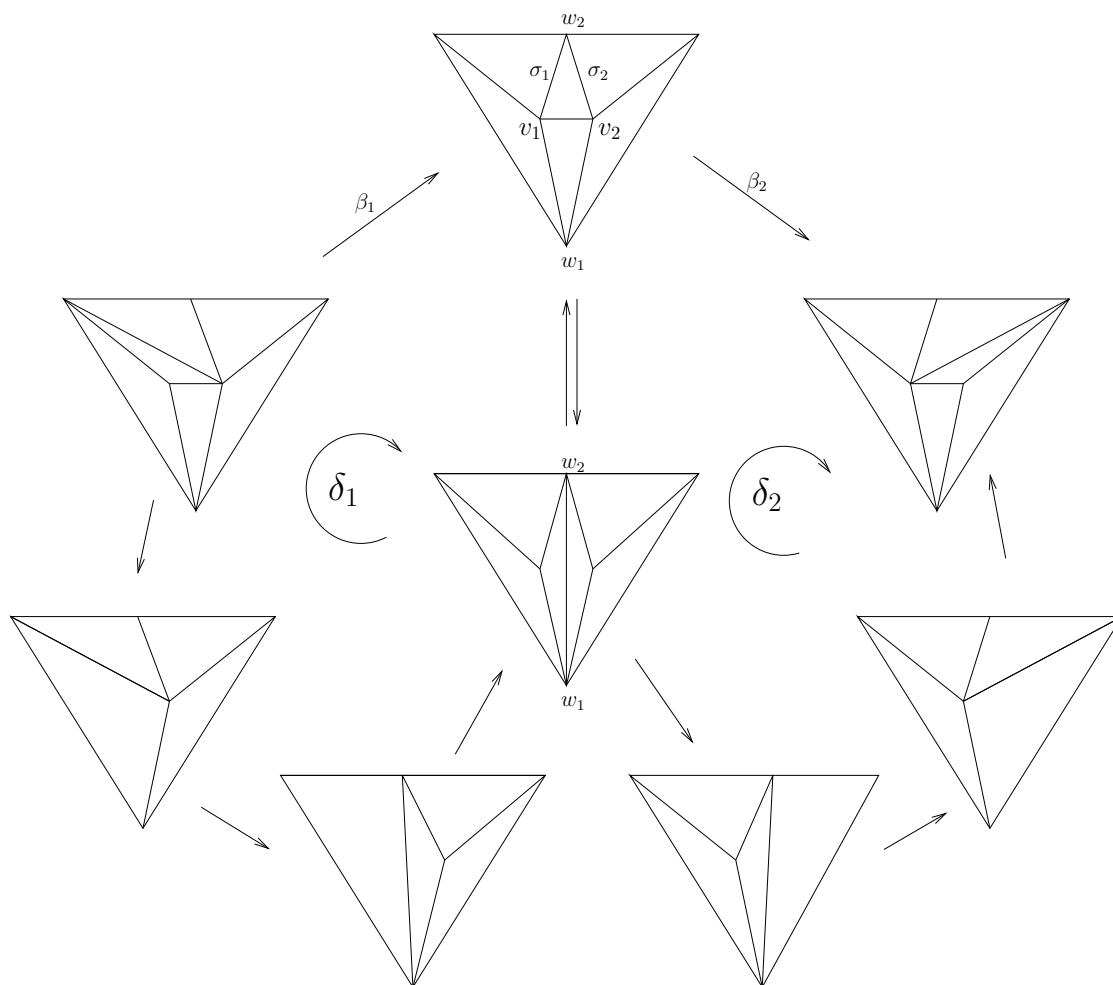


Рис. 1.9: $b = 2$. Случай 1, ребро $[w_1, w_2]$ не присутствует в L

L . Его можно разрешить наподобие аналогичного шага в случае 1 (на рис. 1.13). После вычитания такого цикла мы сводим задачу к предыдущему случаю (см. рис. 1.14).

Итак, все случаи, когда цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$ не определен при $b = 2$, разобраны.

$b = 4$. Комбинаторная сфера L не содержит вершин степени 3 и 4, σ_1 и σ_2 – ребра, выходящие из вершин степени 5. L содержит не менее 12 вершин степени 5, при этом в бизвездных преобразованиях β_1 и β_2 участвуют (изменяют свои линки) не более 8 вершин. Значит, существует вершина степени 5 (обозначим ее v), общая для L_1 , L_2 и L . Среди 5 отрезков, выходящих из v , найдутся хотя бы 3, с которыми определены бизвездные преобразования в L , ассоциированные с ними. Обозначим их e_1 , e_2 и e_3 . Тогда цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, e_i)$ может быть не определен только для одного из ребер e_i . Значит, существует

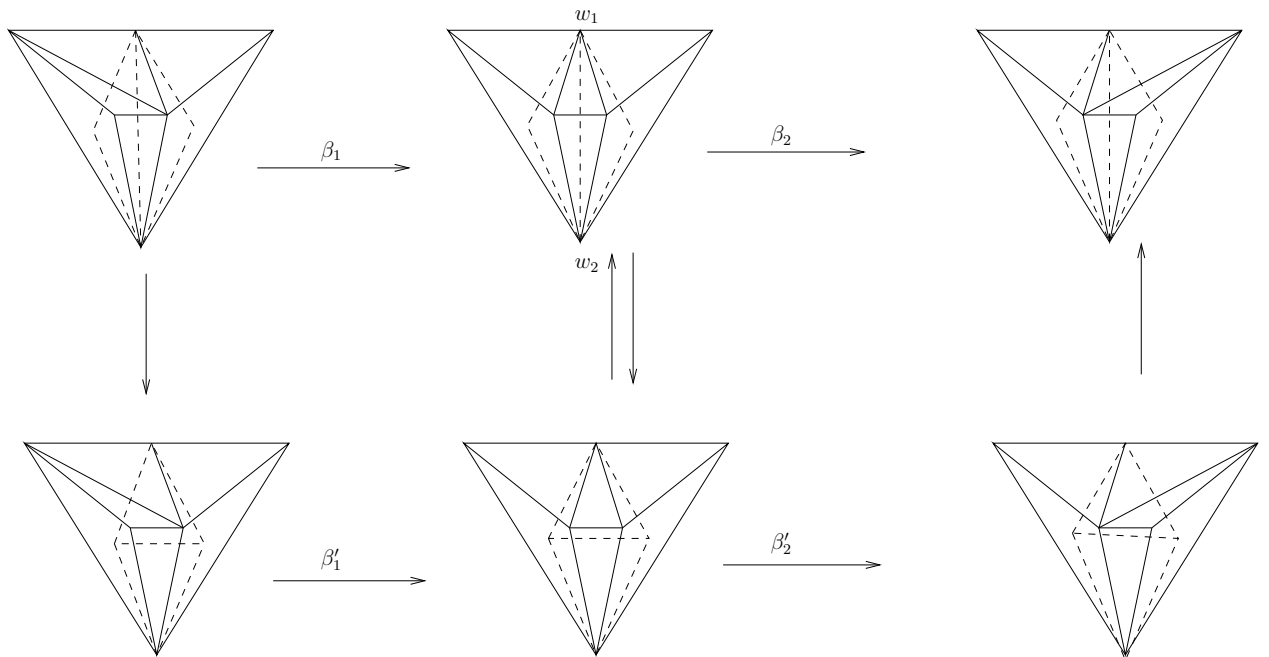


Рис. 1.10: $b = 2$. Случай 1, ребро $[w_1, w_2]$ присутствует в L

i такое, что определены оба цикла $\gamma(L_1, \sigma_1, e_i)$ и $\gamma(L_1, \sigma_2, e_i)$. Тогда носитель цепи $\beta_1 + \beta_2 - \gamma(L_1, \sigma_1, e_i) + \gamma(L_1, \sigma_2, e_i)$ лежит в $\Gamma^{k+\frac{1}{2}}$ за исключением следующего случая.

При $b = 4$ по причинам, аналогичным случаю $b = 2$, цикл

$$-\gamma(L_1, \sigma_1, e_i) + \gamma(L_1, \sigma_2, e_i)$$

не всегда понижает сложность цикла. На рисунке 1.15 сверху изображен этот случай. Если ребро $[u_1, u_2]$ отсутствует в L , то упростить цепь $\beta_1 + \beta_2$ можно способом, указанным на рисунке 1.15. Если же ребро $[u_1, u_2]$ присутствует в L , то, наподобие аналогичному случаю при $b = 2$, определены циклы $\gamma(L, \sigma_1, [u_1, u_2])$ и $\gamma(L, \sigma_2, [u_1, u_2])$. Тогда цепь $\beta_1 + \beta_2 + \gamma(L, \sigma_1, [u_1, u_2]) - \gamma(L, \sigma_2, [u_1, u_2])$ представляется как сумма преобразований меньшей сложности и двух преобразований с отсутствующим ребром $[u_1, u_2]$, что позволяет применить упрощение с рис. 1.15.

Итак, мы доказали, что

Теорема 1.2.1. *Любой цикл в графе Γ_2 разлагается в линейную комбинацию элементарных.*

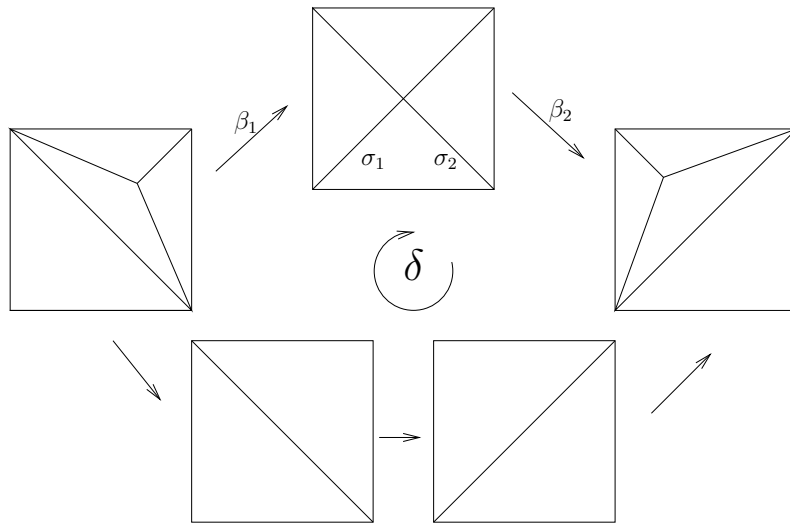


Рис. 1.11: $b = 2$. Случай 2

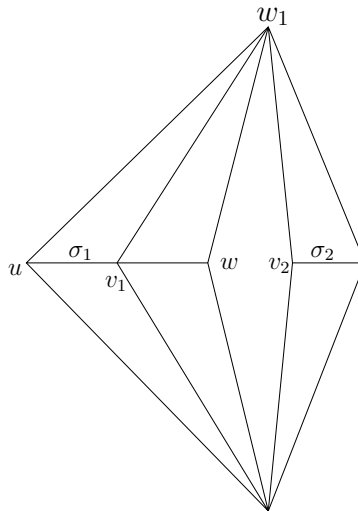


Рис. 1.12: $b = 2$. Случай 3

1.2.1 Значения класса когомологий c на элементарных циклах

В [5] были также посчитаны значения класса когомологий c на элементарных циклах. Они зависят от количества треугольников, соседних с изменяемыми при бизвездных преобразованиях вершинами.

Рассмотрим две функции от целочисленных переменных:

$$\rho(p, q) = \frac{q - p}{(p + q + 2)(p + q + 3)(p + q + 4)}$$

$$\omega(p) = \frac{1}{(p + 2)(p + 3)}$$

Тогда значения класса когомологий c на элементарных циклах задаются следующей таблицей:

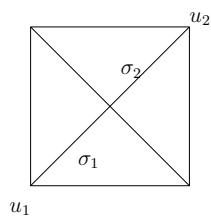


Рис. 1.13: $b = 2$. Случай общей вершины у ребер σ_1 и σ_2

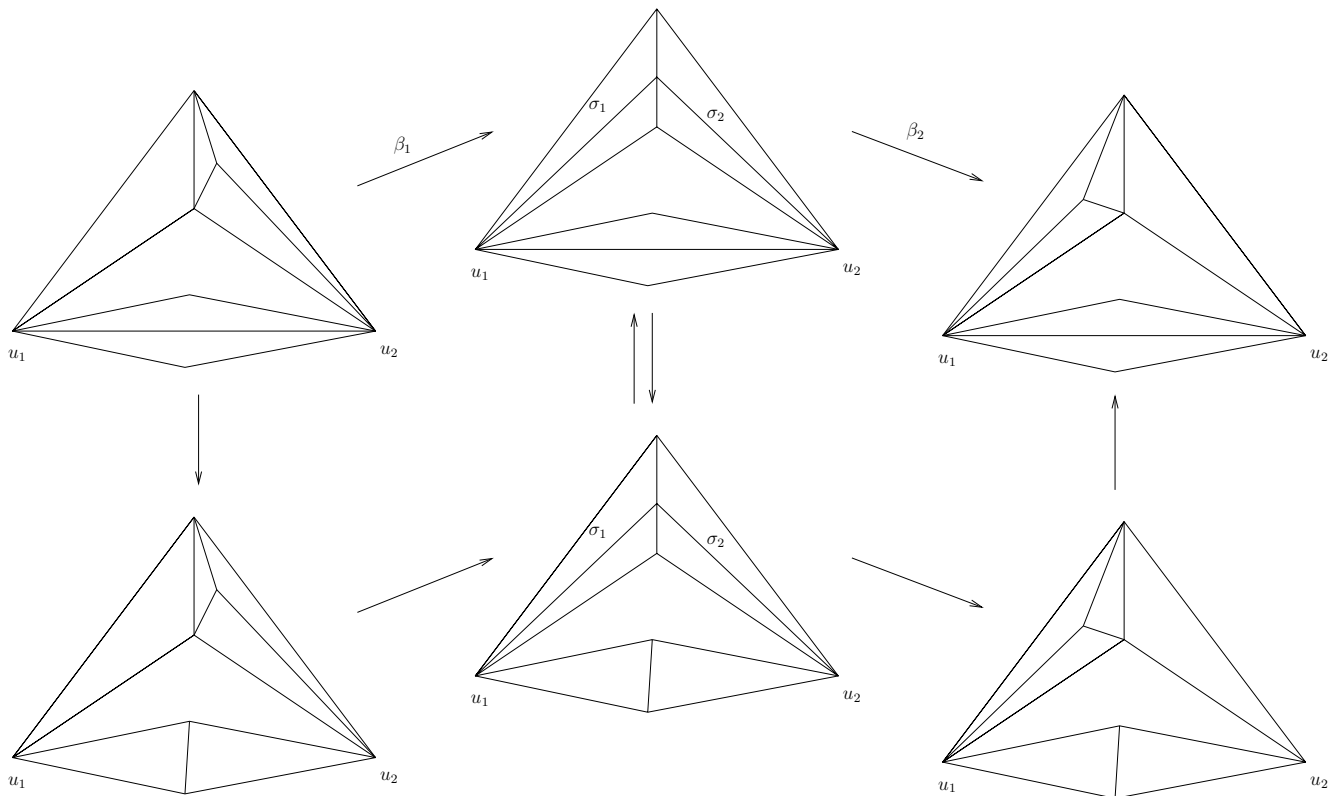


Рис. 1.14: $b = 2$. Случай присутствия диагонали $[u_1, u_2]$ в сфере L

1 тип: а, г, ж	0
1 тип: б, д, з	$\rho(p, q)$
1 тип: в, и	$\rho(0, q) - \rho(0, p)$
1 тип: е	$\rho(0, q) + \rho(0, p)$
2 тип: а	$\omega(p) - \omega(q) + \omega(r) - \frac{1}{12}$
2 тип: б	$\omega(p) - \omega(q) - \omega(r) + \omega(k)$
2 тип: в	$\omega(p) + \omega(q) + \omega(r) + \omega(k) + \omega(l) - \frac{1}{12}$

1.3 Основные шаги алгоритма

Рассмотрим симплициальный комплекс L . Зафиксируем на нем ориентацию.

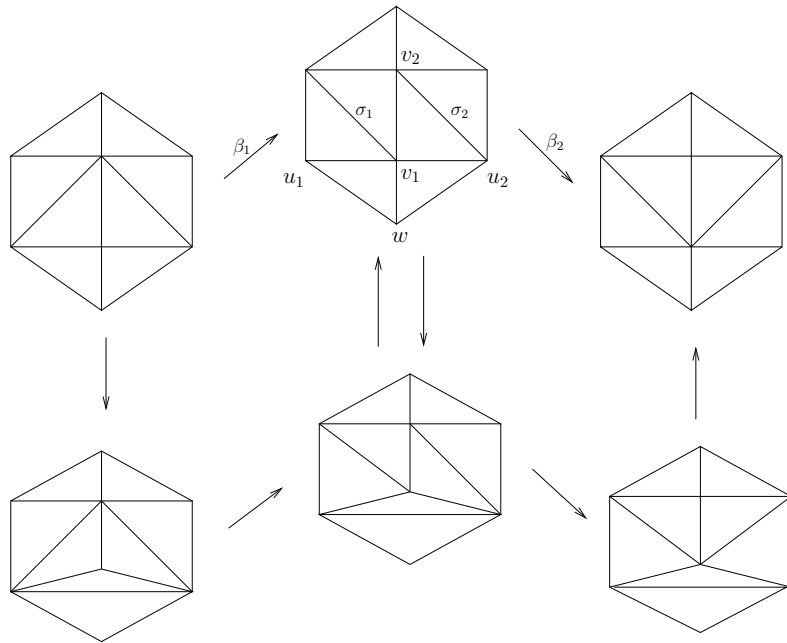


Рис. 1.15: $b = 4$. Исключительный случай

Алгоритм подсчета первого рационального класса Понтрягина L разбит на несколько действий:

1. Найти последовательности бизвездных преобразований, сводящие линк каждого $(n - 4)$ -симплекса σ комплекса L к границе стандартного симплекса $\text{link}_L \sigma = L_0 \rightsquigarrow L_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow L_k$. Пусть V_σ — объединение множества всех вершин комбинаторных сфер L_0, \dots, L_k , где вершины v_1 и v_2 комбинаторных сфер L_i и L_{i+1} отождествляются, если v_1 переходит в v_2 под действием соответствующего бизвездного преобразования $L_i \rightsquigarrow L_{i+1}$. Будем также считать, что все новые появляющиеся вершины имеют номера, ранее не встречавшиеся в предыдущих преобразованиях последовательности.
2. Для каждого $(n - 4)$ -мерного симплекса σ и для каждой вершины v рассмотрим последовательности индуцированных бизвездных преобразований $\text{link}_{L_i} v \rightsquigarrow \text{link}_{L_{i+1}} v \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \text{link}_{L_j} v$, где $l = \min\{p \mid v \in L_p\}$, $j = \max\{p \mid v \in L_p\}$. При этом $\forall p \in [l, j]$ верно, что $v \in L_p$ в силу соглашения о новой нумерации новых возникающих вершин. Кроме этого заметим, что $\text{link}_{L_j} v$ есть симплицальный комплекс, комбинаторно эквивалентный границе трехмерного симплекса.
3. Для каждой получившейся цепочки бизвездных преобразований, сводя-

щей 2-мерную комбинаторную сферу $\text{link}_{L_i} v$ к границе 3-симплекса, замкнуть эту цепь в цикл в комплексе Γ_2 любым способом, однозначно строящимся по комбинаторному типу исходной сферы.

4. Получившиеся циклы - циклы в графе Γ_2 . Разложить эти циклы в виде линейной комбинации элементарных циклов.
5. Посчитать вклад каждого элементарного цикла, получить для каждого σ вклад $f(\text{link } \sigma)$ и построить цикл

$$f_{\#}(L) = \sum_{\sigma \in L, \dim \sigma = n-4} f(\text{link } \sigma) \sigma,$$

представляющий элемент в гомологиях, двойственный к первому классу Понтрягина.

Глава 2

Минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости

Построенный в предыдущей главе алгоритм можно применить для решения задачи о нахождении минимальной триангуляции кватернионной проективной плоскости. Данная глава посвящена решению этой задачи.

2.1 Многообразие Илса-Кёйпера

Классическое определение функции Морса можно обобщить на случай топологического или комбинаторного многообразия следующим образом.

Приведем одно из первых утверждений теории Морса:

Предложение 2.1.1. Пусть M^n – гладкое многообразие, а $a \in M$ – неособая точка функции Морса $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда существует гладкая система координат $\{x^i\}$ в окрестности точки a , такая что $x^n = f(x) - f(a)$ в окрестности точки a . Если a является критической точкой индекса k , то существует гладкая система координат $\{x^i\}$ в окрестности точки a , такая что $-\sum_{i=1}^k (x^i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (x^i)^2 = f(x) - f(a)$ в окрестности точки a .

Это ключевое для теории Морса утверждение можно взять за определение функции Морса в гладком случае. В топологическом и комбинаторном случае используется именно этот подход, так как он не использует гладкости функции f .

В случае комбинаторного многообразия K функция f рассматривается как функция на геометрической реализации многообразия $|K|$.

Определение 2.1.2. Функцией Морса на топологическом (комбинаторном) многообразии X называется непрерывная (кусочно линейная) функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, такая что в окрестности любой точки $a \in X$ существует C^0 - (PL-) система координат $\{x^i\}$, и в этой окрестности выполняется одно из двух условий (1) и (2) ((1) и (2')):

1. $x^n = f(x) - f(a)$ – такая точка a называется регулярной;
2. $-\sum_{i=1}^k (x^i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (x^i)^2 = f(x) - f(a)$ – такая точка a называется особой индекса k в топологическом случае;
- 2'. $-\max\{|x^1|, \dots, |x^k|\} + \max\{|x^{k+1}|, \dots, |x^n|\} = f(x) - f(a)$ – такая точка a называется особой индекса k в комбинаторном случае.

Замечание 2.1.3. Приведем для сравнения более современное определение функции Морса на симплициальном комплексе, принадлежащее Р. Форману [34]. Пусть K – симплициальный комплекс, S – множество всех симплексов K , а S_d – множество всех d -мерных симплексов. *Дискретной* функцией Морса на K называется функция $S \rightarrow \mathbb{R}$, такая что для всякого $\sigma \in S_d$

$$\#\{\tau \in S_{d+1} \mid \tau \supsetneq \sigma \text{ and } f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$$

$$\#\{\nu \in S_{d-1} \mid \nu \supsetneq \sigma \text{ and } f(\nu) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$$

При таком определении большая часть классической теории Морса переносятся со случая гладких многообразий на комбинаторные многообразия. Определение Формана более конструктивно и универсально, так как оно не только позволяет мгновенно определять, является ли данная функция функцией Морса, но и явно ее строить со всеми допустимыми особенностями. Доказательство большинства утверждений у Формана сводится к несложным комбинаторным задачам, тогда как более старое определение требует явных построений деформаций для доказательства простейших утверждений. Мы будем использовать определение 2.1.2, следуя статье [27].

Естественной задачей является рассмотрение многообразий, допускающих функции Морса с малым количеством критических точек. Общеизвестно, что наличие у функции Морса двух критических точек гарантирует, что многообразие гомеоморфно сфере. В случае трех критических точек, как показали Дж. Илс и Н. Кёйпер, результаты сложнее.

Определение 2.1.4. *Многообразие Илса-Кёйпера* – это топологическое (гладкое, комбинаторное) многообразие, на котором существует непрерывная (соответственно гладкая, кусочно линейная) функция Морса с тремя критическими точками.

Теорема 2.1.5 (Илс, Кёйпер [27]). *Пусть на многообразии X^n задана функция Морса $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ с ровно тремя критическими точками. Тогда:*

1. *Размерность и когомологии.*

Размерность X^n может быть равна только $n = 2m = 0, 2, 4, 8, 16$, причем кольцо когомологий $H^*(X)$ совпадает с кольцом когомологий трех точек (в случае $n = 0$), вещественной ($n = 2$), комплексной ($n = 4$), кватернионной ($n = 8$) или октавной ($n = 16$) проективной плоскости.

2. *Гомотопический тип.*

Если $n = 0$, то X состоит из трех точек. Если $n = 2$, то X гомеоморфно вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. При $n = 4$ возможен один гомотопический тип X , соответствующий $\mathbb{C}P^2$, при $n = 8$ – шесть гомотопических типов, а при $n = 16$ – шестьдесят гомотопических типов.

3. *Топологически, X – компактификация евклидова пространства \mathbb{R}^{2m} m -сферой S^m .*

4. *В кусочно линейном случае, имеется бесконечно много различных примеров искомых многообразий с точностью до кусочно линейного изоморфизма в размерностях $n = 8$ и $n = 16$. Они различимы по своим рациональным числам Понтрягина. При этом не все они допускают введение гладкой структуры.*

5. *С дифференциальной точки зрения (в категории гладких многообразий), имеется бесконечное множество возможных X в размерностях 8 и 16. Ассоциированные комбинаторные структуры классифицируются по своим рациональным числам Понтрягина. С каждой допустимой комбинаторной структуре могут быть ассоциированы не более 2 гладких структур, однако точное количество в каждом случае неизвестно. Числа Понтрягина соответствующих гладких многообразий могут быть равны*

$p_1^2[X] = 2^2(2h - 1)^2$, $p_2[X] = (45 + 2^2(2h - 1)^2)/7$, где $h(h - 1)/56 \in \mathbb{Z}$. В размерности $n = 2$ имеется лишь вещественная проективная прямая. В размерности $n = 4$ полных результатов нет.

2.2 Комплексы Брем-Кюнеля

В статье [38] был построен 9-вершинный симплициальный комплекс CP_9^2 . Он обладает несколькими замечательными свойствами:

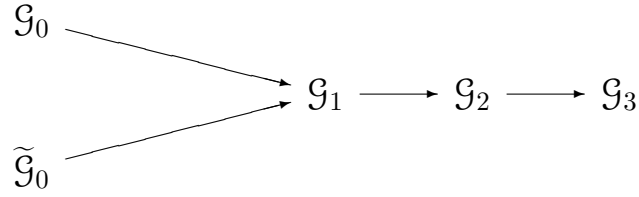
1. Среди всех комбинаторных многообразий размерности 4, не гомеоморфных сфере, он имеет наименьшее количество вершин.
2. Любые 3 вершины CP_9^2 образуют симплекс, принадлежащий триангуляции (это свойство также называют 3-смежностью).
3. Этот комплекс является минимальной по количеству вершин триангуляцией CP^2 .
4. CP_9^2 инвариантен относительно действия двулистного расширения группы Гейзенберга над \mathbb{Z}_3 .

Брем и Кюнель (см. [21]) построили три 15-вершинных комбинаторных многообразия M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ с аналогичными свойствами в 8-мерном случае для нахождения минимальной триангуляции кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$.

1. Среди всех комбинаторных многообразий размерности 8, не гомеоморфных сфере, они имеют наименьшее количество вершин.
2. Любые 5 вершин любого из комплексов M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 , $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ образуют симплекс (эти комплексы 5-смежностны).
3. Группа автоморфизмов M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ – группа икосаэдра A_5 , A_4 и S_3 соответственно.

Построение комплексов основано на явном построении действия некоторых групп на множестве вершин. Действия групп на множестве вершин мы

будем задавать в виде подгруппы группы перестановок на 15 элементах S_{15} .
Все изображенные ниже гомоморфизмы инъективны.



Рассмотрим следующие перестановки:

$$P = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12\ 13\ 14\ 15)$$

$$T = (3\ 10)(4\ 14)(5\ 8)(6\ 11)(7\ 12)(13\ 15)$$

$$U = (1\ 6\ 11)(2\ 7\ 12)(3\ 8\ 13)(4\ 9\ 14)(5\ 10\ 15)$$

Дополнительно нам понадобятся

$$S = (1\ 6\ 11)(2\ 15\ 14)(3\ 13\ 8)(4\ 7\ 5)(9\ 12\ 10) = P^{-1}TP^{-2}TP^{-2}$$

$$R = (2\ 5)(3\ 4)(7\ 10)(8\ 9)(12\ 15)(13\ 14) = S^{-1}P^2SP^{-1}S$$

Тогда зададим $\mathcal{G}_2 = \langle P, T \rangle$, $\mathcal{G}_3 = \langle P, T, U \rangle$, $\mathcal{G}_1 = \langle P, S \rangle$, $\mathcal{G}_0 = \langle R, S \rangle$,
 $\tilde{\mathcal{G}}_0 = \langle PRP^{-1}, S \rangle$.

Группа $\mathcal{G}_1 \cong A_5$ будет являться группой автоморфизмов M_{15}^8 , а группы \mathcal{G}_0
и $\tilde{\mathcal{G}}_0$ – группы автоморфизмов комплексов \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ соответственно.

Комплексы M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ распадаются на две части: у них имеется об-
щий кусок из 415 8-симплексов \mathcal{K}_0 , который описывается как объединение
орбит действия \mathcal{G}_1 на 12 явно указанных симплексах:

$$\begin{aligned}
 A &= \{1, 2, 3, 6, 8, 11, 13, 14, 15\} \\
 B &= \{1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \\
 C &= \{1, 2, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15\} \\
 D &= \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15\} \\
 E &= \{1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 13, 14\} \\
 F &= \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15\} \\
 G &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13\} \\
 H &= \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\} \\
 I &= \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\
 J &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15\} \\
 K &= \{1, 2, 3, 7, 8, 10, 12, 13, 14\}
 \end{aligned}$$

$$M = \{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$$

Чтобы определить оставшиеся 75 8-симплексов для каждого из комплексов, рассмотрим симплексы

$$L_{(1)} = \{3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$N_{(1)} = \{3, 4, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15\}$$

и возьмем их образы под действием P .

$$L_{(n)} = P^{n-1}L_{(1)}, \quad N_{(n)} = P^{n-1}N_{(1)}$$

$$\tilde{L}_{(n)} = P^{n-1}TL_{(1)}, \quad \tilde{N}_{(n)} = P^{n-1}TN_{(1)}$$

Наконец, обозначим $\mathcal{L}_n = L_{(n)} \cup N_{(n)}$ и $\tilde{\mathcal{L}}_n = \tilde{L}_{(n)} \cup \tilde{N}_{(n)}$.

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5;$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5;$$

$$\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \tilde{\mathcal{L}}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5.$$

Тогда искомые комплексы записываются в виде

$$M_{15}^8 = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1; \quad \bar{M}_{15}^8 = \mathcal{K}_0 \cup \tilde{\mathcal{K}}_1; \quad \widetilde{\bar{M}}_{15}^8 = \mathcal{K}_0 \cup \tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_1.$$

Эти три комплекса кусочно линейно гомеоморфны друг другу. Кроме того, группа симметрий M_{15}^8 изоморфна A_5 , группа симметрий \bar{M}_{15}^8 изоморфна S_4 , а группа симметрий $\widetilde{\bar{M}}_{15}^8$ изоморфна группе S_3 .

Замечание 2.2.1. Помимо приведенных Бремом и Кюнелем трех примеров, применением допустимых бизвездных преобразований к M_{15}^8 , \bar{M}_{15}^8 и $\widetilde{\bar{M}}_{15}^8$ Ф. Лутц построил еще три примера 8-мерных комбинаторных многообразий с 15 вершинами, не гомеоморфных сфере, но гомеоморфных M_{15}^8 .

Конкретные размерности $n = 2, 4, 8, 16$ также появляются в работе [20]. Авторы рассматривают всевозможные комбинаторные многообразия и исследуют ограничения, которые количество вершин многообразия накладывает на его размерность.

Теорема 2.2.2 ([20]). Пусть M^n – компактное комбинаторное многообразие с d вершинами. Тогда если $d < \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 3$, то M PL -гомеоморфно сфере, а если $d = \frac{3n}{2} + 3$, то M может быть не PL -гомеоморфным сфере только в случае, если $d = 2, 4, 8$ или 16 . В этом случае M^n является многообразием Илса-Кюйпера.

В своей статье Брем и Кюнель выдвигают гипотезу:

Гипотеза 2.2.3 ([21]). M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно $\mathbb{H}P^2$.

При этом из результатов, описанных в предыдущем разделе, а также из теоремы 2.2.2 следует, что

Предложение 2.2.4. Если $p_2[M_{15}^8] = p_2[\mathbb{H}P^2]$, то M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно $\mathbb{H}P^2$ и является его триангуляцией, минимальной по количеству вершин.

Кроме того, из теоремы Хирцебруха о сигнатуре и структуры кольца ко-гомологий M_{15}^8 следует, что

$$\frac{1}{45}(7p_2[M_{15}^8] - p_1^2[M_{15}^8]) = \text{sign } M_{15}^8 = 3.$$

Отсюда следует, что для кусочно линейной гомеоморфности M_{15}^8 и $\mathbb{H}P^2$ достаточно показать, что $p_1^2[M_{15}^8] = p_1^2[\mathbb{H}P^2] = 4$.

2.3 Особенности реализации

Таким образом, задача проверки кусочно линейной гомеоморфности M_{15}^8 и кватернионной проективной плоскости сведена к тому, чтобы посчитать $p_1(M_{15}^8)$. Для этого применим описанный в разделе 1.1 алгоритм.

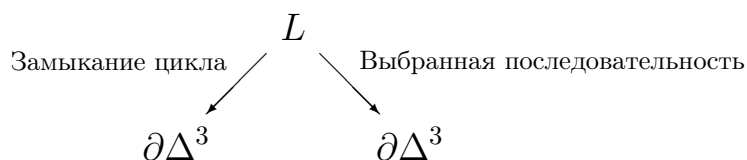
В M_{15}^8 3003 4-симплекса, и, даже если использовать то, что большое количество этих симплексов переводятся друг в друга вместе со всем M_{15}^8 при автоморфизмах, получится не менее 60 комбинаторных типов $\text{link } \sigma^4$. Поэтому подсчет первого класса Понтрягина вручную с использованием алгоритма – крайне трудоемкая задача. Однако этот алгоритм полностью комбинаторный, поэтому его можно реализовать с помощью компьютера.

Все подсчеты проводятся на классах изоморфизмов комбинаторных сфер, поэтому один из основных шагов для исходного алгоритма – задача проверки изоморфизма комбинаторных сфер. Эта задача крайне затратна для компьютерной проверки, и, чтобы избежать ее решения для каждого бизвездного преобразования, мы будем использовать бизвездные преобразования, сохраняющие нумерацию вершин.

Точнее, для хранения комплекса в памяти компьютера и его изменения нужно пронумеровать вершины. Тогда все симплексы будут записываться как некоторое множество чисел без повторений. Симплексы совпадают, если совпадают такие множества. Удобно хранить каждый симплекс как упорядоченное множество чисел, чтобы избежать различных записей. Все сохраняющиеся под действием бизвездного преобразования вершины будем нумеровать одинаковым образом.

Для подсчета значения класса c на произвольном цикле бизвездных преобразований двумерных сфер γ нужно согласованно пронумеровать все сферы в цикле. Хотя сделать это, в общем случае, нельзя, можно, нумеруя по очереди сферы в цикле, сделать так, чтобы все бизвездные преобразования в цикле уважали нумерацию, кроме, быть может, одного.

При этом эту нестыковку нумерации можно передвинуть в любое место цикла, так как нумерации можно согласовать на любой цепи, но не на цикле. Нам потребуется считать значение c только на циклах, в которых будет присутствовать $\partial\Delta^3$, так что мы можем считать, что именно границы симплекса $\partial\Delta^3$ будут занумерованы двумя разными способами.



Заметим, что среди всех используемых в алгоритме элементарных циклов только цикл типа (2а) не сохраняет нумерацию вершин ни при одной нумерации. Это легко преодолеть, изменив этот цикл на эквивалентный (см. рис. 2.1).

После этого изменения, если исходный цикл γ сохранял нумерацию везде, кроме замыкания в $\partial\Delta^3$, то и при представлении в виде линейной комбинации

элементарных все участвующие бизвездные преобразования будут сохранять нумерацию.

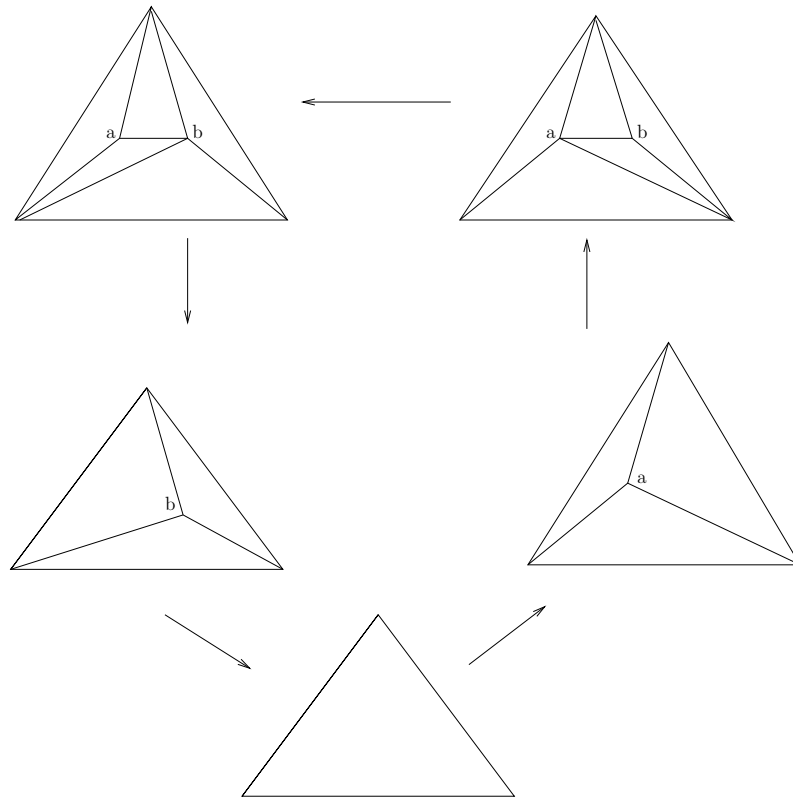


Рис. 2.1: Измененный элементарный цикл типа (2а)

Цикл γ замыкается по границе 3-мерного симплекса. Покажем, что любые две по-разному пронумерованные границы симплекса можно перевести друг в друга бизвездными преобразованиями, при которых не будет появляться больше одной дополнительной вершины, причем от добавления этих преобразований в γ значение формулы не поменяется.

Пусть имеется два симплекса $\sigma_a = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ и $\sigma_b = [b_1, b_2, b_3, b_4]$. Выберем такие четыре номера c_1, c_2, c_3 и c_4 , чтобы они отличались от всех a_i и b_i . Тогда рассмотрим следующие бизвездные преобразования границы первого симплекса $\partial\sigma_a$: сначала добавим в грань $[a_2, a_3, a_4]$ вершину с номером c_1 , а затем обратным преобразованием второго типа удалим вершину a_1 . Повторив эту процедуру с тремя оставшимися вершинами, мы полностью заменим $\partial\sigma_a$ на границу симплекса с вершинами, пронумерованными числами c_i , причем с той же ориентацией. Таким же образом переведем эту границу симплекса в σ_b . На каждом шаге мы использовали пару обратных преобразований,

поэтому вклад в формулу от добавляемых преобразований не будет.

После добавления преобразований, перенумерующих границу симплекса, все преобразования нового цикла уважают нумерацию вершин.

Вторая особенность реализации заключается в том, что для того, чтобы замкнуть полученную при помощи **BISTELLAR** цепь, использовать не затратный рекурсивный алгоритм, который проходит по всем возможным бизвездным преобразованиям, понижающим сложность комбинаторной сферы, а выбрать один фиксированный цикл, упрощающий сферу, строящийся по нумерации однозначно.

Таким образом, для каждой получившейся цепочки бизвездных преобразований, сводящей 2-мерную комбинаторную сферу к границе 3-симплекса, надо замкнуть эту цепь в цикл любым образом, однозначно строящимся по нумерации вершин сферы. Подходит, в частности, следующий способ: нужно делать по очереди первое возможное лексикографически бизвездное преобразование, понижающее сложность комбинаторной сферы и таким образом по индукции дойти до границы симплекса.

Проблема такого замыкания состоит в том, что, в отличие от предложенного в [5], оно не сохраняет локальности формулы, потому что зависит от нумерации комплекса. Докажем, что при этом полученная в результате цепь из $Z_4(X, \mathbb{Q})$ будет представлять тот же класс гомологий, что и указанная в [5].

Лемма 2.3.1. *Класс гомологий, получаемый в алгоритме подсчета первого класса Понтрягина, не зависит от выбора замыкания цепи в графе Γ_2 в случае, когда это замыкание однозначно строится по нумерации 2-мерной сферы.*

Доказательство. Пусть f – локальная формула, полученная при помощи алгоритма [5], а g – нелокальная формула, определенная выше.

Тогда докажем, что получаемые с их помощью циклы отличаются на границу. В этом случае их представители в гомологиях совпадут.

Пусть L – произвольное комбинаторное многообразие размерности n . По определению,

$$f_{\#}(L) - g_{\#}(L) = \sum_{\sigma^{n-4} \in K} (f(\text{link } \sigma) - g(\text{link } \sigma) \sigma)$$

Рассмотрим коэффициент при каждом симплексе σ . Он получается следующим образом: сначала комбинаторная сфера $\text{link } \sigma$ сводится к границе трехмерного симплекса, затем полученная цепь бизвездных преобразований индуцируется на линк каждой вершины этой сферы, тогда получается цепь в комплексе Γ_2 , которую для функции f мы замыкаем одним образом, а для g – другим. Тогда мы получим два цикла преобразований, разность вкладов на которых даст нам искомый коэффициент. Вклад на разности циклов равен разности их вкладов, поэтому рассмотрим разность этих двух циклов как циклов в комплексе Γ_2 . Преобразования, индуцированные из сведения трехмерной сферы к границе симплекса, сократятся, и останется цикл, образованный двумя построенными замыканиями.

Таким образом, полученный цикл зависит только от комбинаторного типа и нумерации двумерной комбинаторной сферы $\text{link}_{\text{link } \sigma} v$, где v – вершина $\text{link } \sigma$.

Укажем теперь явно цепь, границей которой будет являться $f_{\#}(L) - g_{\#}(L)$. Каждый из объектов $\text{link}_{\text{link } \sigma} v$ – двумерная комбинаторная сфера, являющийся линком $(n-3)$ -мерного симплекса. Обозначим этот симплекс τ . Тогда положим коэффициент при τ равным значению на двумерной комбинаторной сфере $\text{link } \tau$ формулы $f_{\#}(L) - g_{\#}(L)$. Граница образованной цепи совпадает с $f_{\#}(L) - g_{\#}(L)$.

□

2.3.1 Описание программы

Программа написана на языке программирования GAP (Groups, Algorithms, Programming) [30] по двум причинам: во-первых, на этом языке написана используемая для упрощения 3-мерной комбинаторной сферы программа BISTELLAR, и, во-вторых, среди библиотек GAP имеется самая полная библиотека по работе с симплицальными комплексами и их гомологиями.

Работу программы можно разделить на следующие основные этапы.

Для каждого $(n-4)$ -мерного симплекса делаются следующие 2 процедуры:

1. создание цикла η из бизвездных преобразований;
2. разложение этого цикла на элементарные и подсчет соответствующих значений локальной формулы.

Таким образом, получается цикл

$$f_{\#}(K) = \sum_{\sigma \in K, \dim \sigma = n-4} f(\text{link } \sigma) \sigma.$$

В течение всей работы программы нужно следить за согласованностью ориентаций всех симплексов. Ориентация конкретного симплекса в программе задается парой $[j, \pm 1]$, где j – номер симплекса в комплексе (как лексикографически упорядоченном массиве симплексов максимальной размерности), а второй элемент – ориентация этого симплекса. Тогда ориентация всего комплекса однозначно определена.

Последний этап программы – это подсчет класса гомологий, в котором лежит полученная цепь. Для подсчета гомологий исходного комплекса используется пакет языка GAP – `simpcomp` [28].

Этот пакет дает возможность в явном виде выписать представители порождающих группу $H_{n-4}(K)$ как симплициальные циклы. Найденный в программе цикл $f_{\#}(K)$ нужно представить в виде линейной комбинации этих представителей и $(n - 3)$ -границ. Программа решает эту линейную систему и выдает ответ.

В случае симплициального комплекса M_{15}^8 мы получили следующий результат:

Теорема 2.3.2. $p_1(M_{15}^8) = 2u$, где u – порождающая $H^4(M_{15}^8; \mathbb{Q})$.

Отсюда следует, что $p_1^2[M_{15}^8] = 4$, и, значит,

Теорема 2.3.3. M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ являются минимальными триангуляциями $\mathbb{H}P^2$.

Глава 3

Явный представитель формулы для первого класса Понтрягина в терминах перераспределения кривизны двумерных комбинаторных сфер

Напомним, что в явной формуле для первого класса Понтрягина [5], построенной в главе 1, h — функция на классах изоморфизма бизвёздных преобразований ориентированных двумерных комбинаторных сфер, то есть рациональный 1-коцикл в графе Γ_2 . В работе [5] был явно описан одномерный класс когомологий $c \in H^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ (см. 1.2.1) и доказано, что если в качестве h взять произвольный коцикл, представляющий c , то функция f будет корректно определена и формула (1.1) будет задавать класс гомологий, двойственный по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина. И обратно: всякая функция f такая, что формула вида (1.1) задаёт первый класс Понтрягина, происходит из некоторого коцикла h , представляющего класс c . Таким образом, были явно описаны все локальные комбинаторные формулы для первого рационального класса Понтрягина. Однако явного эффективного выбора канонического коцикла h , представляющего класс когомологий c , то есть канонической локальной формулы для первого класса Понтрягина, сделано не было. (Тем не менее, явного описания класса когомологий c достаточно для построения эффективно вычисляемой нелокальной формулы для первого рационального класса Понтрягина, см. [8, раздел 6].)

Выбор канонического и эффективно вычисляемого представителя h класса когомологий c , то есть канонической локальной формулы вида (1.1) для пер-

вого класса Понтрягина, — основная цель этой главы текущей диссертации. Конструкция коцикла h опирается на следующую геометрическую идею: при бизвёздном преобразовании двумерной комбинаторной сферы происходит перераспределение комбинаторной кривизны между вершинами этой сферы. Более точно, эйлерова характеристика триангулированной двумерной сферы L , равная 2, может быть посчитана как сумма локальных весов вершин:

$$\sum_{v \in V(L)} W(v) = 2, \quad W(v) = 1 - \frac{d_v}{6},$$

где $V(L)$ — множество вершин L , d_v — степень вершины v , и бизвёздному преобразованию β можно сопоставить цепь $\xi(\beta) \in C_1(L_\beta; \mathbb{Q}) \otimes C_1(L_\beta; \mathbb{Q})$, описывающую перераспределение весов $W(v)$ между вершинами, в некоторой трёхмерной комбинаторной сфере L_β . Значение коцикла h на ребре, отвечающем бизвёздному преобразованию β , равно (обобщённому) коэффициенту самозацепления этой 1-цепи.

3.1 Формулировка результата

Пусть L_1 и L_2 — ориентированные двумерные комбинаторные сферы, между которыми определено бизвёздное преобразование $\beta: L_1 \longrightarrow L_2$. Обозначим симплексы, определяющие β , через σ и τ , так что $\sigma * \partial\tau \xrightarrow{\beta} \partial\sigma * \tau$. Построим по этим данным трехмерную комбинаторную сферу L_β следующим образом:

$$L_\beta = \left(CL_1 \bigcup_{L_1 \setminus \text{Int}(\sigma * \partial\tau)} CL_2 \right) \cup (\sigma * \tau).$$

Так как L_1 и L_2 естественно вложены в L_β , то мы будем считать соответствующие вершины обозначенными тем же образом, что и в L_1 и L_2 . Вершины конусов над L_1 и L_2 будем обозначать через a_1 и a_2 соответственно. Ориентацию на L_β введем таким образом, чтобы линк вершины a_1 был изоморфен L_1 с сохранением ориентации, а линк вершины a_2 был изоморфен L_2 с обращенной ориентацией.

Для каждой вершины v двумерной комбинаторной сферы L назовем ее *комбинаторной кривизной* (или же весом вершины) число $W_L(v) = 1 - \frac{d_v}{6}$, где d_v — степень вершины v . Заметим, что сумма весов всех вершин постоянна и равна эйлеровой характеристике сферы, то есть 2.

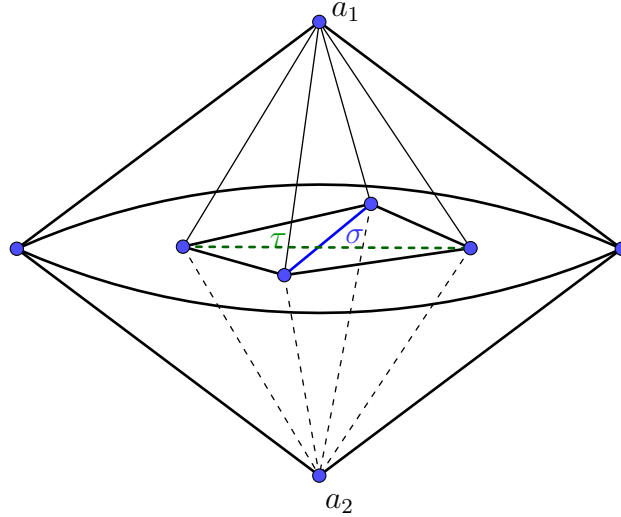


Рис. 3.1: L_β для бизвездного преобразования, связанного с σ и τ

3.1.1 Цикл ξ

Будем обозначать через $C_*(K; \mathbb{Q})$ клеточный цепной комплекс CW-комплекса K с рациональными коэффициентами, а через $Z_*(K, \mathbb{Q})$ пространство циклов, то есть ядро дифференциала. Для комбинаторного многообразия M имеется два естественных клеточных разбиения — исходная триангуляция M и двойственное клеточное разбиение M^* . Соответствующие цепные комплексы $C_*(M; \mathbb{Q})$ и $C_*(M^*; \mathbb{Q})$ конечно же приводят к одним и тем же пространствам гомологий. Для упрощения обозначений дифференциалы всех встречающихся цепных комплексов мы будем обозначать через ∂ .

Для бизвездного преобразования β двумерных комбинаторных сфер введем набор \mathcal{H} одномерных симплициальных цепей $\eta \in C_1(L_\beta; \mathbb{Q})$ с весами, обозначаемыми через $W(\eta)$, по следующим правилам:

- (1) Для каждой вершины $w \in L_1 \cap L_2$, не участвующей в преобразовании β , включим в набор \mathcal{H} цепь $\eta = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом $W(\eta) = W_{L_1}(w) = W_{L_2}(w)$;
- (2) Для каждой вершины $w \in \sigma \cap L_2$ включим в набор \mathcal{H} цепь $\eta = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом $W(\eta) = W_{L_2}(w) (\neq W_{L_1}(w))$;
- (3) Для каждой вершины $w \in \tau \cap L_1$ включим в набор \mathcal{H} цепь $\eta = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом $W(\eta) = W_{L_1}(w) (\neq W_{L_2}(w))$;

- (4) Для каждой пары вершин $w_1 \in \sigma$, $w_2 \in \tau$ включим в набор \mathcal{H} цепь $\eta = [a_1, w_1] + [w_1, w_2] + [w_2, a_2]$ с весом $W(\eta) = -1/12$, если σ и τ – рёбра, и $W(\eta) = 1/6$, если σ или τ – вершина.

Отметим, что для каждой цепи $\eta \in \mathcal{H}$ выполнено, что $\partial\eta = a_2 - a_1$.

Вес $W(\eta)$ отражает перенос вклада конкретной вершины в эйлерову характеристику под действием преобразования β . Если цепь η из набора \mathcal{H} состоит из двух ребер (то есть не переносит вес), то будем ее называть *обычной*. В противном случае будем называть η *специальной*.

Предложение 3.1.1. *Рассмотрим цепь $\sum_{\mathcal{H}} W(\eta)\eta \in C_1(L_\beta; \mathbb{Q})$. Тогда для любой вершины $w \in L_1$ ребро $[a_1, w]$ входит в $\sum_{\mathcal{H}} W(\eta)\eta$ с коэффициентом $W_{L_1}(w)$, а также для любой вершины $w \in L_2$ ребро $[w, a_2]$ входит в $\sum_{\mathcal{H}} W(\eta)\eta$ с коэффициентом $W_{L_2}(w)$.*

Доказательство. Достаточно доказать первую часть предложения в силу симметрии при замене бизвездного преобразования β на обратное. Для вершин L_1 , не участвующих в β , предложение очевидно выполнено. Для остальных вершин разберем случаи отдельно.

- (1) Пусть σ – ребро, $w \in \sigma$, $\tau = [w_1, w_2]$. Тогда $[a_1, w]$ входит в следующие цепи $\eta \in \mathcal{H}$: $\eta_1 = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом $W(\eta_1) = W_{L_2}(w)$, $\eta_2 = [a_1, w] + [w, w_1] + [w_1, a_2]$ и $\eta_3 = [a_1, w] + [w, w_2] + [w_2, a_2]$ с весами $W(\eta_2) = W(\eta_3) = -1/12$. Суммарный коэффициент при $[a_1, w]$ будет равен $W_{L_2}(w) - 1/6 = W_{L_1}(w)$.
- (2) Пусть σ – вершина, $w = \sigma$, $\tau = [w_1, w_2, w_3]$. Тогда $[a_1, w]$ входит в следующие $\eta \in \mathcal{H}$: $\eta_1 = [a_1, w] + [w, w_1] + [w_1, a_2]$, $\eta_2 = [a_1, w] + [w, w_1] + [w_1, a_2]$ и $\eta_3 = [a_1, w] + [w, w_1] + [w_1, a_2]$ с весами $W(\eta_1) = W(\eta_2) = W(\eta_3) = 1/6$. Суммарный коэффициент при $[a_1, w]$ будет равен $1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2 = W_{L_1}(w)$.
- (3) Пусть σ – треугольник, $w \in \sigma$. Тогда $[a_1, w]$ входит в следующие $\eta \in \mathcal{H}$: $\eta_1 = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом $W(\eta_1) = W_{L_2}(w)$, $\eta_2 = [a_1, w] + [w, \tau] + [\tau, a_2]$ с весом $W(\eta_2) = 1/6$. Суммарный коэффициент при $[a_1, w]$ будет равен $W_{L_2}(w) + 1/6 = W_{L_1}(w)$.

(4) Пусть $w \in \tau$. Тогда $[a_1, w]$ входит только в $\eta = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом $W(\eta) = W_{L_1}(w)$, что и требовалось показать.

□

Следствие. $\sum_{\eta \in \mathcal{H}} W(\eta) = 2$.

Рассмотрим теперь цепь $\xi(\beta) \in C_1(L_\beta; \mathbb{Q}) \otimes C_1(L_\beta; \mathbb{Q})$, определяемую по формуле

$$\xi(\beta) = \sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}} W(\eta_1)W(\eta_2)\eta_1 \otimes \eta_2 - 2 \sum_{\eta \in \mathcal{H}} W(\eta)\eta \otimes \eta.$$

Тензорное произведение $C_*(L_\beta; \mathbb{Q}) \otimes C_*(L_\beta; \mathbb{Q})$ является цепным комплексом по отношению к дифференциалу $\partial(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = (\partial\alpha_1) \otimes \alpha_2 + (-1)^{\deg \alpha_1} \alpha_1 \otimes \partial\alpha_2$.

Предложение 3.1.2. *Цепь $\xi(\beta)$ является циклом, то есть $\partial\xi(\beta) = 0$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} \partial\xi &= \sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}} W(\eta_1)W(\eta_2)((a_2 - a_1) \otimes \eta_2 - \eta_1 \otimes (a_2 - a_1)) - \\ &\quad - 2 \sum_{\eta \in \mathcal{H}} W(\eta)((a_2 - a_1) \otimes \eta - \eta \otimes (a_2 - a_1)) = \\ &= \sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}} W(\eta_1)W(\eta_2)(a_2 - a_1) \otimes \eta_2 - \sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}} W(\eta_1)W(\eta_2)\eta_1 \otimes (a_2 - a_1) - \\ &\quad - 2 \sum_{\eta \in \mathcal{H}} W(\eta)((a_2 - a_1) \otimes \eta - \eta \otimes (a_2 - a_1)) = \\ &= \sum_{\eta_2} 2W(\eta_2)(a_2 - a_1) \otimes \eta_2 - \sum_{\eta_1} 2W(\eta_1)\eta_1 \otimes (a_2 - a_1) - \\ &\quad - 2 \sum_{\eta} W(\eta)((a_2 - a_1) \otimes \eta - \eta \otimes (a_2 - a_1)) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что по построению $\xi(\beta^{-1}) = \xi(\beta)$, где β^{-1} — преобразование, обратное к β .

3.1.2 Обобщённый коэффициент зацепления

Определение 3.1.3. Для клеточного комплекса K наделим пространство $C_k(K; \mathbb{Q})$ скалярным произведением, так что k -мерные клетки образуют ортонормированный базис. *Евклидовой нормой* цепи φ будем называть норму

$|\varphi|$ относительно этого скалярного произведения. (Евклидово) минимальной цепью, соединяющей рациональные 0-цепи a и b с одинаковой аугментацией, будем называть рациональную 1-цепь $s_K(b-a)$, минимизирующую евклидову норму среди всех 1-цепей в K с границей $b-a$.

Евклидово минимальная цепь – это канонический (строящийся однозначно по комбинаторному строению комплекса K , то есть инвариантный относительно всех автоморфизмов K) способ выбрать правое обратное отображение к граничному оператору $\partial: C_1(K; \mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{C}_0(K; \mathbb{Q})$. Заметим, что евклидово минимальная цепь однозначно определяется условием $\partial^\dagger s = 0$, где ∂^\dagger – оператор, сопряженный к $\partial: C_2(K; \mathbb{Q}) \longrightarrow C_1(K; \mathbb{Q})$ по отношению к евклидовым скалярным произведениям на $C_1(K, \mathbb{Q})$ и $C_2(K, \mathbb{Q})$.

Пусть L – ориентированная 3-мерная комбинаторная сфера. Определим линейное отображение $\text{Shift}: C_1(L, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_1(L^*, \mathbb{Q})$, где L^* – клеточное разбиение, двойственное триангуляции L . Для произвольного симплекса σ будем обозначать через σ^* двойственную клетку. Кроме того, через S_σ будем обозначать

$$S_\sigma = \frac{1}{|V(\partial\sigma^*)|} \sum_{v \in V(\partial\sigma^*)} v \in C_0(\partial\sigma^*; \mathbb{Q}) \subset C_0(L^*; \mathbb{Q}),$$

где $V(K)$ обозначает множество вершин клеточного комплекса K . Пусть e – ребро симплицального комплекса L , соединяющее вершины a и b .

Определим линейное отображение $\text{Shift}: C_1(L, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_1(L^*, \mathbb{Q})$, где L^* – клеточное разбиение, двойственное триангуляции L . Для произвольного ребра e с границей $\partial e = b - a$

$$\text{Shift}(e) = s_{\partial a^*}(S_e - S_a) + s_{\partial b^*}(S_b - S_e)$$

Евклидово минимальные цепи $s_{\partial a^*}(S_e - S_a)$ и $s_{\partial b^*}(S_b - S_e)$ корректно определены в силу того, что ∂e^* вложена в качестве подкомплекса в ∂a^* и в ∂b^* , а $\text{Shift}(e)$ определено, так как ∂a^* и в ∂b^* являются подкомплексами в L^* .

Заметим, что отображение Shift переводит циклы в циклы, и индуцирует тождественный изоморфизм $H_1(L; \mathbb{Q}) \cong H_1(L^*; \mathbb{Q})$.

Так как одномерные остовы разбиений L и L^* не пересекаются, для каждой пары циклов $\varphi \in Z_1(L; \mathbb{Q})$, $\psi \in Z_1(L^*; \mathbb{Q})$ корректно определён их коэффициент зацепления $\text{lk}(\varphi, \psi) \in \mathbb{Q}$.

Определение 3.1.4. *Обобщенный коэффициент зацепления на ориентированной трёхмерной комбинаторной сфере L определяется как единственное линейное отображение $\tilde{\text{lk}}: Z_1(M; \mathbb{Q}) \otimes Z_1(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ такое, что $\tilde{\text{lk}}(\varphi \otimes \psi) = \text{lk}(\varphi, \text{Shift}(\psi))$.*

3.1.3 Формула

Теорема 3.1.5. *Зададим функцию $f \in \mathcal{T}^4$ индуктивно как*

$$f(L_2) - f(L_1) = \sum_v \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_v)),$$

где L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β , β_v – бизвездное преобразование двумерных сфер, индуцированное β в линке вершины v , а суммирование ведётся по всем вершинам, участвующим в β и присутствующим в L_1 и L_2 . Тогда f корректно определена и является локальной комбинаторной формулой для p_1 .

Таким образом, вычисление первого комбинаторного класса Понтрягина комбинаторного многообразия M сводится к следующим шагам:

1. Для каждого $(n - 4)$ -мерного симплекса σ находим последовательность бизвездных преобразований, соединяющих $\text{link}_M \sigma$ с $\partial\Delta^4$.

$$\text{link}_M \sigma = L_1 \xrightarrow{\beta_1} L_2 \dots \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_k} \partial\Delta^4$$

2. Для каждого бизвездного преобразования β_i в последовательности возьмем вершины v , в линках которых индуцируются бизвездные преобразования $(\beta_i)_v$ ориентированных двумерных комбинаторных сфер, и для каждого такого преобразования посчитаем значение $\tilde{\text{lk}}(\xi((\beta_i)_v))$.

3. Цикл, представляющий класс гомологий, двойственный первому классу Понтрягина, записывается как

$$f_{\sharp}(M) = \sum_{\sigma^{n-4} \in M} \left(\sum_{\beta_i} \sum_v \tilde{\text{lk}}(\xi((\beta_i)_v)) \sigma \right)$$

Замечание 3.1.6. Последовательность бизвездных преобразований, соединяющая трехмерную комбинаторную сферу с границей четырехмерного симплекса существует в силу теоремы Пахнера [44]. Один из способов строить такую последовательность явно – программа BISTELLAR, написанная Ф. Лутцем [19].

3.2 Доказательство теоремы 3.1.5

3.2.1 Порождаемость $C_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ циклами первого типа

Пусть L_1 и L_2 — ориентированные двумерные комбинаторные сферы, $\sigma_1 \in L_1$ и $\sigma_2 \in L_2$ — симплексы такие, что корректно определены бизвёздные преобразования β_{L_1, σ_1} и β_{L_2, σ_2} . Бизвёздные преобразования β_{L_1, σ_1} и β_{L_2, σ_2} называются *изоморфными*, если имеется сохраняющий ориентацию изоморфизм комбинаторных сфер L_1 и L_2 , переводящий симплекс σ_1 в симплекс σ_2 . Бизвёздное преобразование β называется *несущественным*, если оно изоморфно обратному к нему бизвёздному преобразованию β^{-1} .

Рассмотрим граф Γ_2 , вершинами которого являются классы изоморфизма ориентированных двумерных комбинаторных сфер, а ребрами — классы изоморфизма существенных бизвёздных преобразований между ними. (Легко видеть, что граф Γ_2 бесконечен и содержит петли и кратные рёбра.)

Построенную в предыдущем разделе функцию $\beta \mapsto \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta))$ можно рассматривать как клеточный 1-коцикл на графе Γ_2 . Действительно, рассмотрим цепь $a \in C_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$, равную $a = \sum_i k_i \beta_i$. Определим коцепь (являющуюся коциклом в силу тривиальности дифференциала) $h \in C^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ следующим образом:

$$h(a) = \sum_i k_i \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_i)) \quad (3.1)$$

Напомним определения элементарных циклов бизвёздных преобразований двумерных комбинаторных сфер. Пусть в ориентированной двумерной комбинаторной сфере L есть два симплекса σ_1 и σ_2 такие, что

- σ_1 и σ_2 не содержатся в одном двумерном симплексе сферы L ;
- определены бизвёздные преобразования $\beta_1 = \beta_{L, \sigma_1}$ и $\beta_2 = \beta_{L, \sigma_2}$;
- для комбинаторных сфер $L_2 = \beta_2(L)$ и $L_1 = \beta_1(L)$ определены бизвёздные преобразования $\tilde{\beta}_1 = \beta_{L_2, \sigma_1}$ и $\tilde{\beta}_2 = \beta_{L_1, \sigma_2}$ соответственно.

Заметим, что при выполнении этих условий комбинаторные сферы $L_{12} =$

$\beta_2(L_1)$ и $L_{21} = \beta_1(L_2)$ совпадают. Тогда цикл

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\beta_1} & L_1 \\
 \beta_2^{-1} \uparrow & & \downarrow \tilde{\beta}_2 \\
 L_2 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_1^{-1}} & L_{12} = L_{21}
 \end{array} \tag{3.2}$$

мы будем называть *коммутацией* бизвездных преобразований β_1 и β_2 . Циклы в графе Γ_2 , являющиеся коммутациями бизвездных преобразований назовём *элементарными циклами первого типа*. Если в указанном цикле встречаются несущественные преобразования, то их нужно пропустить при построении цикла в Γ_2 .

Предложение 3.2.1. *Абелева группа $Z_1(\Gamma_2; \mathbb{Z})$ всех циклов в графе Γ_2 порождена элементарными циклами первого типа.*

Введем также *элементарные циклы второго типа*, которые определяются как циклы, изображенные на рис. 3.3. Натуральные числа p, q, r, s и t обозначают количество треугольников внутри обозначенных дуг.

Напомним также, что в [8, 10] было конструктивно доказано (см. глава 1), что абелева группа $Z_1(\Gamma_2; \mathbb{Z})$ порождена элементарными циклами первого и второго типа. Доказательство было геометрическим, опирающимся на возможность реализации всякой двумерной комбинаторной сферы в виде границы выпуклого симплицеального многогранника. Таким образом, для доказательства предложения 3.2.1 достаточно показать, что всякий элементарный цикл второго типа представляется в виде линейной комбинации элементарных циклов первого типа.

Для всех циклов второго типа имеется многоугольник (с 3, 4 или 5 сторонами в зависимости от преобразования), ограничивающий две триангуляции двумерного диска, такой что внутри диска D_{in} все двумерные симплексы меняются под действием бизвездных преобразований цикла (см. рис. 3.3), а в диске D_{out} все двумерные симплексы сохраняются. Так как в процессе элементарного цикла второго типа в качестве ребер бывают все диагонали разделяющего многоугольника, то в диске D_{out} эти диагонали отсутствуют. Будем говорить, что триангуляция двумерного замкнутого диска является

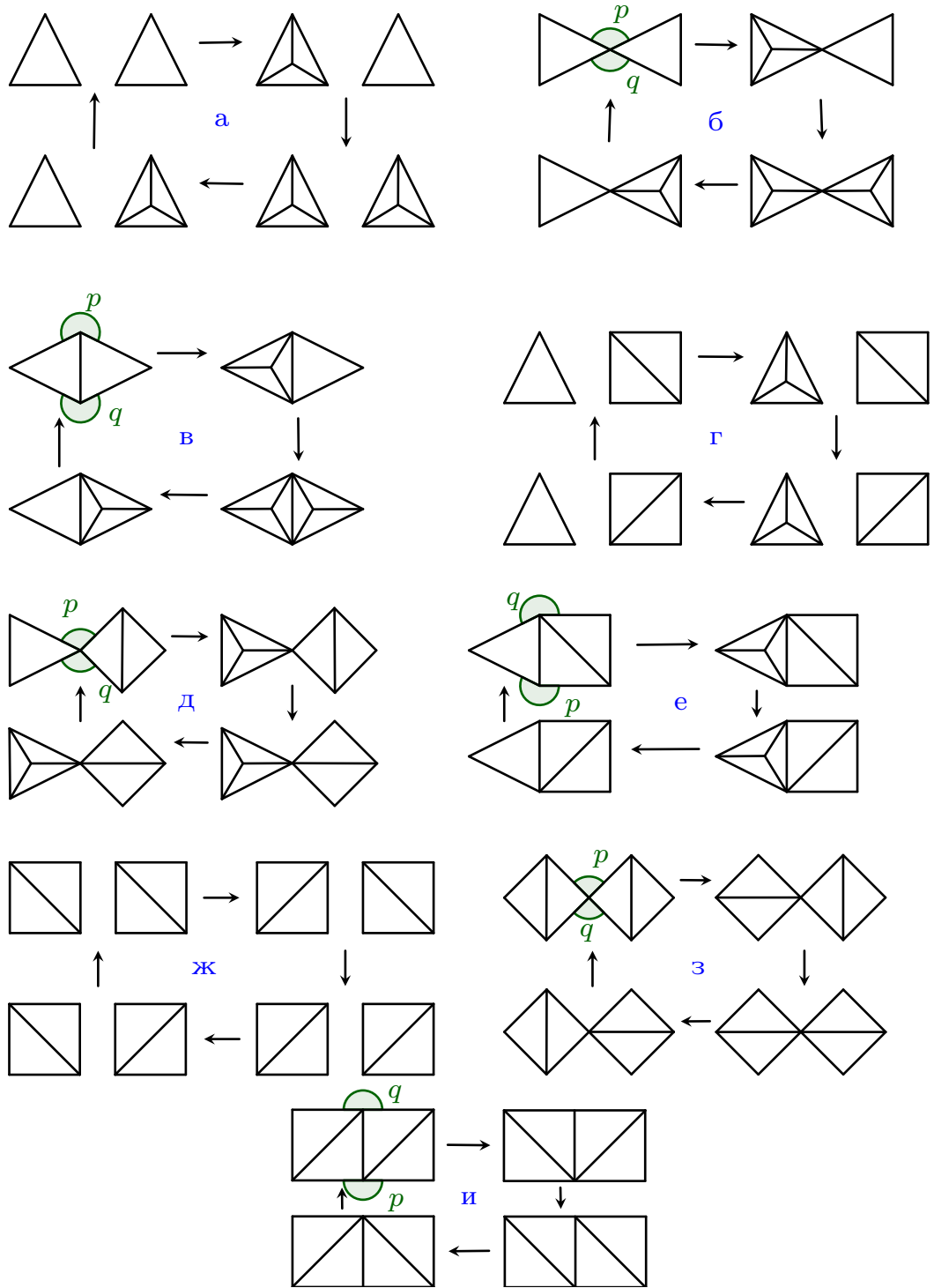


Рис. 3.2: Виды элементарных циклов первого типа

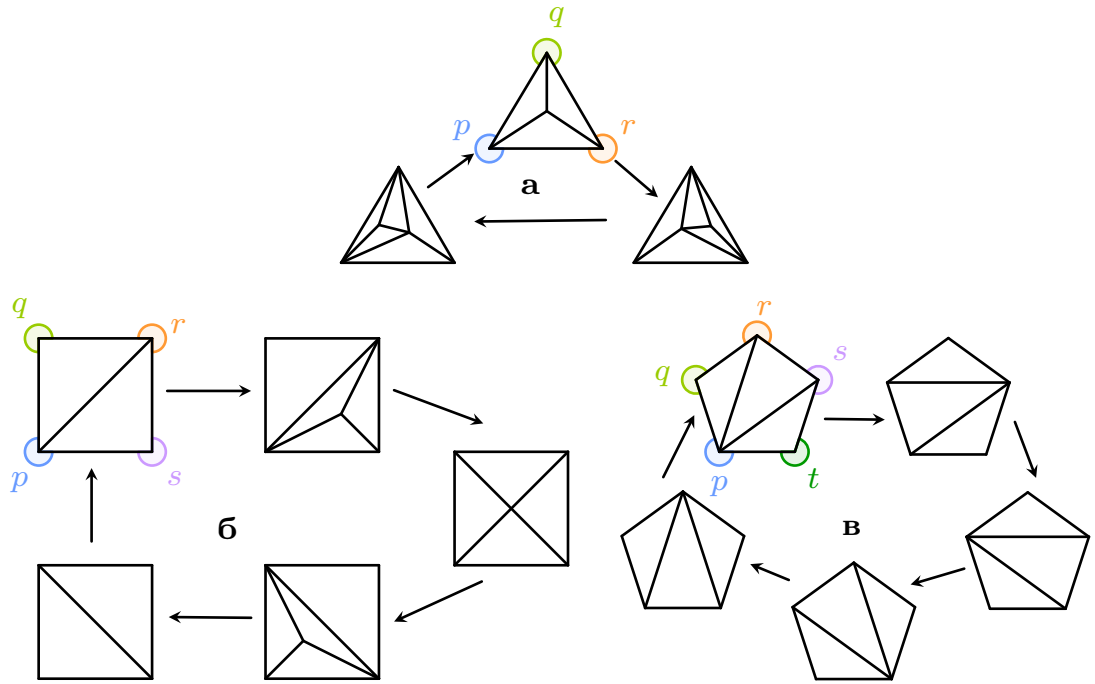


Рис. 3.3: Элементарные циклы второго типа

триангуляцией *без диагоналей*, если диагонали граничного многоугольника не являются ребрами триангуляции.

Докажем вспомогательное утверждение:

Предложение 3.2.2. *Для любой триангуляции K замкнутого двумерного диска без диагоналей существует последовательность бизвездных преобразований, такая что все промежуточные триангуляции диска являются триангуляциями без диагоналей, переводящая триангуляцию K в конус над граничным многоугольником.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции по количеству вершин триангуляции K во внутренней части диска. Базой индукции является случай одной вершины, при котором триангуляция и является конусом над граничным многоугольником. Предположим, что предложение выполнено для триангуляций диска с k вершинами во внутренней части диска, и докажем его в случае $k + 1$ вершины. Рассмотрим произвольную вершину v граничного многоугольника. Если эта вершина имеет степень 3, то максимальный подкомплекс K , не содержащий вершины v , является триангуляцией диска с k внутренними вершинами. По предположению индукции мы можем ее свести

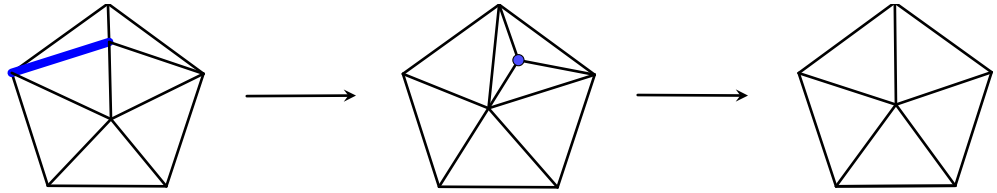


Рис. 3.4: Шаг индукции для предложения 3.2.2

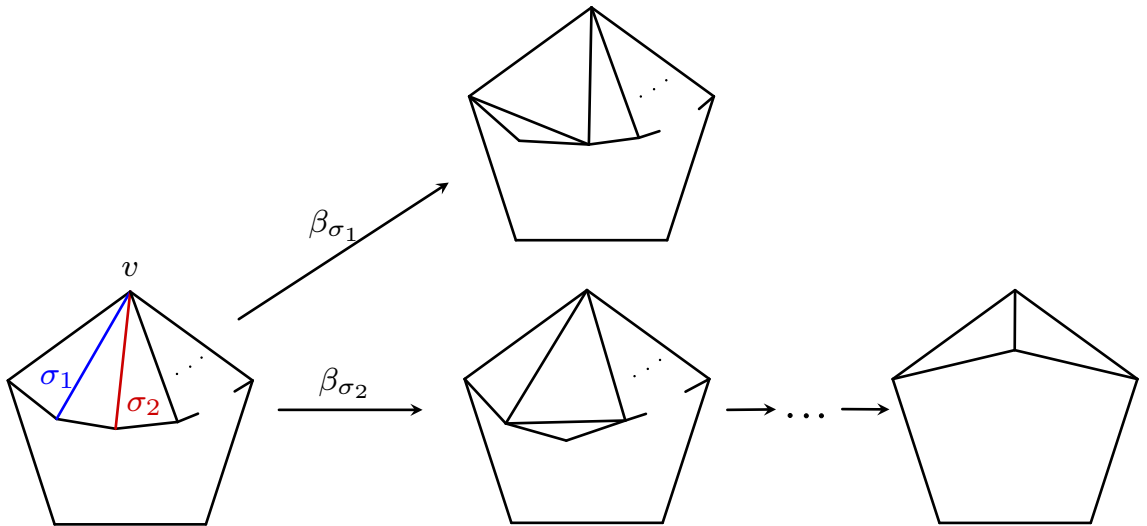


Рис. 3.5: Шаг индукции для предложения 3.2.2

к конусу над граничным многоугольником, и получившуюся триангуляцию исходного диска сведем к конусу как показано на рис. 3.4 (синим отмечены симплексы, по отношению к которым проводятся ассоциированные бизвездные преобразования). Теперь предположим, что степень вершины v больше 3. Выберем ориентацию на диске произвольным образом. Тогда мы можем выбрать два самых левых ребра σ_1 и σ_2 , не являющихся ребрами граничного многоугольника и содержащих v (см. рис. 3.5). Несложно видеть, что хотя бы одно из преобразований β_{K,σ_1} и β_{K,σ_2} будет определено. После применения этого преобразования степень вершины v уменьшится, а количество вершин комплекса не изменится. Последовательно применяя такие преобразования, уменьшим степень вершины v до 3, после чего снова воспользуемся рассуждением в случае степени вершины v , равной трем.

□

Доказательство предложения 3.2.1. Рассмотрим произвольный элементар-

ный цикл второго типа из преобразований $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$. Найдем последовательность бизвездных преобразований $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$, сводящую триангуляцию диска D_{out} к конусу над граничным многоугольником. В силу отсутствия диагоналей во всех промежуточных триангуляциях диска, преобразования $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ можно рассматривать как преобразования на исходной двумерной комбинаторной сфере. Тогда после прибавления элементарных циклов первого типа как коммутаций преобразований β_i и $\hat{\beta}_j$ по всем допустимым i и j цикл $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ перейдет в такой же цикл второго типа с диском D_{out} , являющимся конусом над разделяющим многоугольником. Таким образом, достаточно доказать, что элементарные циклы второго типа с диском D_{out} , являющимся конусом над разделяющим многоугольником, раскладываются в сумму элементарных циклов первого типа.

Проделаем этот шаг явно. В случае цикла второго типа (б) все преобразования распадаются на несущественные (изоморфные своим обратным) и пары взаимно обратных, поэтому в этом случае разложение нулевое.

В случае цикла второго типа (а) добавляя элементарные циклы первого типа можно из диска D_{out} удалить вершину конуса, и D_{out} будет просто треугольником. Тогда верхние преобразования цикла взаимно обратны (см. рис. 3.3), а нижнее — несущественное.

В случае цикла второго типа (в) все преобразования цикла являются в графе Γ_2 одним и тем же ребром (петлей). Пусть в этом преобразовании бизвездное преобразование ассоциировано с ребрами σ и τ . Тогда на него можно смотреть как на нижнее преобразование из цикла второго типа (а) с диском D_{out} , являющимся конусом над разделяющим треугольником, что сводит случай цикла (в) к уже доказанному случаю цикла (а).

□

Нам понадобится выделенный класс с кохомологией графа Γ_2 . Опишем его явно через значения на порождающих пространства циклов $Z_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ — элементарных циклах первого типа, используя определенную ниже функцию ρ с неотрицательными целыми аргументами.

$$\rho(p, q) = \frac{q - p}{(p + q + 2)(p + q + 3)(p + q + 4)}$$

На рис. 3.2 множество всех элементарных циклов первого типа разбито на

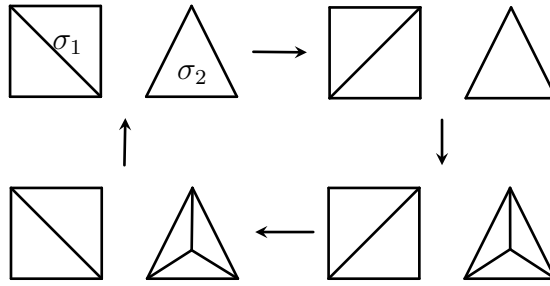


Рис. 3.6: Пример элементарного цикла первого типа бизвездных преобразований

подмножества, определяемые взаимным расположением множеств участвующих вершин, а также вида симплексов, с которыми ассоциированы преобразования, порождающие цикл. Числа p и q обозначают количества треугольников в обозначенных дугах в соответствующей комбинаторной сфере. Тогда значения s определены следующим образом:

Вид цикла	Значение s на цикле
а, г, ж	0
б, д, з	$\rho(p, q)$
в, и	$\rho(0, q) - \rho(0, p)$
е	$\rho(0, q) + \rho(0, p)$

Теорема 3.1 статьи [5], в частности, утверждает следующее:

Предложение 3.2.3. *Пространство всех локальных комбинаторных формул $f \in \mathcal{T}^4$ для первого рационального класса Понтрягина находится во взаимно однозначном соответствии с пространством 1-коциклов графа Γ_2 , представляющих класс когомологий $s \in H^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$.*

Тогда теорема 3.1.5 следует из следующего утверждения:

Предложение 3.2.4. *Коцикл $h \in C^1(\Gamma_2, \mathbb{Q})$ (заданный формулой (3.1)) представляет класс когомологий s .*

Для доказательства предложения 3.2.4 нам понадобится посчитать значение коцикла h на элементарных циклах первого типа.

3.2.2 Четырёхмерная сфера L_{β_1, β_2}

Элементарному циклу первого типа (3.2) сопоставим ориентированную четырёхмерную комбинаторную сферу L_{β_1, β_2} следующим образом. Если β_1 и β_2 — бизвездные преобразования, ассоциированные с одномерными симплексами, то множества вершин двумерных комбинаторных сфер L , L_1 , L_2 и L_{12} естественно отождествляются друг с другом; обозначим это множество вершин через T . Если одно или оба из преобразований β_1 и β_2 ассоциированы с нульмерными или двумерными симплексами, то обозначим через T множество вершин той из двумерных комбинаторных сфер L , L_1 , L_2 и L_{12} , которая содержит наибольшее число вершин; тогда множества вершин остальных трёх комбинаторных сфер естественно отождествляются с подмножествами множества T . Рассмотрим симплициальный комплекс L_{β_1, β_2} на множестве вершин $T \cup \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, состоящий из следующих четырёхмерных симплексов и всех их граней

- $a_1 * b_1 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L ,
- $a_2 * b_1 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L_1 ,
- $a_1 * b_2 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L_2 ,
- $a_2 * b_2 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L_{12} ,
- $b_1 * \sigma_1 * \tau_1$; $b_2 * \sigma_1 * \tau_1$; $a_1 * \sigma_2 * \tau_2$; $a_2 * \sigma_2 * \tau_2$.

Предложение 3.2.5. *Симплициальный комплекс L_{β_1, β_2} является четырёхмерной комбинаторной сферой.*

Доказательство. Обозначим через \tilde{L} двумерную комбинаторную сферу, полученную из комбинаторной сферы L при звездных подразделениях в симплексах σ_1 и σ_2 , то есть при замене подкомплексов $\sigma_1 * \partial\tau_1$ и $\sigma_2 * \partial\tau_2$ (являющихся двумерными дисками) на конусы над их границами $C(\partial\sigma_1 * \partial\tau_1)$ и $C(\partial\sigma_2 * \partial\tau_2)$ соответственно. Покажем, что симплициальный комплекс L_{β_1, β_2} кусочно линейно гомеоморфен двойной надстройке над \tilde{L} .

Комбинаторные сферы L и L_2 содержат подкомплекс $\sigma_1 * \partial\tau_1$, а комбинаторные сферы L_1 и L_{12} — подкомплекс $\partial\sigma_1 * \tau_1$. Поэтому симплициальный

комплекс L_{β_1, β_2} содержит подкомплексы $a_1 * v_i * \sigma_1 * \partial\tau_1$, $i = 1, 2$, и подкомплексы $a_2 * v_i * \partial\sigma_1 * \tau_1$, $i = 1, 2$. Обозначим через D_1 объединение этих четырех подкомплексов и еще двух симплексов $v_i * \sigma_1 * \tau_1$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что D_1 есть надстройка с вершинами b_1 и b_2 над трехмерным комбинаторным диском $(a_1 * \sigma_1 * \partial\tau_1) \cup (a_2 * \partial\sigma_1 * \tau_1) \cup (\sigma_1 * \tau_1)$. В частности, D_1 — четырехмерный комбинаторный диск. Удалим из симплициального комплекса L_{β_1, β_2} диск D_1 и вклеим вместо него конус над его границей, то есть симплициальный комплекс

$$C((a_1 \sqcup a_2) * (b_1 \sqcup b_2) * \partial\sigma_1 * \partial\tau_1) = \Sigma\Sigma C(\partial\sigma_1 * \partial\tau_1)$$

Аналогично, удалим из полученного симплициального комплекса четырехмерный комбинаторный диск

$$D_2 = \Sigma((b_1 * \sigma_2 * \partial\tau_2) \cup (b_2 * \partial\sigma_2 * \tau_2) \cup (\sigma_2 * \tau_2))$$

и вклеим вместо него конус над его границей, изоморфный $\Sigma\Sigma C(\partial\sigma_2 * \partial\tau_2)$. Легко видеть, что в итоге получится двойная надстройка $\Sigma\Sigma\tilde{L}$. Таким образом, комплекс $\Sigma\Sigma\tilde{L}$ получается из L_{β_1, β_2} заменой двух четырехмерных комбинаторных дисков D_1 и D_2 на конусы над их границами. Следовательно, L_{β_1, β_2} кусочно линейно гомеоморфен $\Sigma\Sigma\tilde{L}$. Значит, L_{β_1, β_2} — четырехмерная комбинаторная сфера. \square

Ориентацию на L_{β_1, β_2} введем таким образом, чтобы линк ребра $[a_1, b_1]$ был изоморфен L с сохранением ориентации. Легко видеть, что комбинаторные сферы L_{β_1, β_2} и L_{β_2, β_1} изоморфны с обращением ориентации. По построению $L_{\beta_1} = \text{link}_{b_1} L_{\beta_1, \beta_2}$ и $L_{\beta_2} = \text{link}_{a_1} L_{\beta_1, \beta_2}$ естественно вложены в L_{β_1, β_2} .

3.2.3 Набор двумерных цепей \mathcal{N}

Для пары бизвездных преобразований β_1 и β_2 (ассоциированные с симплексами σ_1 и σ_2), для которых определена коммутация, введем набор \mathcal{N} двумерных цепей $\nu \in C_2(L_{\beta_1, \beta_2}; \mathbb{Q})$ с весами, обозначаемыми через $W(\nu)$, по аналогии с введенным набором \mathcal{H} на L_β .

- (1) Для каждой вершины $w \in V(L)$ включим в набор \mathcal{N} цепь $\nu = [w, a_1, b_1] + [w, b_1, a_2] + [w, a_2, b_2] + [w, b_2, a_1]$ с весом:

- (а) $W(\nu) = W_L(w) = W_{L_1}(w) = W_{L_2}(w) = W_{L_{12}}(w)$, если w не участвует в преобразованиях β_1 и β_2 ;
- (б) $W(\nu) = W_{L_1}(w)$, если $w \in \sigma_1$, $w \in L_1$ и w не участвует в преобразовании β_2 ;
- (в) $W(\nu) = W_{L_2}(w)$, если $w \in \sigma_2$, $w \in L_2$ и w не участвует в преобразовании β_1 ;
- (г) $W(\nu) = W_L(w) = W_{L_2}(w)$, если $w \in \tau_1$, $w \in L$ и w не участвует в преобразовании β_2 ;
- (д) $W(\nu) = W_L(w) = W_{L_1}(w)$, если $w \in \tau_2$, $w \in L$ и w не участвует в преобразовании β_1 ;
- (е) $W(\nu) = W_{L_{12}}(w)$, если $w \in \sigma_1 \cap \sigma_2$;
- (ж) $W(\nu) = W_L(w) (\neq W_{L_1}(w))$, если $w \in \tau_1 \cap \tau_2$;
- (з) $W(\nu) = W_{L_1}(w) (\neq W_L(w))$, если $w \in \sigma_1 \cap \tau_2$;
- (и) $W(\nu) = W_{L_2}(w) (\neq W_L(w))$, если $w \in \tau_1 \cap \sigma_2$;

(2) для каждой пары вершин $w \in \sigma_1$, $\tilde{w} \in \tau_1$ включим в набор \mathcal{N} цепь

$$\nu = [w, a_1, b_1] + [\tilde{w}, w, b_1] + [\tilde{w}, b_1, a_2] + [\tilde{w}, a_2, b_2] + [w, \tilde{w}, b_2] + [w, b_2, a_1]$$

с весом $W(\nu) = -1/12$, если σ_1 и τ_1 – рёбра, и $W(\nu) = 1/6$, если σ_1 или τ_1 – вершина;

(3) для каждой пары вершин $w \in \sigma_2$, $\tilde{w} \in \tau_2$ включим в набор \mathcal{N} цепь

$$\nu = [w, a_1, b_1] + [w, b_1, a_2] + [w, \tilde{w}, a_1] + [\tilde{w}, w, a_2] + [\tilde{w}, b_2, a_1] + [\tilde{w}, a_2, b_2]$$

с весом $W(\nu) = -1/12$, если σ_1 и τ_1 – рёбра, и $W(\nu) = 1/6$, если σ_1 или τ_1 – вершина.

Заметим, что $\sum_{\nu} W(\nu) = 2$, по аналогии с трехмерным случаем.

Определим $\zeta \in C_2(L_{\beta_1, \beta_2}) \otimes C_2(L_{\beta_1, \beta_2})$ как

$$\zeta = \sum_{\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{N}} W(\nu_1)W(\nu_2) \nu_1 \otimes \nu_2 - 2 \sum_{\nu \in \mathcal{N}} W(\nu) \nu \otimes \nu.$$

Аналогично трехмерному случаю, ζ является циклом в $C_2(L_{\beta_1, \beta_2}) \otimes C_2(L_{\beta_1, \beta_2})$ по отношению к дифференциалу $\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$.

Для всякого комбинаторного многообразия M и его вершины v определим оператор $\iota_v: C_*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow C_*(\text{link}_M(v); \mathbb{Q})$ следующим образом: если симплекс σ в M содержит вершину v (то есть $\sigma = v * \tau$), то $\iota_v(\sigma) = \tau$, в противном случае $\iota_v(\sigma) = 0$. Заметим, что ι_v переводит циклы в циклы. ι_v на элементе тензорного произведения $C_*(M; \mathbb{Q}) \otimes C_*(M; \mathbb{Q})$ определим на образующих $\iota_v(\varphi \otimes \psi) = \iota_v(\varphi) \otimes \iota_v(\psi)$.

Непосредственно из определения набора \mathcal{N} и из изоморфизмов

$$\begin{aligned} \text{link}_{L_{\beta_1, \beta_2}} a_1 &\cong L_{\beta_2}, & \text{link}_{L_{\beta_1, \beta_2}} a_2 &\cong \overline{(L_1)_{\tilde{\beta}_2}} \\ \text{link}_{L_{\beta_1, \beta_2}} b_1 &\cong L_{\beta_1}, & \text{link}_{L_{\beta_1, \beta_2}} b_2 &\cong \overline{(L_2)_{\tilde{\beta}_1}} \end{aligned}$$

(где \bar{L} обозначает обращение ориентации на комбинаторной сфере L) следует лемма:

Лемма 3.2.6. *Цепи $\iota_{a_1}\zeta$ и $\xi(\beta_2)$ совпадают. Аналогично, $\iota_{a_2}\zeta = \xi(\tilde{\beta}_2)$, $\iota_{b_1}\zeta = \xi(\beta_1)$, $\iota_{b_2}\zeta = \xi(\tilde{\beta}_1)$.*

Для 2-циклов в четырехмерной сфере M корректно определено значение формы пересечений на них. Форму пересечений на M можно аддитивно продолжить до функции $\cap: Z_2(M; \mathbb{Q}) \otimes Z_2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$. В частности, тогда корректно определено значение $\cap(\zeta)$.

Классическим утверждением про связь коэффициента зацепления и формы пересечений является следующее:

Предложение 3.2.7. *Пусть M – четырехмерное комбинаторное многообразие, а $\varphi, \psi \in Z_2(M; \mathbb{Q})$ – симплицальные 2-циклы, носители которых пересекаются только по вершинам. Тогда алгебраическое число пересечения $\varphi \cap \psi$ равно сумме коэффициентов зацепления 1-цепей $\text{lk}(\iota_v\varphi, \iota_v\psi)$ по всем вершинам v комбинаторного многообразия M .*

Мы докажем более общий вариант последнего предложения, показывающий связь формы пересечений с обобщенным коэффициентом зацепления.

Предложение 3.2.8. *Пусть M – четырехмерное комбинаторное многообразие, а $\varphi, \psi \in Z_2(M; \mathbb{Q})$ – произвольные симплицальные 2-циклы. Тогда алгебраическое число пересечения $\varphi \cap \psi$ равно сумме обобщенных коэффициентов зацепления 1-цепей $\tilde{\text{lk}}(\iota_v\varphi \otimes \iota_v\psi)$ по всем вершинам v комбинаторного многообразия M .*

Доказательство. Доказательство предложения будет устроено следующим образом: мы докажем, что цепь ψ можно заменить на гомологичную ей, однако пересекающуюся с φ исключительно по вершинам, а затем применим предыдущее предложение 3.2.7.

Пусть M — произвольное комбинаторное многообразие. Тогда его барицентрическое подразделение M' является одновременно измельчением исходной триангуляции M и двойственного к ней клеточного разбиения M^* . Это стандартным образом даёт цепные отображения $j: C_*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow C_*(M'; \mathbb{Q})$ и $k: C_*(M^*; \mathbb{Q}) \rightarrow C_*(M'; \mathbb{Q})$, индуцирующие тождественный изоморфизм в гомологиях.

Напомним определение 3.1.2.

Определение. Для произвольного симплекса σ комбинаторного многообразия M определим цепь S_σ как

$$S_\sigma = \frac{1}{|V(\partial\sigma^*)|} \sum_{v \in V(\partial\sigma^*)} v \in C_0(\partial\sigma^*; \mathbb{Q}) \subset C_0(L^*; \mathbb{Q})$$

Определим также джойн двух цепей $\alpha \in C_k(M; \mathbb{Q})$ и $\beta \in C_l(M; \mathbb{Q})$ многообразия M . Для произвольных симплексов σ^k и τ^l в M их джойн корректно определен в M , если $\sigma * \tau$ является симплексом многообразия M . Аналогично, $\alpha * \beta$ определяется как частичная билинейная операция на $C_k(M; \mathbb{Q}) \times C_l(M; \mathbb{Q})$, такая что $\alpha * \beta$ можно представить в виде $\alpha * \beta = \sum \gamma_i \sigma_i * \tau_i$, где все джойны $\sigma_i * \tau_i$ корректно определены.

Для произвольного ориентированного двумерного симплекса σ многообразия M рассмотрим цепь $\tilde{\sigma} = j(\partial\sigma) * kS_\sigma$ как двумерную цепь в M' . Пусть $\psi = \sum_i r_i \sigma_i$. Образует новую цепь $\tilde{\psi} = \sum_i r_i \tilde{\sigma}_i$. Легко проверить, что $\tilde{\psi}$ является циклом в комплексе M' , причем гомологичным циклу $j\psi$. Поэтому $\varphi \cap \psi = \varphi \cap j\psi = \varphi \cap \tilde{\psi}$. При этом выполнено, что носители φ и $\tilde{\psi}$ пересекаются только по ребрам комплекса M' .

Для всякого ребра e ориентированного двумерного симплекса σ многообразия M выберем согласованную ориентацию. Для всякого σ будем обозначать $\tilde{\tilde{\sigma}} = \sum_{e \subset \sigma} j\partial e * kS_{\partial e^*} (S_\sigma - S_e)$. Аналогично предыдущему шагу, $\tilde{\tilde{\psi}} = \sum_i r_i \tilde{\tilde{\sigma}}_i$ является 2-цепью, гомологичной $\tilde{\psi}$ и ψ . При этом носители цепей φ и $\tilde{\tilde{\psi}}$ пересекаются только по набору вершин многообразия M .

При естественном отождествлении $(\text{link}_M v)' \cong \text{link}_{M'} v$ цепь $\text{Shift}(\psi)$ переходит в цепь $\iota_v \widetilde{\psi}$. Поэтому

$$\varphi \cap \psi = j\varphi \cap \widetilde{\psi} = \sum_{v \in M} \text{lk}(\iota_v j\varphi, \iota_v \widetilde{\psi}) = \sum_{v \in M} \text{lk}(\iota_v \varphi, \text{Shift}(\psi)) = \sum_{v \in M} \widetilde{\text{lk}}(\iota_v \varphi \otimes \iota_v \psi),$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 3.2.9. *Значение $\cap(\zeta)$ в L_{β_1, β_2} равно сумме обобщенных коэффициентов зацепления одномерных ограничений $\iota_v(\zeta)$ цепи ζ в линках всех вершин v комплекса L_{β_1, β_2} .*

Доказательство. Разложим цикл ζ в сумму тензорных произведений одномерных циклов $\zeta = \sum \varphi_i \otimes \psi_i$, где $\varphi_i, \psi_i \in Z_1(L_{\beta_1, \beta_2})$. Тогда

$$\cap(\zeta) = \sum_i \varphi_i \cap \psi_i = \sum_i \sum_{v \in L_{\beta_1, \beta_2}} \widetilde{\text{lk}}(\iota_v \varphi_i \otimes \iota_v \psi_i) = \sum_{v \in L_{\beta_1, \beta_2}} \widetilde{\text{lk}}(\iota_v \zeta),$$

где второе равенство выполнено в силу предыдущей леммы. □

Теперь посчитаем значения обобщенного коэффициента зацепления циклов $\iota_w(\zeta)$ в линках вершин w комбинаторной сферы L_{β_1, β_2} .

Лемма 3.2.10. *Пусть вершина w комплекса L_{β_1, β_2} не участвует хотя бы в одном из преобразований β_1 и β_2 , а также не является ни одной из вершин a_1, a_2, b_1 или b_2 . Тогда линк $\text{link}_{L_{\beta_1, \beta_2}} w$ допускает симплициальную инволюцию, обращающую ориентацию, такую что цепь $\iota_w \zeta$ инвариантна под действием этой инволюции.*

Доказательство. В случае, когда w не участвует ни в одном из бизвездных преобразований, $\text{link } w$ является двойной надстройкой над $\text{link}_L w$, так что утверждение леммы очевидно. В случае, когда w участвует ровно в одном преобразовании (без ограничения общности, первом), то $\text{link } w$ является надстройкой с вершинами b_1 и b_2 , так что инволюция снова существует. □

Заметим, что обобщенный коэффициент зацепления обращает знак при обращении ориентации объемлющего многообразия. Поэтому если многообразии допускает инволюцию, обращающую ориентацию, то обобщенный коэффициент зацепления всякой инвариантной под действием инволюции 1-цепи равен нулю. В частности, для всякой вершины w комбинаторной сферы

L_{β_1, β_2} , удовлетворяющей условиям леммы 3.2.10, обобщенный коэффициент зацепления обращается в 0 на 1-цепях $\iota_w \zeta$.

Вершин, участвующих в двух преобразованиях, может быть либо 1, либо 2, соединенных ребром (см. рис. 3.7), либо не быть. Синим на рис. 3.7 отмечены вершины, участвующие ровно в одном преобразовании, красным – в обоих. Для наглядности симплексы σ и τ на рисунках не изображены.

Лемма 3.2.11. Пусть L – трехмерная комбинаторная сфера, $\kappa \in Z_1(L; \mathbb{Q}) \otimes Z_1(L; \mathbb{Q})$. Пусть на сфере L существует инволюция A , обращающая ориентацию на L , такая что $A_*(\kappa) = \kappa$. Тогда $\tilde{\text{lk}}(\kappa) = 0$.

Лемма 3.2.12. Сумма значений обобщенных коэффициентов зацепления цепей $\iota_{a_1} \zeta$, $\iota_{a_2} \zeta$, $\iota_{b_1} \zeta$ и $\iota_{b_2} \zeta$ равна значению h на цикле коммутирующих бизвездных преобразований.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{\text{lk}}(\iota_{a_1} \zeta) + \tilde{\text{lk}}(\iota_{a_2} \zeta) + \tilde{\text{lk}}(\iota_{b_1} \zeta) + \tilde{\text{lk}}(\iota_{b_2} \zeta) &= \\ &= \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_1)) + \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_2)) + \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_1^{-1})) + \tilde{\text{lk}}(\xi(\beta_2^{-1})) = \\ &= h(\beta_1 + \beta_2 + \beta_1^{-1} + \beta_2^{-1}). \end{aligned}$$

□

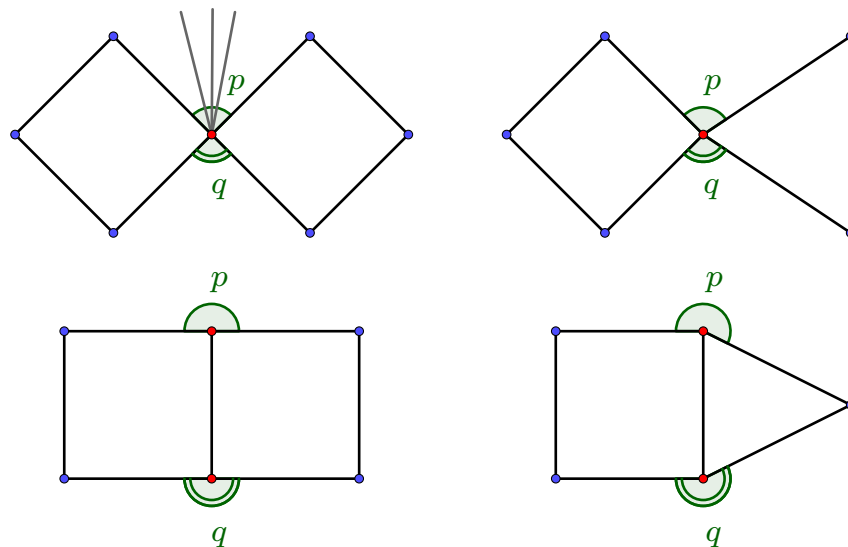


Рис. 3.7: Бизвездные преобразования с пересекающимися наборами участвующих вершин

Форма пересечений на 4-мерной комбинаторной сфере L_{β_1, β_2} нулевая в силу отсутствия двумерных гомологий. Таким образом,

$$h(\beta_1 + \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_1^{-1} + \beta_2^{-1}) = \tilde{\text{lk}}(\iota_{a_1}\zeta) + \tilde{\text{lk}}(\iota_{b_1}\zeta) + \tilde{\text{lk}}(\iota_{a_2}\zeta) + \tilde{\text{lk}}(\iota_{b_2}\zeta) = - \sum_{w \in T} \tilde{\text{lk}}(\iota_w\zeta),$$

где суммирование достаточно вести по вершинам w , участвующим в обоих бизвездных преобразованиях β_1 и β_2 в силу лемм 3.2.10 и 3.2.11. Таким образом, сразу получается, что если множества участвующих в β_1 и в β_2 вершин не пересекаются, то $h(\beta_1 + \tilde{\beta}_2^{-1} + \tilde{\beta}_1 + \beta_2^{-1}) = 0$.

3.2.4 Трехмерная сфера $L_{p,q}$

Рассмотрим пару коммутирующих бизвездных преобразований β_1 и β_2 с одной общей участвующей вершиной w . Тогда легко видеть, что $\text{link}_{L_{\beta_1, \beta_2}} w$ зависит только от чисел p и q (см. рис. 3.7), но не от типов преобразований β_1 и β_2 . При фиксированных p и q мы будем обозначать эту трехмерную комбинаторную сферу $L_{p,q}$. На рис. 3.8 изображена часть сферы $L_{p,q}$ без вершины b_1 . $L_{p,q}$ получается из нарисованного взятием конуса с вершиной b_1 над внешней границей. Более того, если бизвездные преобразования β_1 и β_2 имеют две общих участвующих вершины w_1 и w_2 (w_1 со стороны p примыкающих треугольников, и w_2 со стороны q примыкающих треугольников), то линки w_1 и w_2 будут сферами $L_{p,0}$ и $L_{0,q}$ соответственно.

Несмотря на совпадение линков, подсчет коэффициента зацепления различен для разных пар типов бизвездных преобразований β_1 и β_2 , так как различаются наборы $\iota_w \mathcal{N}$. При этом общий подсчет значения h на цикле коммутирующих бизвездных преобразований свелся к вычислению обобщенных коэффициентов зацепления некоторых циклов в фиксированном наборе трехмерных комбинаторных сфер $L_{p,q}$.

Пусть L – ориентированная трехмерная комбинаторная сфера. Будем называть *тройкой* (e_1, v, e_2) в L набор из двух ребер e_1 и e_2 с общей вершиной v .

Определение 3.2.13. Пусть L – ориентированная трехмерная комбинаторная сфера, (e_1, v, e_2) – тройка из двух ребер e_1, e_2 , и их общей вершины v , принадлежащих L . Будем говорить, что тройка (e_1, v, e_2) *антиизоморфна* тройке

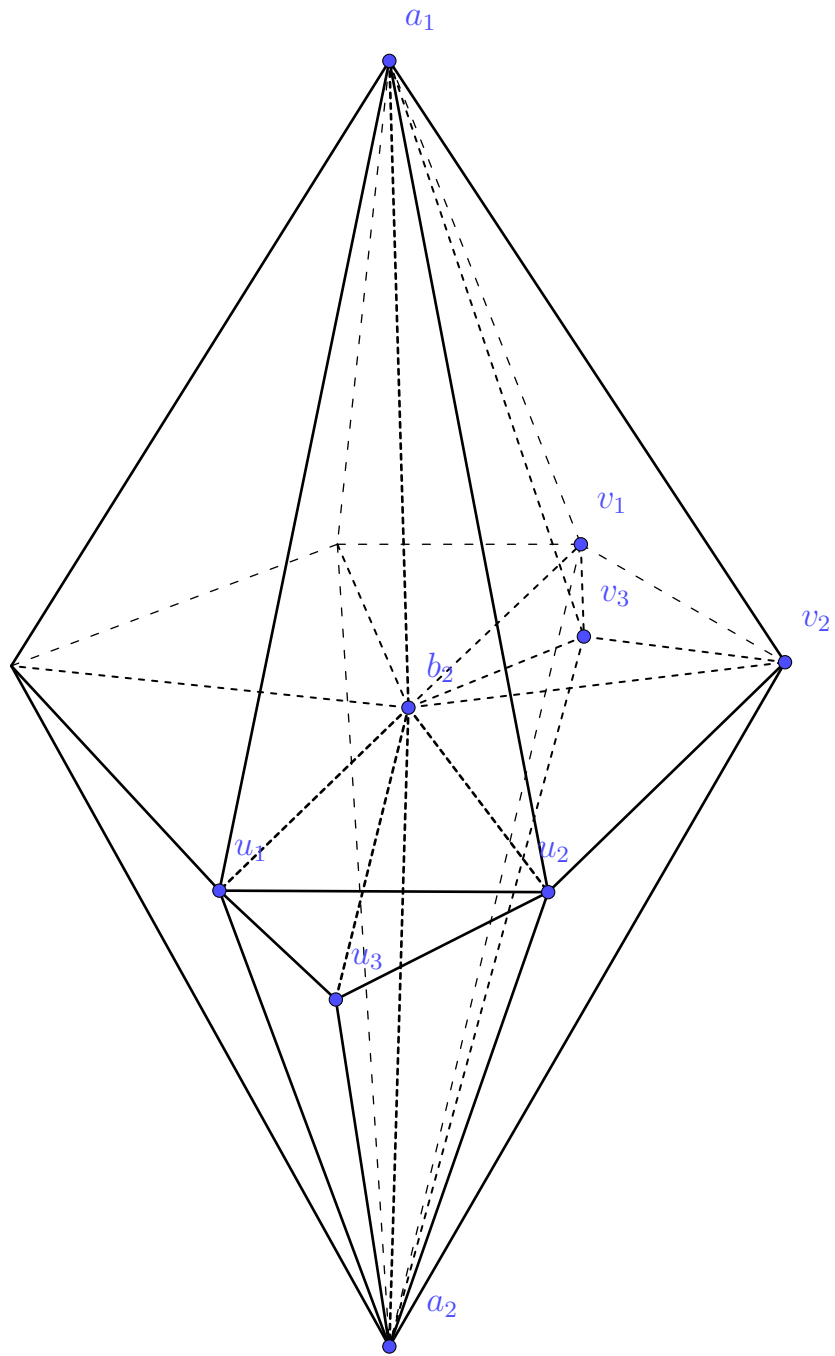


Рис. 3.8: Трехмерная сфера L_{pq} ($p = 3, q = 1$) с точкой b_1 на бесконечности

(f_1, u, f_2) в комбинаторной сфере L , если существует обращающий ориентацию изоморфизм клеточных комплексов $F: v^* \rightarrow u^*$, такой что $F(e_1^*) = f_1^*$ и $F(e_2^*) = f_2^*$. Мы также будем говорить, что тройка (e_1, v, e_2) допускает *антиавтоморфизм*, если существует антиизоморфизм ее в себя.

Определение 3.2.14. *Простым циклом* $\gamma \in Z_1(L; \mathbb{Z})$ будем называть цикл $\gamma = \sum_i e_i$ (где e_i попарно различны) со связным носителем, такой что всякая вершина v либо встречается в границе двух различных e_i с разными знаками, либо не встречается в границе e_i .

Пусть $\gamma \in Z_1(L; \mathbb{Z})$ – простой цикл в L . Пусть ребра e_1 и e_2 с общей вершиной v лежат в носителе γ . На e_1 и e_2 можно ввести естественную ориентацию так, чтобы вершина v была концом e_1 и началом e_2 . Тогда будем говорить, что тройка (e_1, v, e_2) лежит в носителе γ , если естественная ориентация на e_1 и e_2 совпадает с индуцированной с γ . Множество троек для простого цикла γ будем обозначать через T_γ . Множество T_γ отождествляется с множеством вершин в носителе γ , и в дальнейшем мы будем опускать это отождествление там, где это не вызывает противоречий.

Будем обозначать границу двойственной клетки симплекса σ в L через $\lambda(\sigma) = \partial\sigma^*$, а ее барицентрическое подразбиение через $\lambda'(\sigma) = (\partial\sigma^*)'$. $\lambda'(\sigma)$ естественно вложено в барицентрическое подразбиение L' .

Для каждой тройки (e_1, v, e_2) в носителе простого цикла γ обозначим через γ_v цепь из двух полуребер \tilde{e}_1 и \tilde{e}_2 (ребер e_1 и e_2 соответственно) в L' с общей вершиной v .

Лемма 3.2.15. *Следующие тройки антиизоморфны:*

Тройка 1	Тройка 2
$([a_1, v_1], v_1, [v_1, a_2])$	$([a_1, v_2], v_2, [v_2, a_2])$
$([b_1, u_1], u_1, [u_1, b_2])$	$([b_1, u_2], u_2, [u_2, b_2])$

Следующие тройки допускают антиавтоморфизм:

Тройка	Симплекс с неподвижным барицентром
$([a_1, v_3], v_3, [v_3, a_2])$	$[v_3, b_2]$
$([b_1, u_3], u_3, [u_3, b_2])$	$[u_3, a_2]$
$([a_1, b_1], b_1, [b_1, a_2])$	$[b_1, u_1, u_2]$
$([b_1, a_2], a_2, [a_2, b_2])$	$[a_2, v_1, v_2]$
$([a_2, b_2], b_2, [b_2, a_1])$	$[b_2, u_3]$
$([b_2, a_1], a_1, [a_1, a_2])$	$[a_1, v_3]$

Пусть A – симплициальный комплекс, B и C – симплициальные подкомплексы в A .

Определение 3.2.16. Будем называть рациональным путем из B в C такую 1-цепь $\alpha_A \in C_1(A; \mathbb{Q})$ вместе с двумя зафиксированными 0-цепями $\alpha_B \in C_0(B; \mathbb{Q})$ и $\alpha_C \in C_0(C; \mathbb{Q})$, что $\epsilon(\alpha_B) = \epsilon(\alpha_C) = 1$, где ϵ – отображение аугментации, и $\partial\alpha_A = \alpha_C - \alpha_B$. Цепи α_B и α_C будем называть началом и концом рационального пути α_A соответственно.

Предложение 3.2.17. Пусть L – трехмерная комбинаторная сфера, $\gamma \in Z_1(L; \mathbb{Z})$ – простой цикл. Предположим, что существует некоторая инволюция $\mathcal{F}_\gamma: T_\gamma \rightarrow T_\gamma$, такая что между тройками $(e_1, v, e_2) \in T_\gamma$ и $\mathcal{F}_\gamma(e_1, v, e_2) \in T_\gamma$ имеется антиизоморфизм F_v . Предположим также, что в комплексе $\lambda'(v)$ указан рациональный путь $\alpha_v \in C_1(\lambda'(v); \mathbb{Q})$ из $\lambda'(e_1)$ в $\lambda'(e_2)$, такой что $F_v(\alpha_v) = \alpha_{\mathcal{F}_\gamma(v)}$. Начало и конец α_v будем обозначать через α_{v, e_1} и α_{v, e_2} соответственно.

Рассмотрим цикл $\hat{\gamma}$, получаемый как сумма по всем вершинам, через которые проходит γ , цепей α_v и по всем ориентированным ребрам $e = [v_1, v_2]$ в носителе γ цепей $s_{\lambda(e)}(\alpha_{v_2, e} - \alpha_{v_1, e})$:

$$\hat{\gamma} = \sum_{v \in \text{supp } \gamma} \alpha_v + \sum_{e \in \text{supp } \gamma} s_{\lambda(e)}(\alpha_{v_2, e} - \alpha_{v_1, e}).$$

Тогда $\tilde{\text{lk}}(\gamma \otimes \gamma) = \text{lk}(\gamma \otimes \hat{\gamma})$.

Замечание 3.2.18. Инволюция \mathcal{F}_γ не обязана действовать на множестве T_γ свободно.

Доказательство. Согласно определению обобщенного коэффициента зацепления,

$$\tilde{\text{lk}}(\gamma \otimes \gamma) = \text{lk}(\gamma, \text{Shift}(\gamma)).$$

Мы покажем, что $\text{lk}(\gamma, \text{Shift}(\gamma)) = \text{lk}(\gamma, \hat{\gamma})$.

Пусть (e_1, v, e_2) – неподвижная точка инволюции \mathcal{F} . Тогда F_v – антиавтоморфизм.

$$\text{Shift}(\gamma) = \sum_{e \in \text{supp}(\gamma), \partial e = b - a} (s_{\partial a^*}(S_e - S_a) + s_{\partial b^*}(S_b - S_e)) = \sum_{(e_1, v, e_2) \in \text{supp}(\gamma)} s_{\partial v^*}(S_{e_2} - S_{e_1})$$

По определению $\hat{\gamma}$,

$$\hat{\gamma} = \sum_{(e_1, v, e_2) \in \text{supp} \gamma} (s_{\partial e_2^*}(S_{e_2} - \alpha_{v, e_2}) + \alpha_v + s_{\partial e_1^*}(\alpha_{v, e_1} - S_{e_1}))$$

Для произвольной тройки (e_1, v, e_2) из носителя γ рассмотрим следующий цикл

$$\Delta(e_1, v, e_2) = (s_{\partial e_2^*}(S_{e_2} - x_1) + \alpha_v + s_{\partial e_1^*}(x_2 - S_{e_1})) - s_{\partial v^*}(S_{e_2} - S_{e_1}),$$

являющийся слагаемым, соответствующим (e_1, v, e_2) в разности $\hat{\gamma} - \text{Shift}(\gamma)$.

Рассмотрим трехмерный комбинаторный диск v^* . Тогда $\text{lk}_{v^*}(\gamma_v, \Delta(e_1, v, e_2)) = 0$, так как цикл $\Delta(e_1, v, e_2)$ инвариантен под действием антиавтоморфизма F_v и удовлетворяет условиям леммы 4. Здесь коэффициент зацепления lk_{v^*} берется в трехмерном диске v^* как коэффициент зацепления цикла $\Delta(e_1, v, e_2) \in Z_1((v^*)'; \mathbb{Q})$ и относительного цикла $\gamma_v \in Z_1((v^*)', \mathcal{X}(v); \mathbb{Q})$.

Пусть теперь F_v – антиизоморфизм с другой тройкой $(f_1, u, f_2) \in T_\gamma$. Так как $(F_v)_*(\Delta(e_1, v, e_2)) = \Delta(f_1, u, f_2)$, то выполнено равенство коэффициентов зацепления в трехмерном диске

$$\text{lk}_{v^*}(\gamma_v, \Delta(e_1, v, e_2)) = -\text{lk}_{u^*}(\gamma_u, \Delta(f_1, u, f_2)).$$

Таким образом,

$$\text{lk}(\gamma, \text{Shift}(\gamma) - \hat{\gamma}) = \sum_{(e_1, v, e_2) \in \text{supp} \gamma} \text{lk}_{v^*}(\gamma_v, \Delta(e_1, v, e_2)) = 0.$$

$$\tilde{\text{lk}}(\gamma \otimes \gamma) = \text{lk}(\gamma, \text{Shift}(\gamma)) = \text{lk}(\gamma, \text{Shift}(\gamma) - \hat{\gamma}) + \text{lk}(\gamma, \hat{\gamma}) = \text{lk}(\gamma, \hat{\gamma}),$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 3.2.17 позволяет упрощать вычисления обобщенного коэффициента зацепления простого цикла с собой. Вместо того, чтобы считать евклидово минимальные пути для каждого ребра, достаточно найти неподвижные под действием антиавтоморфизма пути в границе двойственной клетки каждой вершины, склеить эти пути в цикл $\hat{\gamma}$, не пересекающийся с γ , и посчитать настоящий геометрический коэффициент зацепления $\text{lk}(\gamma, \hat{\gamma})$.

Нам понадобится аналогичное утверждение для семейства простых путей в L .

Предложение 3.2.19. Пусть L – трехмерная комбинаторная сфера, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in Z_1(L; \mathbb{Z})$ – простые пути в L . Предположим, что существует инволюция $\mathcal{F}_{\gamma_1, \dots, \gamma_k}: T_{\gamma_1} \sqcup T_{\gamma_2} \sqcup \dots \sqcup T_{\gamma_k} \longrightarrow T_{\gamma_1} \sqcup T_{\gamma_2} \sqcup \dots \sqcup T_{\gamma_k}$, такая что между тройками $(e_1, v, e_2) \in T_{\gamma_1} \sqcup \dots \sqcup T_{\gamma_k}$ и $\mathcal{F}_{\gamma_1, \dots, \gamma_k}(e_1, v, e_2)$ имеется антиизоморфизм F_v .

Предположим также, что в комплексе $\lambda'(v)$ указан рациональный путь $\alpha_v \in C_1(\lambda'(v); \mathbb{Q})$ из $\lambda'(e_1)$ в $\lambda'(e_2)$, такой что $F_v(\alpha_v) = \alpha_{\mathcal{F}_{\gamma_1, \dots, \gamma_k}(v)}$. Начало и конец α_v будем обозначать через α_{v, e_1} и α_{v, e_2} соответственно.

Рассмотрим цикл $\hat{\gamma}_i$, получаемый как сумма по всем вершинам в носителе γ_i , цепей α_v и по всем ориентированным ребрам $e = [v_1, v_2]$ в носителе γ_i цепей $s_{\lambda(e)}(\alpha_{v_2, e} - \alpha_{v_1, e})$:

$$\hat{\gamma}_i = \sum_{v \in \text{supp } \gamma_i} \alpha_v + \sum_{e \in \text{supp } \gamma_i} s_{\lambda(e)}(\alpha_{v_2, e} - \alpha_{v_1, e}).$$

Тогда $\tilde{\text{lk}}(\gamma_1 \otimes \gamma_1) + \tilde{\text{lk}}(\gamma_2 \otimes \gamma_2) + \dots + \tilde{\text{lk}}(\gamma_k \otimes \gamma_k) = \text{lk}(\gamma_1, \hat{\gamma}_1) + \text{lk}(\gamma_2, \hat{\gamma}_2) + \dots + \text{lk}(\gamma_k, \hat{\gamma}_k)$.

Замечание 3.2.20. Циклы $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ могут иметь пересекающиеся носители. Если носители циклов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ не пересекаются, то $\tilde{\text{lk}}(\gamma_i \otimes \gamma_j) = \text{lk}(\gamma_i, \hat{\gamma}_j)$, поэтому

$$\tilde{\text{lk}}((\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k) \otimes (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k)) = \text{lk}(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k, \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \dots + \hat{\gamma}_k). \quad (3.3)$$

При этом если $\text{supp } \gamma_i \cup \text{supp } \gamma_j \neq \emptyset$, то, вообще говоря, $\tilde{\text{lk}}(\gamma_i \otimes \gamma_j) \neq \text{lk}(\gamma_i, \hat{\gamma}_j)$, и равенство (3.3) не выполняется.

Пользуясь утверждениями 3.2.17 и 3.2.19 мы можем посчитать $\tilde{\text{lk}}(\iota_w \nu \otimes \iota_w \nu)$

и $\widetilde{\text{lk}}(\iota_w(\nu_1 - \nu_2) \otimes \iota_w(\nu_1 - \nu_2))$ по всем $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{N}$, что позволит посчитать искомое $\widetilde{\text{lk}}(\iota_w \zeta)$.

Разберем случай цикла (д) (см. рис. 3.6).

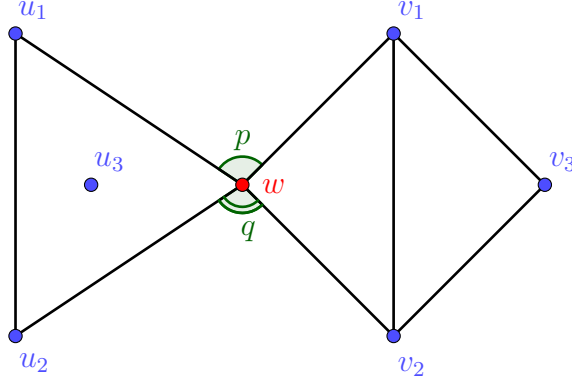


Рис. 3.9: Вершины, участвующие в цикле типа (д)

Введем обозначения для вершин, участвующих в цикле, как на рис. 3.9. Через u_3 обозначена вершина, возникающая при проведении первого преобразования. Тогда ненулевые цепи вида $\iota_w \nu$, где $\nu \in \mathcal{N}$, следующие: $\gamma_0 = [a_1, b_1, a_2, b_2, a_1]$, $\gamma_1 = [a_1, b_1, u_3, b_2, a_1]$, $\gamma_3 = [a_1, v_1, a_2, b_2, a_1]$ и $\gamma_4 = [a_1, v_1, a_2, b_2, a_1]$ с весами $(3-p-q)/6$, $1/6$, $-1/12$ и $-1/12$ соответственно (здесь $[a_1, \dots, a_n]$ означает цепь, равную $[a_1, a_2] + [a_2, a_3] + \dots + [a_{n-1}, a_n]$). Необходимо посчитать коэффициенты зацепления $\widetilde{\text{lk}}(\gamma_0 \otimes \gamma_0)$, $\widetilde{\text{lk}}(\gamma_1 \otimes \gamma_1)$, $\widetilde{\text{lk}}(\gamma_3 \otimes \gamma_4)$, $\widetilde{\text{lk}}(\gamma_4 \otimes \gamma_4)$, $\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_1) \otimes (\gamma_0 - \gamma_1))$, $\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_3) \otimes (\gamma_0 - \gamma_3))$, $\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_4) \otimes (\gamma_0 - \gamma_4))$, $\widetilde{\text{lk}}((\gamma_1 - \gamma_3) \otimes (\gamma_1 - \gamma_3))$, $\widetilde{\text{lk}}((\gamma_1 - \gamma_4) \otimes (\gamma_1 - \gamma_4))$, $\widetilde{\text{lk}}((\gamma_3 - \gamma_4) \otimes (\gamma_3 - \gamma_4))$. Все участвующие циклы являются простыми. Циклы $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0 - \gamma_1$ удовлетворяют условиям предложения 3.2.17, а остальные циклы разбиваются на пары $\{\gamma_3, \gamma_4\}$, $\{\gamma_0 - \gamma_3, \gamma_0 - \gamma_4\}$, $\{\gamma_1 - \gamma_3, \gamma_1 - \gamma_4\}$, $\{\gamma_3 - \gamma_4, \gamma_3 - \gamma_4\}$, удовлетворяющие предложению 3.2.19.

Укажем теперь явно коэффициенты зацеплений циклов γ_i и $\gamma_i - \gamma_j$ в случае цикла 3.9.

Лемма 3.2.21.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\text{lk}}(\gamma_0 \otimes \gamma_0) &= \rho(p, q) \\
\widetilde{\text{lk}}(\gamma_1 \otimes \gamma_1) &= \frac{1}{2}\rho(p, q)(p + q + 4) \\
\widetilde{\text{lk}}(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + \widetilde{\text{lk}}(\gamma_4 \otimes \gamma_4) &= -\rho(p, q)(p + q + 2) \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_1) \otimes (\gamma_0 - \gamma_1)) &= -\frac{1}{2}\rho(p, q)(p + q + 2) \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_3) \otimes (\gamma_0 - \gamma_3)) + \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_4) \otimes (\gamma_0 - \gamma_4)) &= -\rho(p, q)(p + q + 4) \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_1 - \gamma_3) \otimes (\gamma_1 - \gamma_3)) + \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_1 - \gamma_4) \otimes (\gamma_1 - \gamma_4)) &= -2\rho(p, q)(p + q + 3)^2 \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_3 - \gamma_4) \otimes (\gamma_3 - \gamma_4)) &= 0
\end{aligned}$$

Следствие. В случае цикла типа 3.9 выполнено $h(\beta_1 + \widetilde{\beta}_2 + \widetilde{\beta}_1^{-1} + \beta_2^{-1}) = \rho(p, q)$.

Для циклов (б) и (з) (см. рис. 3.6) таким же образом получаются следующие равенства коэффициентов зацепления:

Лемма 3.2.21'. В случае цикла (б) циклы $\iota_w \zeta$ имеют вид $\gamma_0 = [a_1, b_1, a_2, b_2, a_1]$, $\gamma_1 = [a_1, b_1, a_2, v_3, a_1]$, $\gamma_2 = [a_1, b_1, u_3, b_2, a_1]$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\text{lk}}(\gamma_0 \otimes \gamma_0) &= \rho(p, q) \\
\widetilde{\text{lk}}(\gamma_1 \otimes \gamma_1) &= \frac{1}{2}\rho(p, q)(p + q + 4) \\
\widetilde{\text{lk}}(\gamma_2 \otimes \gamma_2) &= \frac{1}{2}\rho(p, q)(p + q + 4) \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_1) \otimes (\gamma_0 - \gamma_1)) &= -\frac{1}{2}\rho(p, q)(p + q + 2) \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_2) \otimes (\gamma_0 - \gamma_2)) &= -\frac{1}{2}\rho(p, q)(p + q + 2) \\
\widetilde{\text{lk}}((\gamma_1 - \gamma_2) \otimes (\gamma_1 - \gamma_2)) &= -\rho(p, q)(p + q + 2)(p + q + 4)
\end{aligned}$$

Лемма 3.2.21". В случае цикла (з) циклы $\iota_w \zeta$ имеют вид $\gamma_0 = [a_1, b_1, a_2, b_2, a_1]$,
 $\gamma_3 = [a_1, v_1, a_2, b_2, a_1]$, $\gamma_4 = [a_1, v_2, a_2, b_2, a_1]$, $\gamma_5 = [u_1, b_1, a_2, b_2, u_1]$,
 $\gamma_6 = [u_1, b_1, a_2, b_2, u_1]$.

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{lk}}(\gamma_0 \otimes \gamma_0) &= \rho(p, q) \\ \widetilde{\text{lk}}(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + \widetilde{\text{lk}}(\gamma_4 \otimes \gamma_4) &= \rho(p, q)(p + q + 4) \\ \widetilde{\text{lk}}(\gamma_5 \otimes \gamma_5) + \widetilde{\text{lk}}(\gamma_6 \otimes \gamma_6) &= \rho(p, q)(p + q + 4) \\ \widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_3) \otimes (\gamma_0 - \gamma_3)) + \widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_4) \otimes (\gamma_0 - \gamma_4)) &= -2\rho(p, q)(p + q + 2) \\ \widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_5) \otimes (\gamma_0 - \gamma_5)) + \widetilde{\text{lk}}((\gamma_0 - \gamma_6) \otimes (\gamma_0 - \gamma_6)) &= -2\rho(p, q)(p + q + 2) \\ \widetilde{\text{lk}}((\gamma_3 - \gamma_5) \otimes (\gamma_3 - \gamma_5)) + \widetilde{\text{lk}}((\gamma_3 - \gamma_6) \otimes (\gamma_3 - \gamma_6)) + \widetilde{\text{lk}}((\gamma_4 - \gamma_5) \otimes (\gamma_4 - \gamma_5)) + \\ + \widetilde{\text{lk}}((\gamma_4 - \gamma_6) \otimes (\gamma_4 - \gamma_6)) &= -8\rho(p, q)(p + q + 2)(p + q + 4) \\ \widetilde{\text{lk}}((\gamma_3 - \gamma_4) \otimes (\gamma_3 - \gamma_4)) &= 0 \\ \widetilde{\text{lk}}((\gamma_5 - \gamma_6) \otimes (\gamma_5 - \gamma_6)) &= 0 \end{aligned}$$

Итак, для циклов (а), (б), (г), (д), (ж), (з) утверждение предложения 3.2.4 доказано. Точнее,

Предложение. Коцикл $h \in Z^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$, значение которого на бизвездном преобразовании двумерных сфер $\beta: L_1 \rightsquigarrow L_2$ задается как $h(\beta) = \widetilde{\text{lk}}(\xi(\beta))$, принимает значение $\rho(p, q)$ на циклах первого типа вида (б), (д), (з), и принимает значение 0 на циклах вида (а), (г), (ж).

Теперь предположим, что исходные преобразования β_1 и β_2 имели две общие участвующие вершины w_1 и w_2 (случай циклов (в), (е) и (и)). Тогда линки этих вершин в L_{β_1, β_2} будут изоморфны трехмерным комбинаторным сферам $L_{p,0}$ и $L_{0,q}$ соответственно.

Для этих циклов

$$h(\beta_1 + \widetilde{\beta}_2 + \widetilde{\beta}_1^{-1} + \beta_2^{-1}) = \widetilde{\text{lk}}(\iota_{a_1} \zeta) + \widetilde{\text{lk}}(\iota_{b_1} \zeta) + \widetilde{\text{lk}}(\iota_{a_2} \zeta) + \widetilde{\text{lk}}(\iota_{b_2} \zeta) = -\widetilde{\text{lk}}(\iota_{w_1} \zeta) - \widetilde{\text{lk}}(\iota_{w_2} \zeta)$$

В случае циклов типа (в) и (е) вычисление коэффициентов зацепления полностью аналогично случаям с ненулевыми p и q , поэтому $\widetilde{\text{lk}}(\iota_{w_1} \zeta) = -\rho(p, 0) = \rho(0, p)$ и $\widetilde{\text{lk}}(\iota_{w_2} \zeta) = -\rho(0, q)$. Таким образом, на циклах типов (в) и (е) коцикл h принимает значения $\rho(0, q) - \rho(0, p)$ и $\rho(0, q) + \rho(0, p)$ соответственно.

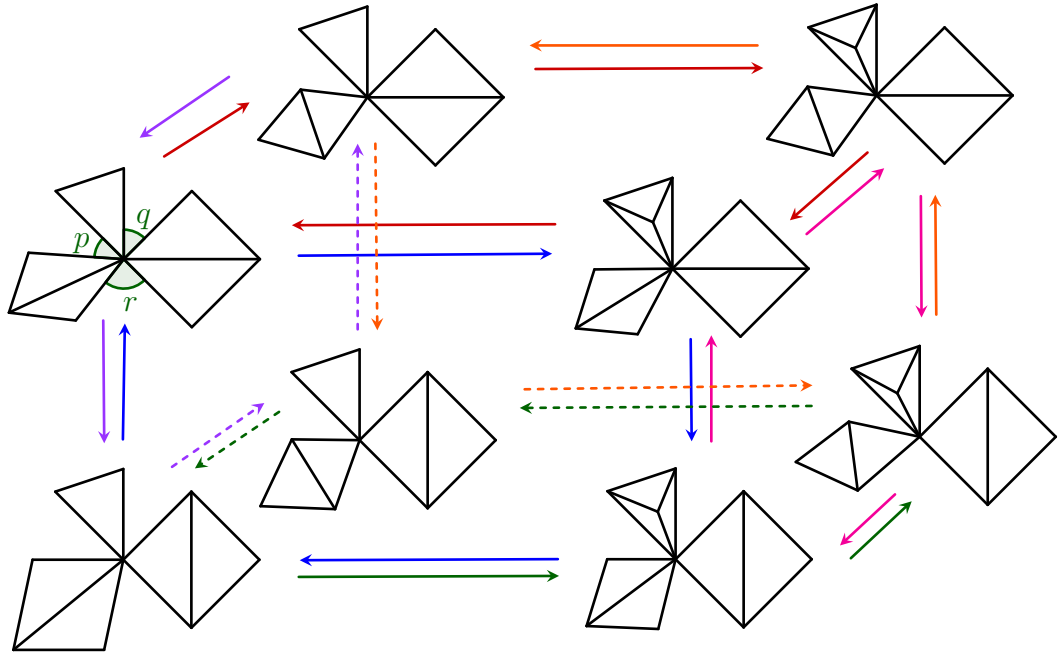


Рис. 3.10: Коммутация трех преобразований.

Доказательство того, что значения коцикла h на циклах типа (и) искомого, можно провести геометрически, таким же образом, как и для предыдущих случаев, однако оно получается более громоздким, поэтому мы здесь приведем доказательство, основанное на соотношениях на значения h на циклах.

Так как значение коцикла h на всех элементарных циклах первого типа зависит только от соответствующих количеств треугольников между общими вершинами, участвующими в бизвездных преобразованиях, то значения коцикла h на цикле (и) будут функциями от количеств треугольников p и q с рисунка 3.2. Обозначим ее $\theta(p, q)$.

Для любого цикла типа (и) обратный к этому циклу также является циклом типа (и) с переставленными местами p и q , если обратить ориентации всех участвующих двумерных сфер. Отсюда функция $\theta(p, q)$ удовлетворяет соотношению $\theta(p, q) = -\theta(q, p)$, а, значит, представима в виде суммы $\theta(p, q) = \nu(p) - \nu(q)$ для некоторой функции ν .

Между циклами первого типа в графе Γ_2 имеются соотношения. Самые естественные из них получаются как коммутации трех циклов первого типа (см. рис. 3.10). Нас будут интересовать соотношения на циклы с общими участвующими вершинами в бизвездных преобразованиях (циклы (б), (в),

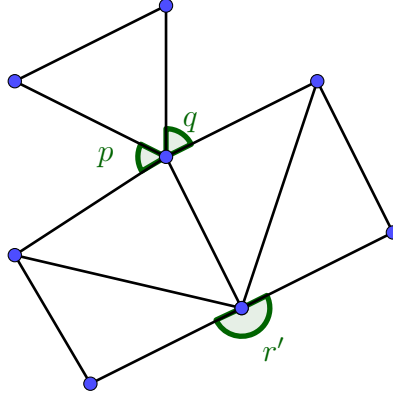


Рис. 3.11: Коммутация трех преобразований при $r = 0$.

(д), (е), (з), (и)). Рассмотрим двумерную сферу L , допускающую три преобразования с одной общей участвующей вершиной как на рис. 3.10. Сумма значений коцикла на 6 изображенных элементарных циклах должна быть равна 0. В случае, когда ни одно из чисел p, q, r не равно нулю, для коцикла h мы получаем верное соотношение $\rho(p, q+r+2) + \rho(q, p+r+2) + \rho(r, p+q+2) = \rho(p, q+r+1) + \rho(q, r+p+1) + \rho(r, p+q+1)$. Предположим теперь, что $r = 0$. Тогда, используя уже вычисленные значения на циклах остальных типов, мы получим следующие соотношения на функцию θ :

$$\rho(p, q+2) + \rho(q, p+2) + \theta(p+q+2, r') = \rho(p, q+1) + \rho(q, p+1) + \theta(p+q+1, r')$$

Откуда

$$\begin{aligned} \nu(p+q+2) - \nu(p+q+1) &= \rho(p, q+1) + \rho(q, p+1) - \\ &- \rho(p, q+2) - \rho(q, p+2) = -2 \frac{p+q}{(p+q+3)(p+q+4)(p+q+5)(p+q+6)} \end{aligned}$$

Если определить $\nu(1)$ и $\nu(2)$, то функция ν , а, значит, и функция θ , будет задана однозначно.

Если положить $p = 0$ и $q = 0$, то, используя уже вычисленное значение на

циклах типа (е), получим следующее соотношение:

$$\rho_{(e)}(2, p') + \rho_{(e)}(2, q') + \theta(2, r') = \rho_{(e)}(1, p') + \rho_{(e)}(1, q') + \theta(1, r')$$

Отсюда $\nu(2) = \nu(1)$, и функция ν теперь определена с точностью до аддитивной константы $\nu(1)$, что определяет функцию $\theta(p, q) = \nu(p) - \nu(q)$ однозначно. Легко проверить, что $\nu(p) = -\rho(0, p)$ удовлетворяет соотношениям на функцию ν , и, соответственно, значение функции h на циклах типа (и) равно $\theta(p, q) = \rho(0, q) - \rho(0, p)$.

Таким образом, значения построенного коцикла h и значения класса когомологий c на элементарных циклах первого типа совпадают. Теорема [3.1.5](#) доказана.

Список литературы

- [1] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “Комбинаторное вычисление характеристических классов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9:3** (1975), 5–26; *Funct. Anal. Appl.*, **9:3** (1975), 186–202.
- [2] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “Комбинаторное вычисление характеристических классов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9:2** (1975), 12–28; *Funct. Anal. Appl.*, **9:2** (1975), 103–115.
- [3] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “О комбинаторном вычислении характеристических классов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9:1** (1975), 54–55; *Funct. Anal. Appl.*, **9:1** (1975), 48–49.
- [4] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина”, *Функц. анализ и его прил.*, **10:1** (1976), 14–17; *Funct. Anal. Appl.*, **10:1** (1976), 12–15.
- [5] Гайфуллин А. А., “Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68:5** (2004), 13–66; *Izv. Math.*, **68:5** (2004), 861–910.
- [6] Гайфуллин А. А., “Вычисление характеристических классов многообразия по его триангуляции”, *УМН*, **60:4**(364) (2005), 37–66; *Russian Math. Surveys*, **60:4** (2005), 615–644.
- [7] Гайфуллин А. А., “Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72:5** (2008), 3–62; *Izv. Math.*, **72:5** (2008), 845–899.

- [8] Гайфуллин А. А., “Пространства конфигураций, бизвездные преобразования и комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина”, *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **268**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 76–93; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 70–86.
- [9] Гайфуллин А. А., Городков Д. А., “Явный вид локальной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина”, *УМН*, **74**:6(450) (2019), 161–162; *Russian Math. Surveys*, **74**:6 (2019), 1120–1122.
- [10] Городков Д. А., “Минимальная триангуляция кватернионной проективной плоскости”, *УМН*, **71**:6(432) (2016), 159–160; *Russian Math. Surveys*, **71**:6 (2016), 1140–1142.
- [11] Новиков С. П., “Топологическая инвариантность рациональных классов Понтрягина”, *Докл. АН СССР*, **163**:2 (1965), 298–300.
- [12] Понтрягин Л. С., “Характеристические циклы многообразий”, *ДАН СССР*, **35**:2 (1942), 35–39.
- [13] Понтрягин Л. С., “Некоторые топологические инварианты римановых многообразий”, *ДАН СССР*, **43**:3 (1944), 95–98.
- [14] Понтрягин Л. С., “Характеристические циклы дифференцируемых многообразий”, *Матем. сб.*, **21(63)**:2 (1947), 233–284.
- [15] Понтрягин Л. С., “Векторные поля на многообразиях”, *Матем. сб.*, **24(66)**:2 (1949), 129–162.
- [16] Понтрягин Л. С., “Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **13**:2 (1949), 125–162.
- [17] Рохлин В. А., Шварц А./С., “О комбинаторной инвариантности классов Понтрягина”, *ДАН СССР*, **114**:3 (1957), 490–493.
- [18] Хирцебрух Ф., “Топологические методы в алгебраической геометрии”, М.: Мир.

- [19] Björner A., Lutz F. H., “Simplicial manifolds, bistellar flips and a 16-vertex triangulation of the Poincaré homology 3-sphere”, *Exp. Math.*, **9:2** (2000), 275–289.
- [20] Brehm U., Kühnel W., “Combinatorial manifolds with few vertices”, *Topology*, **26** (1987), 465–473.
- [21] Brehm U., Kühnel W., “15-vertex triangulations of 8-manifolds”, *Math. Ann.*, **294** (1992), 167–193.
- [22] Brumfiel G., “On integral PL characteristic classes”, *Topology*, **8** (1969), 39–46.
- [23] Cheeger J., “A combinatorial formula for Stiefel-Whitney classes”, *Topology of Manifolds. Markham*, 1970, 470–471.
- [24] Cheeger J., “On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds”, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 91–145.
- [25] Cheeger J., “Spectral geometry of singular Riemannian spaces”, *J. Differential Geom.*, **18:4** (1983), 575–657.
- [26] Chern S., Simons J., “Characteristic Forms and Geometric Invariants”, *Annals of Mathematics*, **99:1**, 48–69.
- [27] Eells J., Kuiper N. H., “Manifolds which are like projective planes”, *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.*, **14** (1962), 181–222.
- [28] Effenberger F., Spreer J., “simpcomp - a GAP toolkit for simplicial complexes, Version 2.0.0”, 2013, <http://code.google.com/p/simpcomp>.
- [29] Forman R., “Morse theory for cell complexes”, *Advances in Mathematics*, **134** (1998), 90–145.
- [30] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2*, 2019, <https://www.gap-system.org>.
- [31] Gelfand I. M., MacPherson R. D., “A combinatorial formula for the Pontrjagin classes”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26:2** (1992), 304–309.

- [32] Goldstein R. Z., Turner E. C., “A formula for Stiefel-Whitney homology classes”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **58** (1976), 339–342.
- [33] Gorodkov D., “A 15-Vertex Triangulation of the Quaternionic Projective Plane”, *Discrete and Computational Geometry*, **62** (2019), 348–373.
- [34] Forman R., “Morse theory for cell complexes”, *Advances in mathematics*, **134** (1998), 90–145.
- [35] Halperin S., Toledo D., “Stiefel-Whitney homology classes”, *Ann. Math.*, **86:3** (1972), 511–525.
- [36] Heawood P. J., “Map colouring theorems”, *Quarterly J. Math. Oxford Ser.*, **24** (1890), 322–339.
- [37] Jungerman M., Ringel G., “Minimal triangulations on orientable surfaces”, *Acta Math.*, **145** (1980), 121–154.
- [38] Kühnel W., Banchoff T. F., “The 9-vertex complex projective plane”, *Math. Intell.*, **5:3** (1983), 11–22.
- [39] Kühnel W., “Higher dimensional analogues of Császár’s torus”, *Results in Mathematics*, **9** (1986), 95–106.
- [40] Levitt N., Rourke C., “The existence of combinatorial formulae for characteristic classes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **239** (1978), 391–397.
- [41] Lutz F.H., “Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds <https://arxiv.org/abs/math/0506372>.”.
- [42] MacPherson R., “The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class”, *Séminaire Bourbaki No. 497. Lecture Notes in Math. V. 677. Heidelberg: Springer*, 1977.
- [43] Milin L., “A combinatorial computation of the first Pontryagin class of the complex projective plane”, *Geom. Dedicata*, **49** (1994), 253–291.
- [44] Pachner U., “Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57** (1987), 69–86.

- [45] Pachner U., “P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings”, *European J. Combin.*, **12**:2 (1991), 129–145.
- [46] Stiefel E., “Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten”, *Comment. Math. Helv.*, **8** (1936), 305–353.
- [47] Thom R., “Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées”, *Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico: La Universidad Nacional Autonoma de Mexico y la Unesco*, 1958, 54–67.
- [48] Whitney H., “On the Theory of Sphere Bundles”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **26**:2 (1940), 148–153.