Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 9

А.В. Забродин*

Двумеризованная цепочка Тоды и ее эллиптические решения

Подобно системе КМ, получающейся как динамическая система для полюсов сингулярных решений КП, система РШ тоже может быть получена как динамика полюсов сингулярных решений нелинейных уравнений. Вместо уравнения (и иерархии) КП нужно рассмотреть его "разностный аналог" – уравнение двумеризованной цепочки Тоды (и соответствующую иерархию).

Двумеризованная цепочка Тоды

Иерархия двумеризованной цепочки Тоды представляет собой бесконечный набор совместных нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Множество независимых переменных включает непрерывные времена $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$ ("положительные" времена), $\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \ldots\}$ ("отрицательные" времена), по которым уравнения иерархии дифференциальные, и "нулевое" время $t_0 = x$, которое обычно считается пространственной переменной и по которому уравнения иерархии разностные. Если отрицательные времена заморожены (положены равными нулю), уравнения, включающие переменные x и $\mathbf{t}$ образуют модифицированную иерархию КП (мКП), которую можно рассматривать как подиерархию двумеризованной цепочки Тоды.

Напомним основные сведения о двумеризованной цепочке Тоды. Более подробное изложение можно найти в работе [31]. В формализме Лакса-Сато основные объекты – два оператора Лакса $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathcal{L}}$, которые в отличие от иерархии КП являются не псевдодифференциальными, а псевдоразностными операторами, т.е. бесконечными линейными комбинациями операторов сдвига вида

$$\mathcal{L} = e^{\eta\partial_x} + \sum_{k\geq 0} U_k(x) e^{-k\eta\partial_x}, \quad \bar{\mathcal{L}} = c(x) e^{-\eta\partial_x} + \sum_{k\geq 0} \bar{U}_k(x) e^{k\eta\partial_x},$$

где η – параметр ("постоянная решетки"), $e^{\eta\partial_x}$ – оператор сдвига, определенный действием на функцию $f(x)$ как $e^{\pm\eta\partial_x} f(x) = f(x \pm \eta)$, и коэффициентные функции

*e-mail: zabrodin@itep.ru

$c(x)$, U_k, $\bar{U}_k$ – функции от x, $\mathbf{t}$ и $\bar{\mathbf{t}}$. Уравнения иерархии – это дифференциально-разностные уравнения на функции $c(x)$, U_k, $\bar{U}_k$, закодированные в уравнениях Лакса

$$\partial_{t_m}\mathcal{L} = [\mathcal{B}_m, \mathcal{L}], \quad \partial_{t_m}\bar{\mathcal{L}} = [\mathcal{B}_m, \bar{\mathcal{L}}] \qquad \mathcal{B}_m = (\mathcal{L}^m)_{\geq 0},$$

$$\partial_{\bar{t}_m}\mathcal{L} = [\bar{\mathcal{B}}_m, \mathcal{L}], \quad \partial_{\bar{t}_m}\bar{\mathcal{L}} = [\bar{\mathcal{B}}_m, \bar{\mathcal{L}}] \qquad \bar{\mathcal{B}}_m = (\bar{\mathcal{L}}^m)_{<0},$$

где $\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} U_k e^{k\eta\partial_x}\Big)_{\geq 0} = \sum\limits_{k\geq 0} U_k e^{k\eta\partial_x}$, $\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} U_k e^{k\eta\partial_x}\Big)_{<0} = \sum\limits_{k<0} U_k e^{k\eta\partial_x}$. Например,

$$\mathcal{B}_1 = e^{\eta\partial_x} + U_0(x), \qquad \bar{\mathcal{B}}_1 = c(x)e^{-\eta\partial_x}.$$

Существует эквивалентная формулировка в виде уравнений Захарова-Шабата на разностные операторы $\mathcal{B}_m$, $\bar{\mathcal{B}}_m$:

$$\partial_{t_n}\mathcal{B}_m - \partial_{t_m}\mathcal{B}_n + [\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n] = 0,$$

$$\partial_{\bar{t}_n}\mathcal{B}_m - \partial_{t_m}\bar{\mathcal{B}}_n + [\mathcal{B}_m, \bar{\mathcal{B}}_n] = 0,$$

$$\partial_{\bar{t}_n}\bar{\mathcal{B}}_m - \partial_{\bar{t}_m}\bar{\mathcal{B}}_n + [\bar{\mathcal{B}}_m, \bar{\mathcal{B}}_n] = 0.$$

В частности, при $m = n = 1$ из второго уравнения имеем

$$\begin{cases} \partial_{t_1}\log c(x) = v(x) - v(x-\eta) \\ \\ \partial_{\bar{t}_1} v(x) = c(x) - c(x+\eta), \end{cases}$$

где $v(x) = U_0(x)$. Исключив $v(x)$, получаем дифференциально-разностное уравнение второго порядка на $c(x)$:

$$\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1}\log c(x) = 2c(x) - c(x+\eta) - c(x-\eta),$$

что есть одна из форм уравнения двумеризованной Тоды. После подстановки $c(x) = e^{\varphi(x)-\varphi(x-\eta)}$ оно приобретает наиболее известный вид

$$\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1}\varphi(x) = e^{\varphi(x)-\varphi(x-\eta)} - e^{\varphi(x+\eta)-\varphi(x)}.$$

Уравнения Захарова-Шабата – условия совместности линейных задач

$$\partial_{t_m}\psi = \mathcal{B}_m(x)\psi, \quad \partial_{\bar{t}_m}\psi = \bar{\mathcal{B}}_m(x)\psi,$$

где волновая функция ψ зависит от спектрального параметра z: $\psi = \psi(z;\mathbf{t})$. Она имеет следующее разложение по степеням z:

$$\psi = z^{x/\eta}e^{\xi(\mathbf{t},z)}\left(1 + \frac{\xi_1(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})}{z} + \frac{\xi_2(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})}{z^2} + \dots\right),$$

где

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k\geq 1} t_k z^k.$$

При целых x/η это мероморфная функция, при нецелых она имеет ветвление в ∞.

Удобно ввести волновой (одевающий) оператор как псевдоразностный оператор вида

$$\mathcal{W}(x) = 1 + \xi_1(x)e^{-\eta\partial_x} + \xi_2(x)e^{-2\eta\partial_x} + \dots$$

с теми же коэффициентами ξ_k, что и в разложении волновой функции; тогда волновая функция представится в виде

$$\psi = \mathcal{W}(x) z^{x/\eta} e^{\xi(\mathbf{t},z)}.$$

Двойственная волновая функция ψ^* определяется формулой

$$\psi^* = (\mathcal{W}^\dagger(x-\eta))^{-1} z^{-x/\eta} e^{-\xi(\mathbf{t},z)},$$

где сопряженный разностный оператор вводится по правилу $(f(x) \circ e^{n\eta\partial_x})^\dagger = e^{-n\eta\partial_x} \circ f(x)$. Она имеет разложение

$$\psi^* = z^{-x/\eta} e^{-\xi(\mathbf{t},z)} \left(1 + \frac{\xi_1^*(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})}{z} + \frac{\xi_2^*(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})}{z^2} + \dots\right).$$

Линейные задачи для двойственной волновой функции имеют вид

$$-\partial_{t_m}\psi^* = \mathcal{B}_m^\dagger(x-\eta)\psi^*.$$

В частности,

$$\partial_{t_1}\psi(x) = \psi(x+\eta) + v(x)\psi(x),$$

$$-\partial_{t_1}\psi^*(x) = \psi^*(x-\eta) + v(x-\eta)\psi^*(x),$$

$$\partial_{\bar{t}_1}\psi(x) = c(x)\psi(x-\eta).$$

Общее решение иерархии двумеризованной цепочки Тоды доставляется тау-функцией $\tau = \tau(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})$. В терминах тау-функции иерархия кодируется производящим билинейным соотношением

$$\oint_{C_\infty} z^{\frac{x-x'}{\eta}-1} e^{\xi(\mathbf{t},z)-\xi(\mathbf{t}',z)} \tau\Big(x, \mathbf{t}-[z^{-1}], \bar{\mathbf{t}}\Big)\tau\Big(x'+\eta, \mathbf{t}'+[z^{-1}], \bar{\mathbf{t}}'\Big)dz$$

$$= \oint_{C_0} z^{\frac{x-x'}{\eta}-1} e^{\xi(\bar{\mathbf{t}},z^{-1})-\xi(\bar{\mathbf{t}}',z^{-1})} \tau\Big(x+\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}-[z]\Big)\tau\Big(x', \mathbf{t}', \bar{\mathbf{t}}'+[z]\Big)dz$$

справедливым для всех $\mathbf{t},\mathbf{t}'$, $\bar{\mathbf{t}},\bar{\mathbf{t}}'$ и x,x' таких, что $(x-x')/\eta \in \mathbb{Z}$. Мы используем обозначение

$$\mathbf{t} \pm [z] = \Big\{t_1 \pm z, t_2 \pm \tfrac{1}{2}z^2, t_3 \pm \tfrac{1}{3}z^3, \dots\Big\},$$

которое уже вводилось при обсуждении иерархии КП. Контур интегрирования в левой части – большая окружность вокруг ∞, которая разделяет сингулярности, идущие из экспоненциального фактора (они находятся снаружи контура) и из тау-функций. Контур интегрирования в правой части – малая окружность вокруг нуля, разделяющая сингулярности, идущие из экспоненциального фактора (они находятся внутри контура) и из тау-функций.

Следствиями интегрального соотношения являются билинейные уравнения типа Хироты-Мивы. Одно из них получается, если в интегральном билинейном соотношении положить $x' = x$, $\bar{\mathbf{t}}' = \bar{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} - \mathbf{t}' = [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}]$, так что

$$e^{\xi(\mathbf{t},z)-\xi(\mathbf{t}',z)} = \frac{\lambda\mu}{(\lambda - z)(\mu - z)}.$$

Вычисление интегралов по вычетам дает уравнение (функциональное соотношение)

$$\mu\tau(x+\eta, \mathbf{t}+[\lambda^{-1}]-[\mu^{-1}], \bar{\mathbf{t}})\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) - \lambda\tau(x+\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})\tau(x, \mathbf{t}+[\lambda^{-1}]-[\mu^{-1}], \bar{\mathbf{t}})$$

$$+ (\lambda-\mu)\tau(x+\eta, \mathbf{t}+[\lambda^{-1}], \bar{\mathbf{t}})\tau(x, \mathbf{t}-[\mu^{-1}], \bar{\mathbf{t}}) = 0.$$

Другое важное уравнение получается аналогичным образом, если положить $x' = x - \eta$, $\mathbf{t} - \mathbf{t}' = [\lambda^{-1}]$, $\bar{\mathbf{t}} - \bar{\mathbf{t}}' = [\nu]$. Оно имеет вид

$$\tau(x, \mathbf{t}-[\lambda^{-1}], \bar{\mathbf{t}})\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}-[\nu]) - \tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})\tau(x, \mathbf{t}-[\lambda^{-1}], \bar{\mathbf{t}}-[\nu])$$

$$= \nu\lambda^{-1}\tau(x+\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}-[\nu])\tau(x-\eta, \mathbf{t}-[\lambda^{-1}], \bar{\mathbf{t}}).$$

Уравнения иерархии получаются разложением этих соотношений по степеням λ, μ, ν.

Коэффициентные функции операторов Лакса выражаются через тау-функцию. Например:

$$U_0(x) = v(x) = \partial_{t_1} \log \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}, \quad c(x) = \frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}.$$

Уравнение Тоды в терминах тау-функции принимает вид

$$\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1} \log \tau(x) = -\frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}.$$

Волновые функции выражаются через тау-функцию следующим образом:

$$\psi = z^{x/\eta} e^{\xi(\mathbf{t},z)} \frac{\tau(x, \mathbf{t}-[z^{-1}], \bar{\mathbf{t}})}{\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})},$$

$$\psi^* = z^{-x/\eta} e^{-\xi(\mathbf{t},z)} \frac{\tau(x, \mathbf{t}+[z^{-1}], \bar{\mathbf{t}})}{\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})}.$$

Можно также ввести дополнительные волновые функции $\bar{\psi}$, $\bar{\psi}^*$ формулами

$$\bar{\psi} = z^{x/\eta} e^{\xi(\bar{\mathbf{t}},z^{-1})} \frac{\tau(x+\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}-[z])}{\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})},$$

$$\bar{\psi}^* = z^{-x/\eta} e^{-\xi(\bar{\mathbf{t}},z^{-1})} \frac{\tau(x-\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}+[z])}{\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})}.$$

Они удовлетворяют тем же линейным уравнениям, что и ψ, ψ^*. Нам будет более удобно работать с дополнительными волновыми функциями, нормированными по-другому:

$$\phi(x) = \frac{\tau(x)}{\tau(x+\eta)}\, \bar{\psi}(x) = z^{x/\eta} e^{\xi(\bar{\mathbf{t}},z^{-1})} \frac{\tau(x+\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}-[z])}{\tau(x+\eta, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})},$$

$$\phi^*(x) = \frac{\tau(x)}{\tau(x-\eta)}\,\bar\psi^*(x) = z^{-x/\eta}e^{-\xi(\bar{\mathbf{t}},z^{-1})}\frac{\tau(x-\eta,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}+[z])}{\tau(x-\eta,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})}.$$

Они удовлетворяют линейным уравнениям

$$\partial_{\bar t_1}\phi(x) = \phi(x-\eta) - \bar v(x)\phi(x), \quad -\partial_{\bar t_1}\phi^*(x) = \phi^*(x+\eta) - \bar v(x-\eta)\phi^*(x),$$

где $\bar v(x) = \partial_{\bar t_1}\log\dfrac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}$.

Наконец, укажем полезные следствия интегрального билинейного соотношения, которые будут использоваться далее. Продифференцировав интегральное билинейное соотношение по t_m и после этого положив $x = x'$, $\mathbf{t}=\mathbf{t}'$ $\bar{\mathbf{t}}=\bar{\mathbf{t}}'$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty} z^{m-1}\tau\Big(x,\mathbf{t}-[z^{-1}],\bar{\mathbf{t}}\Big)\tau\Big(x+\eta,\mathbf{t}+[z^{-1}],\bar{\mathbf{t}}\Big)dz$$

$$= \partial_{t_m}\tau(x+\eta,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})\tau(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) - \partial_{t_m}\tau(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})\tau(x+\eta,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})$$

или

$$\operatorname*{res}_{\infty}\Big(z^m\psi(x)\psi^*(x+\eta)\Big) = -\partial_{t_m}\log\frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}.$$

Эквивалентным образом это соотношение можно записать в виде

$$\psi(x)\psi^*(x+\eta) = 1 + \sum_{m\geq 1} z^{-m-1}\partial_{t_m}\log\frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}.$$

Аналогично, продифференцировав интегральное билинейное соотношение по $\bar t_m$ и положив $x=x'$, $\mathbf{t}=\mathbf{t}'$, $\bar{\mathbf{t}}=\bar{\mathbf{t}}'$, получим

$$\operatorname*{res}_{0}\Big(z^{-m}\phi(x)\phi^*(x+\eta)\Big) = -\partial_{\bar t_m}\log\frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}.$$

Здесь $\operatorname*{res}_{\infty}$, $\operatorname*{res}_{0}$ от ряда Лорана определяются как $\operatorname*{res}_{\infty}(z^{-n}) = -\delta_{n1}$, $\operatorname*{res}_{0}(z^{-n}) = \delta_{n1}$.

Система РШ из динамики полюсов сингулярных решений

Среди всех решений двумеризованной цепочки Тоды особый интерес представляют решения, имеющие конечное число полюсов по переменной x в фундаментальной области комлексной плоскости. В частности, можно рассматривать рациональные, тригонометрические или эллиптические решения с полюсами, зависящими от времен $\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}$.

Тригонометрические решения двумеризованной цепочки Тоды: соответствие с системой РШ на уровне иерархий. Мы начнем с тригонометрических решений двумеризованной цепочки Тоды по пространственной переменной x и покажем, что динамика их полюсов в зависимости от времен $t_k, \bar t_k$ совпадает с динамикой тригонометрической системы РШ. Опишем этот результат более подробно. Тау-функция двумеризованной цепочки Тоды для тригонометрических решений имеет вид

$$\tau(x,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \exp\Big(-\sum_{k\geq 1}kt_k\bar t_k\Big)\prod_{i=1}^{N}\Big(e^{2\gamma x} - e^{2\gamma x_i(\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})}\Big),$$

где γ параметризует период решений. (Нули x_i тау-функции – полюса решения.) Предел $\gamma \to 0$ соответствует рациональным решениям. Мы покажем, что эволюция x_i во времени t_m описывается гамильтоновым потоком с гамильтонианом

$$H_m = -\frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta}\,\mathrm{tr}\,L^m,$$

где

$$L_{ij} = \frac{\gamma\eta\, e^{\eta p_i}}{\sinh(\gamma(x_i - x_j - \eta))}\prod_{l\neq i}\frac{\sinh(\gamma(x_i - x_l + \eta))}{\sinh(\gamma(x_i - x_l))}$$

– матрица Лакса тригонометрической системы РШ. В частности,

$$H_1 = \sum_i e^{\eta p_i}\prod_{l\neq i}\frac{\sinh(\gamma(x_i - x_l + \eta))}{\sinh(\gamma(x_i - x_l))}$$

представляет собой стандартный гамильтониан системы РШ. Аналогично, эволюция нулей тау-функции x_i во времени $\bar{t}_m$ описывается гамильтоновым потоком с гамильтонианом

$$\bar{H}_m = -\frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta}\,\mathrm{tr}\,L^{-m}.$$

Ниже мы даем вывод этих результатов.

Динамика по времени t_1. Рассмотрим сначала динамику по положительным временам и положим $\bar{\mathbf{t}} = 0$. Тау-функция для тригонометрических решений имеет вид

$$\tau(x, \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{N}\Big(e^{2\gamma x} - e^{2\gamma x_i(\mathbf{t})}\Big).$$

Как и ранее, удобно перейти к переменным

$$w = e^{2\gamma x}, \quad w_i = e^{2\gamma x_i}.$$

В этих переменных тау-функция становится полиномом степени N от w с корнями w_i, которые считаются различными: $\tau = \prod_i (w - w_i)$. Функция $v(x)$ дается тогда формулой

$$v(x) = \partial_{t_1}\log\frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)} = \sum_i\left(\frac{\dot{w}_i}{w - w_i} - \frac{\dot{w}_i}{qw - w_i}\right),$$

где

$$q = e^{2\gamma\eta}.$$

Здесь и далее в этом разделе точка над буквой означает производную по t_1.

Начнем с исследования динамики полюсов по t_1. Полюсной анзац для волновой функции имеет вид

$$\psi = z^{x/\eta}e^{t_1 z}\left(1 + \sum_i\frac{2\gamma c_i}{w - w_i}\right),$$

где мы положили $t_k = 0$ при $k \geq 2$. Коэффициенты c_i могут зависеть от $\mathbf{t}$ и от z. Подставив ψ и v в линейное уравнение

$$-\partial_{t_1}\psi(x) + \psi(x+\eta) + v(x)\psi(x) = 0,$$

получим:

$$-z\sum_i \frac{c_i}{w-w_i}-\sum_i \frac{\dot c_i}{w-w_i}-\sum_i \frac{\dot w_i c_i}{(w-w_i)^2}+\sum_i \frac{q^{-1}c_i}{w-q^{-1}w_i}$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\sum_i \left(\frac{\dot w_i}{w-w_i}-\frac{\dot w_i q^{-1}}{w-q^{-1}w_i}\right)+\sum_i \left(\frac{\dot w_i}{w-w_i}-\frac{\dot w_i q^{-1}}{w-q^{-1}w_i}\right)\sum_k \frac{c_k}{w-w_k}=0.$$

Левая часть – рациональная функция от w, равная нулю на бесконечности, с простыми полюсами в точках $w=w_i$ и $w=q^{-1}w_i$ (полюса второго порядка сокращаются тождественно). Для достижения равенства нужно приравнять все вычеты к нулю. Это дает следующую систему линейных уравнений на коэффициенты c_i:

$$\left\{\begin{array}{l} zc_i - q\sum_k \dfrac{\dot w_i c_k}{w_i-qw_k}=\dfrac{1}{2\gamma}\,\dot w_i \\[2ex] \dot c_i = c_i\left(\displaystyle\sum_{k\neq i}\frac{\dot w_k}{w_i-w_k}-\sum_k \frac{\dot w_k}{qw_i-w_k}\right)+\displaystyle\sum_{k\neq i}\frac{\dot w_i c_k}{w_i-w_k}-q\sum_k \frac{\dot w_i c_k}{w_i-qw_k}. \end{array}\right.$$

Аналогичным образом, сопряженное линейное уравнение

$$\partial_{t_1}\psi^*(x)+\psi^*(x-\eta)+v(x-\eta)\psi^*(x)=0$$

с полюсным анзацем для ψ^*-функции

$$\psi^* = z^{-x/\eta}e^{-t_1 z}\left(1+\sum_i \frac{2\gamma c_i^*}{w-w_i}\right)$$

приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты c_i^*:

$$\left\{\begin{array}{l} zc_i^* - \displaystyle\sum_k \frac{\dot w_i c_k^*}{w_k-qw_i}=-\frac{1}{2\gamma}\,\dot w_i \\[2ex] \dot c_i^* = c_i^*\left(\displaystyle\sum_{k\neq i}\frac{\dot w_k}{w_i-w_k}+\sum_k \frac{q\dot w_k}{w_i-qw_k}\right)+\displaystyle\sum_{k\neq i}\frac{\dot w_i c_k^*}{w_i-w_k}-\sum_k \frac{\dot w_i c_k^*}{qw_i-w_k}. \end{array}\right.$$

После преобразования $\tilde c_i = c_i w_i^{-1/2}$, $\tilde c_i^* = c_i^* w_i^{-1/2}$ эти линейные системы могут быть записаны в матричной форме

$$\Big(zI-q^{1/2}L\Big)\tilde{\mathbf{c}}=\dot X W^{1/2}\mathbf{e},\quad \partial_{t_1}\tilde{\mathbf{c}}=M\tilde{\mathbf{c}},$$

$$\tilde{\mathbf{c}}^*\dot X^{-1}\Big(zI-q^{-1/2}L\Big)=-\mathbf{e}^T W^{1/2},\quad \partial_{t_1}\tilde{\mathbf{c}}^*=-\tilde{\mathbf{c}}^*\tilde M,$$

где $\tilde{\mathbf{c}}=(\tilde c_1,\dots,\tilde c_N)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец, $\tilde{\mathbf{c}}^*=(\tilde c_1^*,\dots,\tilde c_N^*)$ – вектор-строка, $\mathbf{e}=(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$, и матрицы X, W, L, M, $\tilde M$ имеют вид

$$X=\mathrm{diag}\,(x_1,x_2,\dots,x_N),\quad W=\mathrm{diag}\,(w_1,w_2,\dots,w_N),$$

$$L_{ij}=2\gamma q^{1/2}\,\frac{\dot x_i w_i^{1/2}w_j^{1/2}}{w_i-qw_j},$$

$$M_{ij} = \gamma\delta_{ij}\left(\sum_{k\neq i}\frac{w_i+w_k}{w_i-w_k}\,\dot x_k-\sum_{k}\frac{qw_i+w_k}{qw_i-w_k}\,\dot x_k\right)+2\gamma\frac{\dot x_i w_i^{1/2}w_j^{1/2}}{w_i-w_j}\,(1-\delta_{ij})-2\gamma q\frac{\dot x_i w_i^{1/2}w_j^{1/2}}{w_i-qw_j},$$

$$\tilde M_{ji} = -\gamma\delta_{ij}\left(\sum_{k\neq i}\frac{w_i+w_k}{w_i-w_k}\,\dot x_k-\sum_{k}\frac{w_i+qw_k}{w_i-qw_k}\,\dot x_k\right)+2\gamma\frac{\dot x_i w_i^{1/2}w_j^{1/2}}{w_j-w_i}\,(1-\delta_{ij})-2\gamma\frac{\dot x_i w_i^{1/2}w_j^{1/2}}{w_j-qw_i}.$$

Следующее коммутационное соотношение может быть проверено непосредственно:

$$q^{-1/2}WL-q^{1/2}LW=W^{-1/2}\dot W E W^{1/2}.$$

Здесь, как и ранее, $E=\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ – матрица ранга 1 с матричными элементами $E_{ij}=1$. Это коммутационное соотношение будет использовано в дальнейшем.

Линейная система для вектора $\tilde{\mathbf{c}}$ переопределена. Продифференцировав первое уравнение по t_1 и подставив второе уравнение, получим условие совместности системы в виде

$$\Big(\dot L+[L,M]\Big)\tilde{\mathbf{c}}+q^{-1/2}\Big(\ddot X+\gamma\dot X^2-M\dot X\Big)W^{1/2}\mathbf{e}=0.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\dot L+[L,M]=RL,$$

$$\Big(\ddot X+\gamma\dot X^2-M\dot X\Big)W^{1/2}\mathbf{e}=R\dot X W^{1/2}\mathbf{e},$$

где

$$R=\ddot X\dot X^{-1}+D^{+}+D^{-}-2D^{0}$$

и диагональные матрицы $D^{\pm}$, D^{0} имеют вид

$$D^{\pm}_{ij}=\delta_{ij}\gamma\sum_{k\neq i}\frac{q^{\pm1}w_i+w_k}{q^{\pm1}w_i-w_k}\,\dot x_k,\qquad D^{0}_{ij}=\delta_{ij}\gamma\sum_{k\neq i}\frac{w_i+w_k}{w_i-w_k}\,\dot x_k.$$

Следовательно, условие совместности принимает вид $R\tilde{\mathbf{c}}=0$, а это означает, что $R_{ii}=0$ для всех i. Это дает уравнения движения тригонометрической системы РШ

$$\begin{aligned}\ddot x_i &= -\gamma\sum_{k\neq i}\dot x_i\dot x_k\Big(\coth(\gamma(x_{ik}+\eta))+\coth(\gamma(x_{ik}-\eta))-2\coth(\gamma x_{ik})\Big)\\ &= \sum_{k\neq i}\dot x_i\dot x_k\frac{2\gamma\sinh^2(\gamma\eta)\cosh(\gamma x_{ik})}{\sinh(\gamma x_{ik})\sinh(\gamma(x_{ik}+\eta))\sinh(\gamma(x_{ik}-\eta))},\end{aligned}$$

Матричное уравнение $\dot L+[L,M']=0$ с

$$L_{ij}=\frac{\gamma\dot x_i}{\sinh(\gamma(x_{ij}-\eta))},$$

$$M'_{ij}=\gamma\delta_{ij}\left(\sum_{k\neq i}\dot x_k\coth(\gamma x_{ik})-\sum_{k}\dot x_k\coth(\gamma(x_{ik}+\eta))\right)+(1-\delta_{ij})\,\frac{\gamma\dot x_i}{\sinh(\gamma x_{ij})}$$

служит представлением Лакса для них. Эти уравнения гамильтоновы с гамильтонианом

$$H_1=\sum_i e^{\eta p_i}\prod_{k\neq i}\frac{\sinh(\gamma(x_{ik}+\eta))}{\sinh(\gamma x_{ik})}$$

Из уравнения Лакса следует, что законы сохранения имеют вид $\operatorname{tr}L^m$. В работе [20] доказано, что они находятся в инволюции.

Динамика по положительным временам. Для анализа динамики по высшим положительным временам $t_k, k \geq 2$, мы воспользуемся ранее полученным соотношением

$$\operatorname*{res}_{\infty}\Big(z^m \psi(x)\psi^*(x+\eta)\Big) = -\partial_{t_m} \log \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)},$$

которое для тригонометрических решений принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty} z^{m-1}\left(1+\sum_i \frac{2\gamma c_i}{w-w_i}\right)\left(1+\sum_k \frac{2\gamma c_k^*}{qw-w_k}\right)dz = \sum_i \left(\frac{\partial_{t_m} w_i}{w-w_i} - \frac{\partial_{t_m} w_i}{qw-w_i}\right).$$

Обе части – рациональные функции от w с простыми полюсами при $w=w_i$ и $w=q^{-1}w_i$, равные нулю на бесконечности. Приравнивая вычеты в полюсах, получаем:

$$\partial_{t_m} x_i = -2\gamma \operatorname*{res}_{\infty}\Big(z^m \tilde{c}_i^* \dot{w}_i^{-1} \tilde{c}_i\Big).$$

Решая линейные уравнения на векторы $\tilde{\mathbf{c}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^*$, будем иметь:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \frac{1}{2\gamma}(zI - q^{1/2}L)^{-1}\dot{W}W^{-1/2}\mathbf{e}, \quad \tilde{\mathbf{c}}^* = -\frac{1}{2\gamma}\,\mathbf{e}^T W^{1/2}(zI - q^{-1/2}L)^{-1}\dot{W}W^{-1}.$$

Подставив это в формулу для $\partial_{t_m} x_i$, получим:

$$\partial_{t_m} x_i = -\frac{1}{2\gamma}\operatorname*{res}_{\infty}\sum_{k,k'}\left[z^m w_k^{1/2}\Big(\frac{1}{zI-q^{-1/2}L}\Big)_{ki} w_i^{-1}\Big(\frac{1}{zI-q^{1/2}L}\Big)_{ik'}\dot{w}_{k'}w_{k'}^{-1/2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\gamma}\operatorname*{res}_{\infty}\,\mathrm{tr}\left(z^m \dot{W}W^{-1/2}EW^{1/2}\frac{1}{zI-q^{-1/2}L}E_i W^{-1}\frac{1}{zI-q^{1/2}L}\right),$$

где E_i – диагональная матрица с матричными элементами $(E_i)_{jk} = \delta_{ij}\delta_{ik}$. Используя коммутационное соотношение

$$q^{-1/2}WL - q^{1/2}LW = W^{-1/2}\dot{W}EW^{1/2},$$

имеем:

$$\partial_{t_m} x_i = -\frac{1}{2\gamma}\operatorname*{res}_{\infty}\,\mathrm{tr}\left(z^m(q^{-1/2}WL - q^{1/2}LW)\frac{1}{zI-q^{-1/2}L}\,E_i W^{-1}\frac{1}{zI-q^{1/2}L}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\gamma}\operatorname*{res}_{\infty}\,\mathrm{tr}\left(z^m\Big(E_i\,\frac{1}{zI-q^{-1/2}L} - E_i\,\frac{1}{zI-q^{1/2}L}\Big)\right).$$

Далее, с помощью легко проверяемого тождества

$$E_i L = \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \eta^{-1}\frac{\partial L}{\partial p_i}$$

продолжаем цепочку равенств:

$$\partial_{t_m} x_i = -\frac{1}{2\gamma\eta}\operatorname*{res}_{\infty}\,\mathrm{tr}\left(z^m\left(\frac{\partial L}{\partial p_i}\,\frac{L^{-1}}{zI-q^{-1/2}L} - \frac{\partial L}{\partial p_i}\,\frac{L^{-1}}{zI-q^{1/2}L}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\gamma\eta}\,(q^{-m/2} - q^{m/2})\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial L}{\partial p_i}\,L^{m-1}\right) = -\frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta}\frac{\partial}{\partial p_i}\,\mathrm{tr}\,L^m.$$

Это дает первую половину гамильтоновых уравнений для потока по t_m:

$$\partial_{t_m} x_i = \frac{\partial H_m}{\partial p_i}, \quad H_m = -\frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta}\,\mathrm{tr}\, L^m.$$

Вывод второй половины гамильтоновых уравнений более трудоемок. Идея вывода была предложена в работе [32] для рациональных решений цепочки Тоды. Прежде всего, заметим, что первая половина гамильтоновых уравнений может быть записана в виде

$$\partial_{t_m} x_i = -m\eta\kappa_m \mathrm{tr}\,(E_i L^m), \quad \kappa_m = \frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta}.$$

Дифференцируя по t_1 и используя уравнения Лакса, имеем:

$$\partial_{t_m} \dot{x}_i = -m\eta\kappa_m \mathrm{tr}\,(E_i[M', L^m]) = -m\eta\kappa_m \mathrm{tr}\,(L^m[E_i, M']).$$

Теперь подействуем производной ∂_{t_m} на уравнение

$$\log \dot{x}_i = \eta p_i + \sum_{k\neq i} \log \frac{\sinh(\gamma(x_{ik}+\eta))}{\sinh(\gamma x_{ik})} + \log \eta.$$

Мы получим:

$$\partial_{t_m} p_i = \eta^{-1}\partial_{t_m} \log \dot{x}_i - \eta^{-1}\sum_j \sum_{l\neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{\sinh(\gamma(x_{il}+\eta))}{\sinh(\gamma x_{il})}\,\partial_{t_m} x_j$$

$$= -m\kappa_m \dot{x}_i^{-1} \mathrm{tr}\,(L^m[E_i, M']) + m\kappa_m \sum_j \sum_{l\neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{\sinh(\gamma(x_{il}+\eta))}{\sinh(\gamma x_{il})}\,\mathrm{tr}\,(E_j L^m)$$

$$= -m\kappa_m\,\mathrm{tr}\left(A^{(i)} L^{m-1}\right),$$

где матрица $A^{(i)}$ имеет вид

$$A^{(i)} = \dot{x}_i^{-1}(LE_iM' - M'E_iL) - \sum_j \sum_{l\neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{\sinh(\gamma(x_{il}+\eta))}{\sinh(\gamma x_{il})}\, E_j L.$$

Заметим, что диагональная часть матрицы M' не дает вклада, так что вместо матрицы M' сюда можно подставить ее внедиагональную часть

$$A_{ij} = 2\gamma(1-\delta_{ij})\,\frac{\dot{x}_i w_i^{1/2} w_j^{1/2}}{w_i - w_j}.$$

Найдем матричные элементы:

$$(LE_iA)_{jk} = \gamma \dot{x}_i L_{jk}\left(\frac{w_i + w_k}{w_i - w_k} - \frac{qw_i + w_k}{qw_i - w_k}\right)(1-\delta_{ik}),$$

$$(AE_iL)_{jk} = -\gamma \dot{x}_i L_{jk}\left(\frac{w_i + w_j}{w_i - w_j} - \frac{w_i + qw_k}{w_i - qw_k}\right)(1-\delta_{ij}),$$

$$\sum_l \sum_{r\neq i} \frac{\partial}{\partial x_l} \log \frac{\sinh(\gamma(x_{ir}+\eta))}{\sinh(\gamma x_{ir})}\,(E_l L)_{jk}$$

$$= \gamma\delta_{ij}L_{jk}\sum_{r\neq i}\left(\frac{qw_i+w_r}{qw_i-w_r}-\frac{w_i+w_r}{w_i-w_r}\right)-\gamma(1-\delta_{ij})L_{jk}\left(\frac{qw_i+w_j}{qw_i-w_j}-\frac{w_i+w_j}{w_i-w_j}\right).$$

Собирая все вместе, получим матричные элементы матрицы $A^{(i)}$:

$$\begin{aligned} A^{(i)}_{jk} &= \gamma L_{jk}\left(\frac{w_i+w_k}{w_i-w_k}(1-\delta_{ik})-\frac{w_i+qw_k}{w_i-qw_k}(1-\delta_{ij})+\frac{qw_i+w_j}{qw_i-w_j}(\delta_{ik}-\delta_{ij})\right. \\ & \left. -\delta_{ij}\sum_{r\neq i}\left(\frac{qw_i+w_r}{qw_i-w_r}-\frac{w_i+w_r}{w_i-w_r}\right)\right). \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что

$$A^{(i)} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}-[C^{(i)},L],$$

где матрица $C^{(i)}$ следующая:

$$C^{(i)} = \gamma\sum_{l}\frac{qw_l+w_i}{qw_l-w_i}\,E_l-\gamma\sum_{l\neq i}\frac{w_l+w_i}{w_l-w_i}\,E_l.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{jk}}{\partial x_i} &= \gamma L_{jk}\left(\frac{w_j+qw_k}{w_j-qw_k}\,(\delta_{ik}-\delta_{ij})+\frac{w_i+qw_j}{w_i-qw_j}\,(1-\delta_{ij})-\frac{w_i+w_j}{w_i-w_j}\,(1-\delta_{ij})\right. \\ & \left. +\,\delta_{ij}\sum_{r\neq i}\left(\frac{qw_i+w_r}{qw_i-w_r}-\frac{w_i+w_r}{w_i-w_r}\right)\right), \end{aligned}$$

$$[C^{(i)},L]_{jk} = \gamma L_{jk}\left(\frac{qw_j+w_i}{qw_j-w_i}-\frac{qw_k+w_i}{qw_k-w_i}-\frac{w_j+w_i}{w_j-w_i}(1-\delta_{ij})+\frac{w_k+w_i}{w_k-w_i}(1-\delta_{ik})\right),$$

и отсюда видно, что $A^{(i)}+\partial L/\partial x_i+[C^{(i)},L]=0$. Из доказанного соотношения

$$A^{(i)} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}-[C^{(i)},L]$$

заключаем, что

$$\partial_{t_m}p_i = -m\kappa_m\,\mathrm{tr}\left(A^{(i)}L^{m-1}\right) = m\kappa_m\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\,L^{m-1}\right) = \kappa_m\frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{tr}\,L^m.$$

Это дает вторую половину гамильтоновых уравнений для высших потоков:

$$\partial_{t_m}p_i = -\frac{\partial H_m}{\partial x_i}.$$

Динамика по отрицательным временам. Для анализа динамики нулей тау-функции по отрицательным временам мы сначала рассмотрим эволюцию по $\bar{t}_1$. Будем работать с дополнительными волновыми функциями ϕ, ϕ^*, для которых используем анзац

$$\phi(x) = z^{x/\eta} e^{\bar{t}_1 z^{-1}} \left(1 + \sum_i \frac{2\gamma b_i}{qw - w_i}\right),$$

$$\phi^*(x) = z^{-x/\eta} e^{-\bar{t}_1 z^{-1}} \left(1 + \sum_i \frac{2\gamma b_i^*}{q^{-1}w - w_i}\right),$$

где b_i, b_i^* – некоторые коэффициенты, зависящие от z и от времен, но не от x. Подставив эти волновые функции в линейные задачи, аналогично предыдущему получим линейные системы на векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}^*$ как условия сокращения полюсов. Уравнения на b_i получаются такие же, как на c_i^*, при замене z на $-z^{-1}$, w на qw и ∂_{t_1} на $\partial_{\bar{t}_1}$. Уравнения на b_i^* и c_i связаны похожим образом. Перейдя к $\tilde{b}_i = w_i^{-1/2} b_i$, $\tilde{b}_i^* = w_i^{-1/2} b_i^*$, имеем, после некоторых вычислений:

$$\tilde{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} (\partial_{\bar{t}_1} X)^{-1} (z^{-1} I + q^{-1/2} \bar{L}) = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} W^{1/2},$$

$$(z^{-1} I + q^{1/2} \bar{L}) \tilde{\mathbf{b}}^* = -\partial_{\bar{t}_1} X \, W^{1/2} \mathbf{e},$$

где матрица $\bar{L}$ имеет вид

$$\bar{L}_{ij} = 2\gamma q^{1/2} \frac{\partial_{\bar{t}_1} x_i \, w_i^{1/2} w_j^{1/2}}{w_i - q w_j}.$$

Эта матрица удовлетворяет коммутационному соотношению

$$q^{-1/2} W \bar{L} - q^{1/2} \bar{L} W = W^{-1/2} \partial_{\bar{t}_1} W \, E W^{1/2}.$$

Используя соотношение

$$\operatorname*{res}_0 \left(z^{-m} \phi(x) \phi^*(x+\eta) \right) = -\partial_{\bar{t}_m} \log \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)},$$

находим, аналогично предыдущему:

$$\partial_{\bar{t}_m} x_i = -2\gamma \operatorname*{res}_0 \Big(z^{-m-2} \tilde{b}_i^* (\partial_{\bar{t}_1} w_i)^{-1} \tilde{b}_i \Big).$$

Подставив сюда решения линейных систем и повторяя вычисления, проделанные для положительных времен, будем иметь:

$$\partial_{\bar{t}_m} x_i = (-1)^m \frac{\sinh(m\gamma\eta)}{\gamma} \operatorname{tr}(E_i \bar{L}^m).$$

Выведем соотношение между матрицами L и $\bar{L}$. Для этого нам потребуется соотношение между скоростями $\dot{x}_i = \partial_{t_1} x_i$ и $\partial_{\bar{t}_1} x_i$, которое можно получить из уравнения Тоды

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \log \tau(x) = -\frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}.$$

Подставив сюда тау-функцию в виде $\tau = \prod_i (w - w_i)$, получим:

$$\sum_i \frac{\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1} w_i}{w - w_i} + \sum_i \frac{\partial_{t_1} w_i \, \partial_{\bar{t}_1} w_i}{(w - w_i)^2} = \prod_k \frac{(qw - w_k)(q^{-1}w - w_k)}{(w - w_k)^2}.$$

Сравнивая коэффициенты при старших полюсах, получим соотношение

$$\partial_{t_1} w_i \, \partial_{\bar{t}_1} w_i = \frac{\prod_k (qw_i - w_k)(q^{-1}w_i - w_k)}{\prod_{l \neq i}(w_i - w_l)^2}$$

или

$$\partial_{t_1} X \, \partial_{\bar{t}_1} X = \frac{1}{4\gamma^2} \, W^{-2} U_+ U_-,$$

где $U_\pm$ – диагональные матрицы

$$(U_\pm)_{ij} = \delta_{ij} \, \frac{\prod_k (w_i - q^{\pm 1} w_k)}{\prod_{l \neq i}(w_i - w_l)}.$$

Нам также нужна формула для матрицы, обратной матрице Коши

$$C_{ij} = \frac{1}{w_i - qw_j}.$$

Она имеет вид

$$C_{ij}^{-1} = \frac{1}{qw_i - w_j} \, \frac{\prod_k (qw_i - w_k)(w_j - qw_k)}{q^{N-1} \prod_{l \neq j}(w_j - w_l) \prod_{l' \neq i}(w_i - w_{l'})}$$

или

$$C^{-1} = -qU_- C^{\mathrm{T}} U_+.$$

Теперь пишем $L = 2\gamma q^{1/2} \partial_{t_1} X \, W^{1/2} C W^{1/2}$ и находим:

$$\begin{aligned} L^{-1} &= \frac{q^{-1/2}}{2\gamma} W^{-1/2} C^{-1} W^{-1/2} (\partial_{t_1} X)^{-1} \\ &= -2\gamma q^{1/2} W^{-1/2} U_- C^T W^{-1/2} \partial_{\bar{t}_1} X \, W^2 U_-^{-1} \\ &= -2\gamma q^{1/2} W^{-1} U_- \Big(\partial_{\bar{t}_1} X \, W^{1/2} C W^{1/2} \Big)^{\mathrm{T}} (W^{-1} U_-)^{-1} \\ &= -W^{-1} U_- \, \bar{L}^{\mathrm{T}} (W^{-1} U_-)^{-1}. \end{aligned}$$

Мы видим, что матрица $-\bar{L}^{\mathrm{T}}$ связана с L^{-1} преобразованием подобия. Используя тот факт, что $E_i \bar{L} = -\eta^{-1} \partial \bar{L} / \partial p_i$, мы можем переписать уравнения

$$\partial_{\bar{t}_m} x_i = (-1)^m \, \frac{\sinh(m\gamma\eta)}{\gamma} \, \mathrm{tr} \, (E_i \bar{L}^m)$$

как

$$\partial_{\bar{t}_m} x_i = -\frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta} \, \frac{\partial}{\partial p_i} \, \mathrm{tr} \, L^{-m} = \frac{\partial \bar{H}_m}{\partial p_i},$$

что есть половина гамильтоновых уравнений для потоков по отрицательным временам.

Вывод второй половины гамильтоновых уравнений не представляет проблем после проведенного вывода для положительных времен. Заметим, что

$$\partial_{\bar{t}_m} x_i = m\eta\kappa_m \operatorname{tr}(E_i L^{-m}).$$

В полной аналогии с проведенными выше вычислениями получаем, что

$$\partial_{\bar{t}_m} p_i = m\kappa_m \operatorname{tr}(A^{(i)} L^{-m-1})$$

с той же самой матрицей $A^{(i)}$. В силу соотношения

$$A^{(i)} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - [C^{(i)}, L]$$

имеем:

$$\partial_{\bar{t}_m} p_i = -m\kappa_m \operatorname{tr}\Big(\frac{\partial L}{\partial x_i}\, L^{-m-1}\Big) = m\kappa_m \operatorname{tr}\Big(\frac{\partial L^{-1}}{\partial x_i}\, (L^{-1})^{m-1}\Big) = \kappa_m \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr} L^{-m},$$

что дает гамильтоновы уравнения

$$\partial_{\bar{t}_m} p_i = -\frac{\partial \bar{H}_m}{\partial x_i}.$$

В частности,

$$\bar{H}_1 = \frac{\sinh^2(\gamma\eta)}{\gamma^2\eta^2} \sum_i e^{-\eta p_i} \prod_{k\neq i} \frac{\sinh(\gamma(x_{ik} - \eta))}{\sinh(\gamma x_{ik})}.$$

Эллиптические решения. Рассмотрим решения, которые являются эллиптическими функциями от x и найдем динамику их полюсов как функций от t_1. Для эллиптических решений коэффициентная функция $v(x)$ в линейной задаче

$$\partial_{t_1} \psi(x) = \psi(x+\eta) + v(x)\psi(x)$$

имеет вид

$$v(x) = \sum_i \dot{x}_i \Big(\zeta(x - x_i) - \zeta(x - x_i + \eta)\Big),$$

где точка означает производную по t_1. Это двоякопериодическая функция от x, так что решения нужно искать среди двоякоблоховских функций. Как и ранее, разложим решение по элементарным двоякоблоховским функциям

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\sigma(x+\lambda)}{\sigma(\lambda)\sigma(x)}\, e^{-\zeta(\lambda)x}.$$

Это разложение имеет вид

$$\psi = k^{x/\eta} e^{t_1 k} \sum_i c_i \Phi(x - x_i, \lambda),$$

где k – второй спектральный параметр, который окажется связанным с λ уравнением спектральной кривой. Подставив этот анзац в линейную задачу, найдем условия сокращения полюсов при $x = x_i$ и $x = x_i - \eta$ в виде

$$\left\{\begin{array}{l} kc_i + \dot{c}_i = \dot{x}_i \displaystyle\sum_{j\neq i} c_j \Phi(x_i - x_j) + c_i \sum_{j\neq i} \dot{x}_j \zeta(x_i - x_j) - c_i \sum_j \dot{x}_j \zeta(x_i - x_j + \eta) \\[2em] kc_i - \dot{x}_i \displaystyle\sum_j c_j \Phi(x_i - x_j - \eta) = 0, \end{array}\right.$$

где мы для краткости опустили второй аргумент у функции Φ. Эти условия могут быть записаны в матричном виде как система линейных уравнений для вектора $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N)^{\mathrm{T}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\lambda)\mathbf{c} = k\mathbf{c} \\[2ex] \dot{\mathbf{c}} = M(\lambda)\mathbf{c}, \end{array} \right.$$

где $N \times N$ матрицы L, M имеют вид

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) &= \dot{x}_i \Phi(x_i - x_j - \eta, \lambda), \\ M_{ij}(\lambda) &= \delta_{ij} \Big(\sum_{l \neq i} \dot{x}_l \zeta(x_i - x_l) - \sum_l \dot{x}_l \zeta(x_i - x_l + \eta) \Big) \\ &\qquad\qquad + (1 - \delta_{ij}) \dot{x}_i \Phi(x_i - x_j, \lambda) - \dot{x}_i \Phi(x_i - x_j - \eta, \lambda). \end{aligned}$$

Мы узнаем здесь пару Лакса для эллиптической системы РШ из раздела 2.2. Условие совместности линейной системы на вектор $\mathbf{c}$ – уравнение Лакса $\dot{L} + [L, M] = 0$. Последнее слагаемое в матрице M несущественно и может быть отброшено, т.к. оно пропорционально матрице L и сокращается в уравнении Лакса.

Соответствие эллиптических решений двумеризованной Тоды и эллиптической системы РШ на уровне иерархий было доказано в работе [33]. Результаты выглядят следующим образом. Динамика полюсов по всем временам $\mathbf{t}$, $\bar{\mathbf{t}}$ гамильтонова, и соответствующие гамильтонианы являются высшими гамильтонианами эллиптической системы РШ. Их производящей функцией является $\lambda(z)$, где спектральные параметры λ, z связаны уравнением спектральной кривой

$$\det_{N \times N} \Big(z e^{\eta \zeta(\lambda)} I - L(\lambda) \Big) = 0.$$

Спектральная кривая – интеграл движения по всем временам. Точка спектральной кривой – это пара $P = (z, \lambda)$, где z, λ связаны этим уравнением. На спектральной кривой есть две выделенные точки: $P_\infty = (\infty, 0)$ и $P_0 = (0, N\eta)$. Гамильтонианы, порождающие динамику по положительным временам $\mathbf{t}$ – коэффициенты разложения функции $\lambda(z)$ по отрицательным степеням z вблизи точки P_∞, а гамильтонианы, порождающие динамику по отрицательным временам $\bar{\mathbf{t}}$ – коэффициенты разложения функции $\lambda(z)$ по положительным степеням z вблизи точки P_0.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem*, Commun. Pure Appl. Math. **30** (1977) 95–148.

[4] И.М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функ. Анализ и его Прил. **12:1** (1978) 76–78.

[5] И.М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функ. Анализ и его Прил. **14:4** (1980) 45–54.

[6] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва, 1987.

[8] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва, 1989.

[9] Т. Мива, М. Джимбо, Э. Дате, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры*, Издательство МЦНМО, Москва, 2005.

[10] J. Harnad and F. Balogh, *Tau functions and their applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2021.

[11] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981), Singapore: World Scientific, 1983, 39–119.

[12] M. Jimbo and T. Miwa, *Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 943–1001.

[13] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[14] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[15] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[16] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[17] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[18] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[19] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[20] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[21] I. Krichever, A. Zabrodin, *Monodromy free linear equations and many-body systems*, Letters in Mathematical Physics 113:75 (2023).

[22] А. Забродин, *Об интегрируемости деформированной системы Руйсенарса-Шнайдера*, УМН **78:2** (2023) 149–188.

[23] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5844–5849.

[24] A. Zabrodin, *KP hierarchy and trigonometric Calogero-Moser hierarchy*, J. Math. Phys. **61** (2020) 043502.

[25] V. Prokofev, A. Zabrodin, *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero-Moser model*, Journal of Physics A: Math. Theor., **54** (2021) 305202.

[26] J. Gibbons, T. Hermsen, *A generalization of the Calogero-Moser system*, Physica D **11** (1984) 337–348.

[27] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey and M. Talon, *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **170** (1995) 83–119.

[28] И. Кричевер, А. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН **50:6** (1995) 3–56.

[29] D. Rudneva, A. Zabrodin, *Dynamics of poles of elliptic solutions to BKP equation*, Journal of Physics A: Math. Theor. **53** (2020) 075202.

[30] A. Zabrodin, *How Calogero-Moser particles can stick together*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 225201.

[31] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984) 1–95.

[32] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Physica D **229** (2007), no. 2, 184–190.

[33] В. Прокофьев, А. Забродин, *Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса-Шнайдера*, ТМФ **208** (2021) 282—309.

[34] I. Krichever, A. Zabrodin, *Toda lattice with constraint of type B*, Physica D **453** (2023) 133827.

[35] I. Krichever, *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, In: Algebraic geometry and number theory. In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th birthday. Ed. by Ginzburg, Victor. Basel: Birkhäuser. Progress in Mathematics **253** (2006) 497–514.

[36] I. Krichever, *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer variety*, Annals of Mathematics **172** (2010) 485–516.

[37] S. Wojciechowski, *The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **15** (1982) L653-L657.

[38] F.W. Nihhoff, G.D. Pang, *A time-discretized version of the Calogero-Moser model*, Phys. Lett. A **191** (1994) 101-107.

[39] F.W. Nihhoff, O. Ragnisco, V. Kuznetsov, *Integrable time-discretization of the Ruijsenaars-Schneider model*, Commun. Math. Phys. **176** (1996) 681-700.