Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 8

А.В. Забродин*

Матричная иерархия КП и эллиптические решения матричного уравнения КП

У уравнения КП (и у всей иерархии) имеется матричное обобщение, когда коэффициентные функции в псевдодифференциальном операторе Лакса, на которые пишутся уравнения, представляют собой матрицы размера $n \times n$. Мы покажем, что эллиптические решения матричного уравнения КП приводят к спиновой системе КМ как динамике их полюсов и (матричных) коэффициентов при полюсах.

Многокомпонентная иерархия КП. Мы начнем с более общей многокомпонентной иерархии КП; матричная иерархия является ее подиерархией. Независимыми переменными служат n бесконечных множеств непрерывных времен

$$\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n\}, \qquad \mathbf{t}_\alpha = \{t_{\alpha,1}, t_{\alpha,2}, t_{\alpha,3}, \dots\}, \qquad \alpha = 1, \dots, n.$$

Удобно также ввести переменную x такую, что

$$\partial_x = \sum_{\alpha=1}^{n} \partial_{t_{\alpha,1}}.$$

Иерархия – это бесконечное множество совместных друг с другом эволюционных уравнений по временам $\mathbf{t}$ для матричных функций от переменной x.

В формализме Лакса-Сато основной объект – это псевдодифференциальный оператор с матричными коэффициентами вида

$$\mathcal{L} = \partial_x + u_1 \partial_x^{-1} + u_2 \partial_x^{-2} + \dots,$$

где коэффициенты $u_i = u_i(x, \mathbf{t})$ являются $n \times n$ матрицами. Они зависят от x и от всех времен:

$$u_k(x, \mathbf{t}) = u_k(x + t_{1,1}, x + t_{2,1}, \dots, x + t_{n,1}; t_{1,2}, \dots, t_{n,2}; \dots).$$

Водятся также n матричных псевдодифференциальных операторов $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ вида

$$\mathcal{R}_\alpha = E_\alpha + u_{\alpha,1} \partial_x^{-1} + u_{\alpha,2} \partial_x^{-2} + \dots,$$

*e-mail: zabrodin@itep.ru

где E_α – диагональная $n{\times}n$ матрица, в которой элемент (α,α) равен 1, а все остальные элементы равны 0. Операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}_1,\dots,\mathcal{R}_n$ должны удовлетворять условиям

$$\mathcal{L}\mathcal{R}_\alpha=\mathcal{R}_\alpha\mathcal{L},\quad \mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta=\delta_{\alpha\beta}\mathcal{R}_\alpha,\quad \sum_{\alpha=1}^{n}\mathcal{R}_\alpha=I.$$

Уравнения Лакса, задающие эволюцию по временам, следующие:

$$\partial_{t_{\alpha,k}}\mathcal{L}=[A_{\alpha,k},\,\mathcal{L}],\quad \partial_{t_{\alpha,k}}\mathcal{R}_\beta=[A_{\alpha,k},\,\mathcal{R}_\beta],\quad A_{\alpha,k}=\Bigl(\mathcal{L}^k\mathcal{R}_\alpha\Bigr)_+,\quad k=1,2,3,\dots.$$

Удобно ввести матричный псевдодифференциальный “волновой оператор” (или одевающий оператор) $\mathcal{W}$ с матричными элементами

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\sum_{k\geq 1}\xi_{k,\alpha\beta}(x,\mathbf{t})\partial_x^{-k},$$

где $\xi_{k,\alpha\beta}(x,\mathbf{t})$ – некоторые матричные функции. Операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}_\alpha$ получаются из “голых” операторов $I\partial_x$ и E_α “одеванием” с помощью волнового оператора:

$$\mathcal{L}=\mathcal{W}\partial_x\mathcal{W}^{-1},\qquad \mathcal{R}_\alpha=\mathcal{W}E_\alpha\mathcal{W}^{-1}.$$

Ясно, что в определении волнового оператора есть произвол: его можно домножить справа на произвольный псевдодифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, представляющий из себя ряд по обратным степеням ∂_x, начинающийся с I и коммутирующий с E_α для любого α.

Важную роль в теории играют волновая функция Ψ и двойственная ей Ψ^*. Волновая функция вводится как результат действия волнового оператора на экспоненциальную функцию:

$$\Psi(x,\mathbf{t};z)=\mathcal{W}\exp\Bigl(xzI+\sum_{\alpha=1}^{n}E_\alpha\xi(\mathbf{t}_\alpha,z)\Bigr).$$

По определению, операторы ∂_x^{-k} действуют на экспоненциальную функцию как $\partial_x^{-k}e^{xz}=z^{-k}e^{xz}$. Ясно, что разложение волновой функции при $z\to\infty$ следующее:

$$\Psi_{\alpha\beta}(x,\mathbf{t};z)=e^{xz+\xi(\mathbf{t}_\beta,z)}\Bigl(\delta_{\alpha\beta}+\xi_{1,\alpha\beta}z^{-1}+\xi_{2,\alpha\beta}z^{-2}+\dots\Bigr).$$

Двойственная функция вводится формулой

$$\Psi^*(x,\mathbf{t};z)=\exp\Bigl(-xzI-\sum_{\alpha=1}^{n}E_\alpha\xi(\mathbf{t}_\alpha,z)\Bigr)\mathcal{W}^{-1}.$$

Здесь мы используем соглашение, что операторы ∂_x, входящие в $\mathcal{W}^{-1}$, действуют налево, а не направо. Левое действие определяется как $f\overleftarrow{\partial_x}\equiv-\partial_x f$.

Можно доказать, что волновая функция удовлетворяет линейным уравнениям

$$\partial_{t_{\alpha,m}}\Psi(x,\mathbf{t};z)=A_{\alpha,m}\Psi(x,\mathbf{t};z),$$

где $A_{\alpha,m}$ – дифференциальный оператор $A_{\alpha,m}=\Bigl(\mathcal{W}E_\alpha\partial_x^m\mathcal{W}^{-1}\Bigr)_+$, а двойственная волновая функция удовлетворяет сопряженному уравнению

$$-\partial_{t_{\alpha,m}}\Psi^*(x,\mathbf{t};z)=\Psi^*(x,\mathbf{t};z)A_{\alpha,m}.$$

Здесь оператор $A_{\alpha,m}$ действует налево.

Матричная иерархия КП. Матричной иерархией КП называется подиерархия многокомпонентной иерархии КП, получающаяся следующим ограничением независимых переменных: $t_{\alpha,m} = t_m$ для всех α и m, так что векторное поле ∂_{t_m} совпадает с $\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_{t_{\alpha,m}}$. Волновая функция матричной иерархии КП имеет разложение

$$\Psi_{\alpha\beta}(x, \mathbf{t}; z) = e^{xz+\xi(\mathbf{t},z)} \left(\delta_{\alpha\beta} + \xi_{1,\alpha\beta}(\mathbf{t}) z^{-1} + O(z^{-2})\right),$$

где $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k\geq 1} t_k z^k$. Волновая функция и ей двойственная удовлетворяют линейным уравнениям

$$\partial_{t_m} \Psi(\mathbf{t}; z) = A_m \Psi(\mathbf{t}; z), \qquad -\partial_{t_m} \Psi^\dagger(\mathbf{t}; z) = \Psi^\dagger(\mathbf{t}; z) B_m, \qquad m \geq 1,$$

где A_m – дифференциальный оператор $A_m = \left(\mathcal{W} \partial_x^m \mathcal{W}^{-1}\right)_+$. При $m = 1$ имеем $\partial_{t_1} \Psi = \partial_x \Psi$, так что можно отождествить $\partial_x = \partial_{t_1} = \sum_{\alpha=1}^{N} \partial_{t_{\alpha,1}}$. Это означает, что эволюция по t_1 – это просто сдвиг переменной x: $\xi_k(x, t_1, t_2, \dots) = \xi_k(x + t_1, t_2, \dots)$. При $m = 2$ имеем линейные уравнения

$$\partial_{t_2} \Psi = \partial_x^2 \Psi + 2V(x, \mathbf{t}) \Psi,$$

$$-\partial_{t_2} \Psi^* = \partial_x^2 \Psi^* + 2\Psi^* V(x, \mathbf{t})$$

(напомним, что Ψ, Ψ^* и V – матрицы, поэтому порядок важен), которые имеют вид матричных нестационарных уравнений Шредингера с потенциалом

$$V(x, \mathbf{t}) = -\partial_x \xi_1(x, \mathbf{t}).$$

Эллиптические решения. Рассмотрим решения, которые являются эллиптическими функциями от x, и найдем динамику их полюсов по времени t_2. В отличие от скалярного случая, где коэффициент при полюсе был фиксированной константой, в матричном случае эти (матричные) коэффициенты – тоже динамические переменные, и их динамика должна быть найдена вместе с динамикой полюсов. Эта задача была решена в работе [27], где было показано, что эта динамика совпадает с динамикой спиновой системы КМ.

Как и в скалярном случае, мы прежде всего обратимся к линейным задачам. Пусть волновые функции Ψ, Ψ^* (и значит коэффициент ξ_1) как функции от x имеют простые полюса в точках x_i, $i = 1, \dots, N$. Можно показать (мы не будем здесь этого делать), что вычеты в этих полюсах – матрицы ранга 1. Параметризуем их с помощью векторов-столбцов $\mathbf{a}_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^n)^{\mathrm{T}}$:

$$\xi_{1,\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \sum_i a_i^\alpha b_i^\beta \zeta(x - x_i),$$

где $S_{\alpha\beta}$ не зависит от x. Следовательно,

$$V_{\alpha\beta}(x, \mathbf{t}) = -\sum_i a_i^\alpha b_i^\beta \wp(x - x_i).$$

Компоненты векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ будут спиновыми переменными в спиновой системе КМ.

Как и в скалярном случае, волновые функции можно представить как линейные комбинации элементарных двоякоблоховских функций:

$$\Psi_{\alpha\beta} = e^{zx+\xi(\mathbf{t},z)} \sum_i a_i^\alpha c_i^\beta \Phi(x-x_i,\lambda),$$

$$\Psi^*_{\alpha\beta} = e^{-zx-\xi(\mathbf{t},z)} \sum_i c_i^{*\alpha} b_i^\beta \Phi(x-x_i,-\lambda),$$

где c_i^α, $c_i^{*\alpha}$ – компоненты некоторых не зависящих от x векторов $\mathbf{c}_i = (c_i^1,\ldots,c_i^n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c}_i^* = (c_i^{*1},\ldots,c_i^{*n})^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим сначала линейное уравнение для Ψ. После подстановки в него явного вида Ψ и V, мы видим, что обе части имеют полюса при $x = x_i$ вплоть до третьего порядка. Приравнивая коэффициенты при полюсах различных порядков, получаем условия:

- при $\frac{1}{(x-x_i)^3}$: $\quad b_i^\nu a_i^\nu = 1$;
- при $\frac{1}{(x-x_i)^2}$: $\quad -\dfrac{1}{2}\,\dot{x}_i c_i^\beta - \sum\limits_{j\neq i} b_i^\nu a_j^\nu c_j^\beta \Phi(x_i-x_j,\lambda) = z c_i^\beta$;
- при $\frac{1}{x-x_i}$:
$$\partial_{t_2}(a_i^\alpha c_i^\beta) = \wp(\lambda) a_i^\alpha c_i^\beta - 2\sum_{j\neq i} a_i^\alpha b_i^\nu a_j^\nu c_j^\beta \Phi'(x_i-x_j,\lambda) - 2c_i^\beta \sum_{j\neq i} a_i^\nu b_j^\nu a_j^\alpha \wp(x_i-x_j),$$

где точка означает производную по t_2. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся греческим индексам. Аналогично, сокращая полюса в линейной задаче для Ψ^*, приходим к условиям

- при $\frac{1}{(x-x_i)^3}$: $\quad b_i^\nu a_i^\nu = 1$ (как и выше);
- при $\frac{1}{(x-x_i)^2}$: $\quad -\dfrac{1}{2}\,\dot{x}_i c_i^{*\alpha} - \sum\limits_{j\neq i} c_j^{*\alpha} b_j^\nu a_i^\nu \Phi(x_j-x_i,\lambda) = z c_i^{*\alpha}$;
- при $\frac{1}{x-x_i}$:
$$\partial_{t_2}(c_i^{*\alpha} b_i^\beta) = -\wp(\lambda) c_i^{*\alpha} b_i^\beta + 2\sum_{j\neq i} c_j^{*\alpha} b_j^\nu a_i^\nu b_i^\beta \Phi'(x_j-x_i,\lambda) + 2c_i^{*\alpha} \sum_{j\neq i} b_i^\nu a_j^\nu b_j^\beta \wp(x_i-x_j).$$

Мы использовали очевидное свойство $\Phi(x,-\lambda) = -\Phi(-x,\lambda)$. Условия, проистекающие из сравнения полюсов третьего порядка – связи на векторы $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$. Другие условия можно представить в матричном виде

$$\left\{\begin{array}{l} (zI - L(\lambda))\mathsf{c}^\beta = 0, \\[2ex] \dot{\mathsf{c}}^\beta = M(\lambda)\mathsf{c}^\beta, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{c}^{*\alpha}(zI - L(\lambda)) = 0, \\[2ex] \dot{\mathsf{c}}^{*\alpha} = \mathsf{c}^{*\alpha} M^*(\lambda), \end{array}\right.$$

где $\mathsf{c}^\beta = (c_1^\beta, \dots, c_N^\beta)^{\mathrm{T}}$, $\mathsf{c}^{*\alpha} = (c_1^{*\alpha}, \dots, c_N^{*\alpha})$ – N-компонентные векторы, а $L(\lambda)$, $M(\lambda)$, $M^*(\lambda)$ – $N \times N$ матрицы вида

$$L_{ij}(\lambda) = -\frac{1}{2}\,\dot{x}_i \delta_{ij} - (1-\delta_{ij}) b_i^\nu a_j^\nu \Phi(x_i - x_j, \lambda),$$

$$M_{ij}(\lambda) = (\wp(\lambda) - \Lambda_i)\delta_{ij} - 2(1-\delta_{ij}) b_i^\nu a_j^\nu \Phi'(x_i - x_j, \lambda),$$
$$M^*_{ij}(\lambda) = -(\wp(\lambda) - \Lambda_i^*)\delta_{ij} + 2(1-\delta_{ij}) b_i^\nu a_j^\nu \Phi'(x_i - x_j, \lambda).$$

Здесь

$$\Lambda_i = \frac{\dot{a}_i^\alpha}{a_i^\alpha} + 2\sum_{j \neq i} \frac{a_j^\alpha b_j^\nu a_i^\nu}{a_i^\alpha}\,\wp(x_i - x_j), \quad -\Lambda_i^* = \frac{\dot{b}_i^\alpha}{b_i^\alpha} - 2\sum_{j \neq i} \frac{b_i^\nu a_j^\nu b_j^\alpha}{b_i^\alpha}\,\wp(x_i - x_j)$$

не зависят от индекса α (в этих формулах есть суммирование по ν, но нет суммирования по α). На самом деле $\Lambda_i = \Lambda_i^*$, так что $M^*(\lambda) = -M(\lambda)$. Действительно, умножив формулы для Λ_i, Λ_i^* на $a_i^\alpha b_i^\alpha$ (суммирования нет!), просуммировав по α и сложив два уравнения, получим $\Lambda_i - \Lambda_i^* = \partial_{t_2}(a_i^\alpha b_i^\alpha) = 0$ в силу связи $a_i^\alpha b_i^\alpha = 1$.

Условие совместности линейной системы гласит, что

$$(\dot{L} + [L, M])\mathsf{c}^\beta = 0.$$

Запишем уравнения для Λ_i, Λ_i^* в виде

$$\dot{a}_i^\alpha = \Lambda_i a_i^\alpha - 2\sum_{j \neq i} a_j^\alpha b_j^\nu a_i^\nu \wp(x_i - x_j),$$

$$\dot{b}_i^\alpha = -\Lambda_i b_i^\alpha + 2\sum_{j \neq i} b_i^\nu a_j^\nu b_j^\alpha \wp(x_i - x_j)$$

(в этом виде они представляют собой уравнения движения для спиновых переменных). Они гарантируют зануление недиагональных матричных элементов матрицы $\dot{L} + [L, M]$. Зануление диагональных элементов дает уравнения движения для полюсов x_i:

$$\ddot{x}_i = 4\sum_{j \neq i} b_i^\mu a_k^\mu b_k^\nu a_i^\nu \wp'(x_i - x_j).$$

Калибровочное преобразование $a_i^\alpha \to a_i^\alpha q_i$, $b_i^\alpha \to b_i^\alpha q_i^{-1}$ с $q_i = \exp\Bigl(\int^{t_2} \Lambda_i dt\Bigr)$ уничтожает члены с Λ_i так что можно положить $\Lambda_i = 0$. Это дает уравнения движения

$$\dot{a}_i^\alpha = -2\sum_{j \neq i} a_j^\alpha b_j^\nu a_i^\nu \wp(x_i - x_j), \quad \dot{b}_i^\alpha = 2\sum_{j \neq i} b_i^\nu a_j^\nu b_j^\alpha \wp(x_i - x_j)$$

из раздела 4.1.

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили типа B и его сингулярные решения

Кроме иерархии КП, связанной с бесконечномерной алгеброй Ли типа A, существуют версии иерархии КП, связанные с алгебрами типов B, C и D. В некотором смысле они являются подиерархиями иерархии КП. Не вдаваясь в подробности, мы кратко обсудим здесь уравнение КП типа B (или просто B-КП) и его эллиптические решения. Динамика их полюсов дает новую интегрируемую систему частиц, непохожую на системы КМ, впервые появившуюся в работе [29].

Уравнение B-КП

Уравнение B-КП – это первый член бесконечной иерархии (иерархии B-КП) с независимыми переменными (временами) $t_1, t_3, t_5, t_7, \ldots$, которые нумеруются нечетными числами. Положим $t_1 = x$. Уравнение B-КП имеет вид системы двух уравнений для двух функций u, w:

$$\begin{cases} 3w' = 10u_{t_3} + 20u''' + 120uu' \\ \\ w_{t_3} - 6u_{t_5} = w''' - 6u''''' - 60uu''' - 60u'u'' + 6uw' - 6wu', \end{cases}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Зависимую переменную w можно исключить и записать эту систему в виде одного уравнения на $U = \int^x u dx$.

Уравнение B-КП имеет коммутационное представление в виде уравнения Захарова-Шабата

$$\partial_{t_5} B_3 - \partial_{t_3} B_5 + [B_3, B_5] = 0$$

для дифференциальных операторов

$$B_3 = \partial_x^3 + 6u\partial_x, \qquad B_5 = \partial_x^5 + 10u\partial_x^3 + 10u'\partial_x^2 + w\partial_x.$$

В свою очередь, уравнение Захарова-Шабата – это условие совместности линейных задач

$$\partial_{t_3}\psi = B_3\psi, \qquad \partial_{t_5}\psi = B_5\psi$$

для волновой функции ψ, зависящей от спектрального параметра z.

Как и в случае КП, у иерархии B-КП существует тау-функция $\tau = \tau(x, t_3, t_5, \ldots)$. Подстановки

$$u = \partial_x^2 \log\tau, \qquad w = \frac{10}{3}\,\partial_{t_3}\partial_x \log\tau + \frac{20}{3}\,\partial_x^4 \log\tau + 20(\partial_x^2 \log\tau)^2$$

обращают первое уравнение системы B-КП в тривиальное тождество, а второе принимает билинейную форму.

Задача. Покажите, что второе уравнение в терминах тау-функции становится билинейным и принимает вид

$$\Big(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5\Big)\tau\cdot\tau = 0,$$

где D_i – дифференциальные операторы Хироты, действие которых определяется правилом

$$P(D_1, D_3, D_5, \ldots)\tau \cdot \tau = P(\partial_{y_1}, \partial_{y_3}, \partial_{y_5}, \ldots)\tau(x + y_1, t_3 + y_3, \ldots)\tau(x - y_1, t_3 - y_3, \ldots)\Big|_{y_i=0}$$

для любого полинома $P(D_1, D_3, D_5, \ldots)$.

Волновая функция выражается через тау-функцию по формуле

$$\psi = \exp\Big(\sum_{k=1,3,5,\ldots} t_k z^k\Big)\frac{\tau\Big(t_1 - 2z^{-1}, t_3 - \frac{2}{3}\,z^{-3}, t_5 - \frac{2}{5}\,z^{-5}, \ldots\Big)}{\tau(t_1, t_3, t_5, \ldots)},$$

аналогичной соответствующей формуле в теории иерархии КП.

Динамика полюсов эллиптических решений уравнения B-КП

Уравнения движения для полюсов эллиптических решений. Наша цель – изучить двоякопериодические (эллиптические) решения по переменной x. Для таких решений тау-функция представляет собой "эллиптический полином" от x, т.е. функцию вида

$$\tau = Ae^{cx^2/2}\prod_{i=1}^{N}\sigma(x - x_i)$$

с некоторой константой c. Соответственно, $u = \partial_x^2 \log\tau$ – эллиптическая функция с двойными полюсами в точках x_i:

$$u = c - \sum_{i=1}^{N}\wp(x - x_i).$$

Полюса зависят от времен t_3, t_5. Мы покажем, что зависимость от $t_3 = t$ описывается ньютоновскими уравнениями движения

$$\ddot{x}_i + 6\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i + \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j) - 72\sum_{[ijk]}\wp(x_i - x_j)\wp'(x_i - x_k) = 0,$$

где в последней сумме суммирование ведется по всем различным индексам i, j, k. Характерное свойство этих уравнений – наличие как двух-частичного, так и трехчастичного взаимодействия, а также зависимость взаимодействия от скоростей. Гамильтонова структура этой динамической системы, если она существует, неизвестна.

Согласно методу Кричевера, нужно обратиться к линейной задаче $\partial_t\psi = B_3\psi$ для функции ψ:

$$\partial_t\psi = \partial_x^3\psi + 6u\partial_x\psi.$$

Так как коэффициентная функция u двоякопериодична, решения надо искать среди двоякоблоховских функций. Полюсной анзац для волновой функции аналогичен тому, который мы использовали в случае КП:

$$\psi = e^{xz+tz^3}\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi(x - x_i, \lambda).$$

Как обычно, мы часто будем опускать второй аргумент функции Φ и писать просто $\Phi(x)=\Phi(x,\lambda)$. Нам понадобятся также производные по x: $\Phi'(x)=\partial_x\Phi(x,\lambda)$, $\Phi''(x)=\partial_x^2\Phi(x,\lambda)$, и т. д.

Заметим, что константу c в разложении функции u по полюсам можно устранить простым преобразованием $x\to x-6ct$, $t\to t$ (или $\partial_x\to\partial_x$, $\partial_t\to\partial_t+6c\partial_x$ для векторных полей). Поэтому для простоты мы сразу положим $c=0$.

Подстановка полюсного анзаца в линейную задачу с $u=-\sum\limits_i\wp(x-x_i)$ приводит к соотношению

$$\sum_i\dot c_i\Phi(x-x_i)-\sum_i c_i\dot x_i\Phi'(x-x_i)=3z^2\sum_i c_i\Phi'(x-x_i)+3z\sum_i c_i\Phi''(x-x_i)+\sum_i c_i\Phi'''(x-x_i)$$

$$-6z\Big(\sum_k\wp(x-x_k)\Big)\Big(\sum_i c_i\Phi(x-x_i)\Big)-6\Big(\sum_k\wp(x-x_k)\Big)\Big(\sum_i c_i\Phi'(x-x_i)\Big).$$

Достаточно сократить все полюса в точках x_i (вплоть до четвертого порядка). Нетрудно видеть, что полюса четвертого и третьего порядков сокращаются тождественно. Прямое вычисление показывает, что условия сокращения полюсов второго и первого порядков имеют вид

$$c_i\dot x_i=-(3z^2-3\wp(\lambda))c_i-6z\sum_{k\neq i}c_k\Phi(x_i-x_k)-6\sum_{k\neq i}c_k\Phi'(x_i-x_k)+6c_i\sum_{k\neq i}\wp(x_i-x_k),$$

$$\begin{aligned}\dot c_i &= 3z\wp(\lambda)c_i+2\wp'(\lambda)c_i-6z\sum_{k\neq i}c_k\Phi'(x_i-x_k)-6zc_i\sum_{k\neq i}\wp(x_i-x_k)\\ &\quad-6\sum_{k\neq i}c_k\Phi''(x_i-x_k)+6c_i\sum_{k\neq i}\wp'(x_i-x_k).\end{aligned}$$

Как и раньше, эти условия можно переписать в матричной форме:

$$\left\{\begin{array}{l} L\mathbf{c}=(3z^2-3\wp(\lambda))\mathbf{c}\\[1ex] \dot{\mathbf{c}}=M\mathbf{c},\end{array}\right.$$

где

$$L=-\dot X-6zA-6B+6D,$$

$$M=(3z\wp(\lambda)+2\wp'(\lambda))I-6zB-6zD-6C+6D',$$

и матрицы A, B, C, D, D', I таковы:

$$A_{ik}=(1-\delta_{ik})\Phi(x_i-x_k),$$

$$B_{ik}=(1-\delta_{ik})\Phi'(x_i-x_k),$$

$$C_{ik}=(1-\delta_{ik})\Phi''(x_i-x_k),$$

$$D_{ik}=\delta_{ik}\sum_{j\neq i}\wp(x_i-x_j),$$

$$D'_{ik}=\delta_{ik}\sum_{j\neq i}\wp'(x_i-x_j).$$

Матрицы A, B, C внедиагональные, а матрицы D, D' диагональные. Уравнение спектральной кривой имеет вид

$$\det\Big(L(z,\lambda) - (3z^2 - 3\wp(\lambda))I\Big) = 0.$$

Обратим внимание на то, что матрицы L, M зависят не только от λ, но и от z. Линейная система на вектор $\mathbf{c}$ переопределена. Дифференцируя первое уравнение по t, находим условие совместности системы:

$$\Big(\dot{L} + [L, M]\Big)\mathbf{c} = 0.$$

Справедливо следующее матричное тождество:

$$\dot{L} + [L, M] = -12D'\Big(L - (3z^2 - 3\wp(\lambda))I\Big) - \ddot{X} + 12D'(6D - \dot{X}) + 6\dot{D} - 6D''',$$

где $D'''_{ik} = \delta_{ik}\sum\limits_{j\neq i}\wp'''(x_i - x_j)$. Дадим его краткое доказательство. Подставляя явный вид матриц L, M, пишем:

$$\begin{aligned}
\dot{L} + [L, M] \;\; = \;\; & 36z^2\Big([A, B] + [A, D]\Big) \\
& - 6z\Big(\dot{A} - [\dot{X}, B]\Big) \\
& + 36z\Big([A, C] - [A, D'] + 2[B, D]\Big) \\
& - 6\Big(\dot{B} - [\dot{X}, C]\Big) - \ddot{X} + 6\dot{D} \\
& + 36\Big([B, C] - [B, D'] + [C, D]\Big).
\end{aligned}$$

Прежде всего заметим, что $\dot{A}_{ik} = (\dot{x}_i - \dot{x}_k)\Phi'(x_i - x_k)$, $\dot{B}_{ik} = (\dot{x}_i - \dot{x}_k)\Phi''(x_i - x_k)$, и, следовательно, $\dot{A} = [\dot{X}, B]$, $\dot{B} = [\dot{X}, C]$. Выражение $[A, B] + [A, D]$ можно преобразовать с помощью тождества

$$\Phi(x,\lambda)\Phi'(y,\lambda) - \Phi(y,\lambda)\Phi'(x,\lambda) = \Phi(x + y,\lambda)(\wp(x) - \wp(y)).$$

При $i \neq k$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\Big([A, B] + [A, D]\Big)_{ik} \\
&= \sum_{j\neq i,k}\Phi(x_i - x_j)\Phi'(x_j - x_k) - \sum_{j\neq i,k}\Phi'(x_i - x_j)\Phi(x_j - x_k) \\
&\quad + \Phi(x_i - x_k)\Big(\sum_{j\neq k}\wp(x_j - x_k) - \sum_{j\neq i}\wp(x_i - x_j)\Big) = 0,
\end{aligned}$$

так что $[A, B] + [A, D]$ – диагональная матрица. Чтобы ее найти, возьмем предел приведенного выше тождества при $y \to -x$:

$$\Phi(x,\lambda)\Phi'(-x,\lambda) - \Phi(-x,\lambda)\Phi'(x,\lambda) = \wp'(x),$$

откуда

$$\Big([A, B] + [A, D]\Big)_{ii}$$

$$= \sum_{j\neq i}\Big(\Phi(x_i-x_j)\Phi'(x_j-x_i)-\Phi'(x_i-x_j)\Phi(x_j-x_i)\Big) = \sum_{j\neq i}\wp'(x_i-x_j) = D'_{ii},$$

так что в итоге получаем матричное тождество

$$[A,B]+[A,D]=D'.$$

Комбинируя производные от приведенного выше тождества по x и y, получим тождества

$$\Phi(x)\Phi''(y)-\Phi(y)\Phi''(x) = 2\Phi'(x+y)(\wp(x)-\wp(y))+\Phi(x+y)(\wp'(x)-\wp'(y)),$$

$$\Phi'(x)\Phi''(y)-\Phi'(y)\Phi''(x) = \Phi''(x+y)(\wp(x)-\wp(y))+\Phi'(x+y)(\wp'(x)-\wp'(y)),$$

где мы для краткости опустили второй аргумент функции Φ. Их пределы при $y\to -x$ дают тождества

$$\Phi(x)\Phi''(-x)-\Phi(-x)\Phi''(x)=0,$$

$$\Phi'(x)\Phi''(-x)-\Phi'(-x)\Phi''(x) = -\frac{1}{6}\,\wp'''(x)-\wp(\lambda)\wp'(x).$$

Используя эти формулы, нетрудно доказать следующие матричные тождества:

$$[A,C]=2[D,B]+D'A+AD',$$

$$[B,C]=[D,C]+D'B+BD'-\frac{1}{6}\,D'''-\wp(\lambda)D',$$

с помощью которых приходим к нашему основному тождеству для $\dot L+[L,M]$.

Из него следует, что условие совместности линейной системы для вектора $\mathbf{c}$ требует обращения в 0 диагональной матрицы

$$-\ddot X+12D'(6D-\dot X)+6\dot D-6D'''.$$

Это дает уравнения движения для полюсов x_i. Расписывая диагональные элементы явно, будем иметь:

$$\ddot x_i+6\sum_{j\neq i}(\dot x_i+\dot x_j)\wp'(x_i-x_j)-72\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i}\wp(x_i-x_j)\wp'(x_i-x_k)+6\sum_{j\neq i}\wp'''(x_i-x_j)=0.$$

С учетом тождества $\wp'''(x)=12\wp(x)\wp'(x)$ получаем уравнения движения в виде

$$\ddot x_i+6\sum_{j\neq i}(\dot x_i+\dot x_j)\wp'(x_i-x_j)-72\sum_{[ijk]}\wp(x_i-x_j)\wp'(x_i-x_k)=0,$$

где в последней сумме суммирование ведется по всем различным индексам i,j,k. В рациональном пределе эти уравнения превращаются в

$$\ddot x_i-12\sum_{j\neq i}\frac{\dot x_i+\dot x_j}{(x_i-x_j)^3}+144\sum_{[ijk]}\frac{1}{(x_i-x_j)^2(x_i-x_k)^3}=0.$$

Представление Манакова и интегралы движения. Полученные уравнения движения не имеют представления Лакса, но имеют коммутационное представление

$$\dot{L} + [L, M] = -12D'(L - \Lambda I),$$

где $\Lambda = 3(z^2 - \wp(\lambda))$. Это представление в виде тройки Манакова. Эволюция матрицы Лакса $L \to L(t)$ не изоспектральна, но тем не менее $\det(L(z,\lambda) - \Lambda I)$ является интегралом движения. В самом деле, из представления Манакова следует, что

$$\frac{d}{dt} \log\det(L - \Lambda I) = \frac{d}{dt} \operatorname{tr}\log(L - \Lambda I)$$

$$= \operatorname{tr}\Big(\dot{L}(L - \Lambda I)^{-1}\Big) = -12\operatorname{tr}D' = 0,$$

поскольку матрица D' бесследовая: функция $\wp'$ нечетная, и поэтому

$$\operatorname{tr}D' = \sum_{i \neq j} \wp'(x_i - x_j) = 0.$$

Выражение

$$R(z,\lambda) = \det\Big(3(z^2 - \wp(\lambda))I - L(z,\lambda)\Big)$$

является полиномом по z степени $2N$. Его коэффициенты – интегралы движения (не все из них независимы и некоторые могут быть тривиальными). Применив преобразование подобия $L \to G^{-1}LG$ с диагональной матрицей $G_{ij} = \delta_{ij}e^{-\zeta(\lambda)x_i}$, заключаем, что коэффициенты $R_k(\lambda)$ полинома

$$R(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{2N} R_k(\lambda) z^k$$

являются эллиптическими функциями от λ с полюсом (при больших k высокого порядка) при $\lambda = 0$. Они обладают свойством $R_k(-\lambda) = (-1)^k R_k(\lambda)$ и могут быть представлены как линейные комбинации $\wp$-функции и ее производных. Пример ($N = 2$):

$$\det_{2\times 2}\Big(3(z^2 - \wp(\lambda))I - L\Big) = 9z^4 + 3z^2\Big(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 18\wp(\lambda)\Big) - 36z\wp'(\lambda) - 3\wp(\lambda)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$$

$$+ \dot{x}_1\dot{x}_2 - 6(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\wp(x_1 - x_2) - 27\wp^2(\lambda) + 9g_2,$$

где g_2 – коэффициент в разложении $\wp$-функции вблизи $x = 0$: $\wp(x) = x^{-2} + \frac{1}{20}\, g_2 x^2 + \frac{1}{28}\, g_3 x^4 + O(x^6)$. Следовательно, при $N = 2$ имеются два интеграла движения: $I_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$ и $I_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + 6(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\wp(x_1 - x_2)$.

Задача. Докажите, что

$$I_1 = \sum_i \dot{x}_i,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 + 6\sum_{i\neq j} \dot{x}_i \wp(x_{ij}) - 18\sum_{[ijk]} \wp(x_{ij})\wp(x_{ik})$$

являются интегралами движения. В выражении для I_2 последняя сумма берется по всем тройкам различных индексов i, j, k от 1 до N.

Доказательство основано на следующих тождествах для $\wp$-функции:

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \prod_{k=1, \neq i}^{n} \wp(x_i - x_k) = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

(для $n = 3$ и $n = 4$). Доказательство этих тождеств стандартно. Левая часть – эллиптическая функция от x_1. Разложив ее вблизи возможных полюсов при $x_1 = x_k$, $k = 2, \dots, n$, можно убедиться, что она регулярна, и тем самым не зависит от x_1. В силу симметрии при перестановке переменных это константа, не зависящая от всех x_i. Положив $x_k = kx$, видим, что она равна нулю.

Спектральная кривая задается уравнением

$$R(z, \lambda) = \det\Big(3(z^2 - \wp(\lambda))I - L(z, \lambda)\Big) = 0.$$

Легко видеть, что $L(-z, -\lambda) = L^{\mathrm{T}}(z, \lambda)$, так что спектральная кривая обладает голоморфной инволюцией $\iota : (z, \lambda) \mapsto (-z, -\lambda)$. При фиксированных значениях интегралов движения уравнение $R(z, \lambda) = 0$ задает алгебраическую кривую Γ, представляющую из себя $2N$-листное накрытие эллиптической кривой $\mathcal{E}$, реализованной как фактор комплексной плоскости по решетке с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Можно показать, что род кривой Γ равен $2N$.

Слипающиеся частицы в системе КМ

В работе [30] было показано, что уравнения движения, выведенные в предыдущем разделе для полюсов эллиптических решений уравнения В-КП, совпадают с динамикой частиц системы КМ, попарно слипшихся в различных точках, под действием гамильтонова потока с гамильтонианом H_3. Стандартный поток КМ с гамильтонианом H_2 немедленно разрушает такую конфигурацию, но, как мы покажем, она инвариантна относительно потока с гамильтонианом

$$H_3 = -\sum_i p_i^3 + 3\sum_{i \neq j} p_i \wp(x_i - x_j).$$

Рассмотрим конфигурацию частиц в системе КМ с четным числом частиц $N = 2n$, в которой частицы слипаются в пары, так что их координаты удовлетворяют условиям $x_{2i-1} = x_{2i}$, $i = 1, \dots, n$. Однако, буквально положить $x_{2i-1} = x_{2i}$ нельзя, поскольку этот предел сингулярен, и уравнения не будут иметь смысла. Нужно положить $x_{2i} - x_{2i-1} = O(\varepsilon)$ и в конце рассмотреть предел $\varepsilon \to 0$. А именно, положим

$$x_{2i} - x_{2i-1} = \varepsilon\delta_i, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где δ_i вообще говоря может зависеть от времени. Определим подмогоообразие $\mathcal{B}_n(\varepsilon) = \mathcal{B}_n(\varepsilon, \{\delta_i\})$ в $2N = 4n$-мерном фазовом пространстве системы КМ, наложив вместе с условиями на координаты $x_{2i} - x_{2i-1} = \varepsilon\delta_i$ следующие условия на импульсы:

$$p_{2i-1} = \frac{1}{\varepsilon\delta_i} + \alpha_i\varepsilon + \beta_i\varepsilon^2,$$

$$p_{2i} = -\frac{1}{\varepsilon\delta_i} - \alpha_i\varepsilon + \beta_i\varepsilon^2,$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(\varepsilon) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}\varepsilon + \alpha_{i,2}\varepsilon^2 + \dots, \quad \beta_i = \beta_i(\varepsilon) = \beta_{i,0} + \beta_{i,1}\varepsilon + \beta_{i,2}\varepsilon^2 + \dots$$

(некоторые ряды по ε). При данных δ_i величины β_i окажутся фиксированными (мы увидим это позднее), так что подмногообразие $\mathcal{B}_n(\varepsilon)$ с координатами x_{2i-1}, α_i имеет размерность $2n$.

Покажем, что подмногообразие $\mathcal{B}_n(\varepsilon)$ инвариантно относительно потока с гамильтонианом H_3, гамильтоновы уравнения движения которого имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -3p_i^2 + 3\sum_{j\neq i}\wp(x_i - x_j), \\ \dot{p}_i = -3\sum_{j\neq i}(p_i + p_j)\wp'(x_i - x_j). \end{cases}$$

Мы имеем:

$$\dot{x}_{2i-1} = -6\frac{\alpha_i}{\delta_i} + 6\sum_{j\neq i}\wp(x_{2i-1} - x_{2j-1}) + O(\varepsilon)$$

и для самомогласованности нужно потребовать, чтобы

$$\dot{x}_{2i} - \dot{x}_{2i-1} = \varepsilon\dot{\delta}_i,$$

т.е. что эволюция во времени не порождает неисчезающие с $\varepsilon \to 0$ члены (это означает, пары слипшихся частиц не разрушаются). Из уравнения для $\dot{x}_i$ имеем:

$$\begin{aligned} \partial_t(x_{2i} - x_{2i-1}) &= 3(p_{2i-1}^2 - p_{2i}^2) \\ &+3\sum_{j\neq i}\Big(\wp(x_{2i} - x_{2j-1}) + \wp(x_{2i} - x_{2j})\Big) \\ &-3\sum_{j\neq i}\Big(\wp(x_{2i-1} - x_{2j-1}) + \wp(x_{2i-1} - x_{2j})\Big). \end{aligned}$$

С учетом того, что $p_{2i-1}^2 - p_{2i}^2 = 4\beta_i\delta_i^{-1}\varepsilon + 4\alpha_i\beta_i\varepsilon^3$, получаем, разложив правую часть по степеням ε, что $\dot{x}_{2i} - \dot{x}_{2i-1} = \varepsilon\dot{\delta}_i$ удовлетворяется и

$$\dot{\delta}_i = 12\beta_{i,0}\delta_i^{-1} + 6\delta_i\sum_{j\neq i}\wp'(x_{2i-1} - x_{2j-1}) \quad \text{в порядке } \varepsilon,$$

$$4\beta_{i,1} = \delta_i^2\sum_{j\neq i}(\delta_j - \delta_i)\wp''(x_{2i-1} - x_{2j-1}) \quad \text{в порядке } \varepsilon^2,$$

$$24\alpha_i\beta_{i,0}\delta_i + 24\beta_{i,2} + \delta_i^2\sum_{j\neq i}(2\delta_i^2 + 3\delta_j^2 - 3\delta_i\delta_j)\wp'''(x_{2i-1} - x_{2j-1}) = 0 \quad \text{в порядке } \varepsilon^3.$$

Далее, распишем второе из гамильтоновых уравнений движения:

$$\dot{p}_{2i-1} = -3(p_{2i-1} + p_{2i})\wp'(x_{2i-1} - x_{2i})$$

$$-3\sum_{j\neq i}\Big((p_{2i-1} + p_{2j-1})\wp'(x_{2i-1} - x_{2j-1}) + (p_{2i-1} + p_{2j})\wp'(x_{2i-1} - x_{2j})\Big).$$

Разложив правую часть по степеням ε в порядках ε^{-1}, ε^0 получаем те же уравнения (что говорит о самосогласованности процедуры) а в следующем порядке получаем уравнение

$$\dot{\alpha}_i = -6\alpha_i \sum_{j\neq i} \wp'(x_{2i-1}-x_{2j-1}) - \frac{3}{2}\sum_{j\neq i}(\delta_i^{-1}-\delta_j^{-1})\delta_j^2\wp'''(x_{2i-1}-x_{2j-1}) - 12\delta_i^{-3}\beta_{i,2}.$$

Согласованность с эволюцией во времени требует, чтобы

$$\dot{p}_{2i-1} + \dot{p}_{2i} = O(\varepsilon^2).$$

Из второго гамильтонова уравнения имеем:

$$\begin{aligned}
-(\dot{p}_{2i-1} + \dot{p}_{2i}) \;\; = \;\; & 3p_{2i-1}\sum_{j\neq i}\Big(\wp'(x_{2i-1}-x_{2j-1}) + \wp'(x_{2i-1}-x_{2j})\Big) \\
& +3p_{2i}\sum_{j\neq i}\Big(\wp'(x_{2i}-x_{2j-1}) + \wp'(x_{2i}-x_{2j})\Big) \\
& +3\sum_{j\neq i} p_{2j-1}\wp'(x_{2i-1}-x_{2j-1}) + 3\sum_{j\neq i} p_{2j}\wp'(x_{2i-1}-x_{2j}) \\
& +3\sum_{j\neq i} p_{2j-1}\wp'(x_{2i}-x_{2j-1}) + 3\sum_{j\neq i} p_{2j}\wp'(x_{2i}-x_{2j}).
\end{aligned}$$

На первый взгляд, правая часть имеет порядок $O(1)$. Однако, аккуратное разложение по степеням ε показывает, что члены $O(1)$ и $O(\varepsilon)$ сокращаются, так что правая часть имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, как и требуется.

Ограничим эволюцию во времени на подмногообразие $\mathcal{B}_n = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_n(\varepsilon)$, чтобы получить уравнения движения для пар с координатами x_{2i-1}, т.е. уравнения, связывающие $\ddot{x}_{2i-1}$, $\dot{x}_{2i-1}$ и x_{2i-1}. Из

$$\dot{x}_{2i-1} = -6\frac{\alpha_i}{\delta_i} + 6\sum_{j\neq i}\wp(x_{2i-1}-x_{2j-1}) + O(\varepsilon)$$

имеем:

$$\ddot{x}_{2i-1} = -6\delta_i^{-1}\dot{\alpha}_i + 6\alpha_i\delta_i^{-2}\dot{\delta}_i + 6\sum_{j\neq i}(\dot{x}_{2i-1}-\dot{x}_{2j-1})\wp'(x_{2i-1}-x_{2j-1}).$$

Подставив сюда $\dot{\alpha}_i$, видим, что все δ_i сокращаются, и в пределе $\varepsilon\to 0$ получаются следующие уравнения движения:

$$\ddot{x}_i + 6\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i+\dot{x}_j)\wp'(x_i-x_j) - 72\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i}\wp(x_i-x_j)\wp'(x_i-x_k) + 6\sum_{j\neq i}\wp'''(x_i-x_j) = 0$$

(здесь i, j, k – нечетные числа от 1 до $2n-1$). Используя тождество $\wp'''(x) = 12\wp(x)\wp'(x)$, представим их в виде

$$\ddot{x}_i + 6\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i+\dot{x}_j)\wp'(x_i-x_j) - 72\sum_{[ijk]}\wp(x_i-x_j)\wp'(x_i-x_k) = 0.$$

Это в точности уравнения движения для полюсов эллиптических решений В-КП, выведенные в предыдущем разделе.

Вычисления значительно упрощаются, если с самого начала положить $\delta_i = 1$, т.е. $x_{2i} - x_{2i-1} = \varepsilon$. Это фиксирует "калибровочную свободу" в определении $\mathcal{B}_n(\varepsilon)$. Коэффициенты $\beta_{i,a}$ становятся функциями от x_{2j-1}, α_j. Приведенные выше формулы показывают, что ограничение динамики КМ с гамильтонианом H_3 на $\mathcal{B}_n$ можно представить как систему уравнений первого порядка

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{x}_{2i-1} = -6\alpha_i + 6\sum_{j\neq i}\wp(x_{2i-1}-x_{2j-1}),\\ &\dot{\alpha}_i = -12\alpha_i\sum_{j\neq i}\wp'(x_{2i-1}-x_{2j-1}) + \sum_{j\neq i}\wp'''(x_{2i-1}-x_{2j-1}). \end{aligned}\right.$$

Исключив отсюда α_i, приходим к написанным выше уравнениям движения.

Внимательный читатель, безусловно, подметит аналогию с тем, как мы получали уравнения движения деформированной системы РШ, рассмотрев пары частиц РШ с фиксированным расстоянием η между частицами в каждой паре. Эта аналогия не случайна. Уравнения движения для полюсов эллиптических решений В-КП могут быть получены из уравнений движения деформированной системы РШ в пределе $\eta \to 0$.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem*, Commun. Pure Appl. Math. **30** (1977) 95–148.

[4] И.М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функ. Анализ и его Прил. **12:1** (1978) 76–78.

[5] И.М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функ. Анализ и его Прил. **14:4** (1980) 45–54.

[6] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва, 1987.

[8] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва, 1989.

[9] Т. Мива, М. Джимбо, Э. Дате, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры*, Издательство МЦНМО, Москва, 2005.

[10] J. Harnad and F. Balogh, *Tau functions and their applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2021.

[11] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981), Singapore: World Scientific, 1983, 39–119.

[12] M. Jimbo and T. Miwa, *Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 943–1001.

[13] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, "Наука", 1990.

[14] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[15] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[16] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, "Наука", Москва, 1970.

[17] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[18] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[19] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[20] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[21] I. Krichever, A. Zabrodin, *Monodromy free linear equations and many-body systems*, Letters in Mathematical Physics 113:75 (2023).

[22] А. Забродин, *Об интегрируемости деформированной системы Руйсенарса-Шнайдера*, УМН **78:2** (2023) 149–188.

[23] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5844–5849.

[24] A. Zabrodin, *KP hierarchy and trigonometric Calogero-Moser hierarchy*, J. Math. Phys. **61** (2020) 043502.

[25] V. Prokofev, A. Zabrodin, *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero-Moser model*, Journal of Physics A: Math. Theor., **54** (2021) 305202.

[26] J. Gibbons, T. Hermsen, *A generalization of the Calogero-Moser system*, Physica D **11** (1984) 337–348.

[27] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey and M. Talon, *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **170** (1995) 83–119.

[28] И. Кричевер, А. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН **50:6** (1995) 3–56.

[29] D. Rudneva, A. Zabrodin, *Dynamics of poles of elliptic solutions to BKP equation*, Journal of Physics A: Math. Theor. **53** (2020) 075202.

[30] A. Zabrodin, *How Calogero-Moser particles can stick together*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 225201.

[31] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984) 1–95.

[32] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Physica D **229** (2007), no. 2, 184–190.

[33] В. Прокофьев, А. Забродин, *Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса-Шнайдера*, ТМФ **208** (2021) 282—309.

[34] I. Krichever, A. Zabrodin, *Toda lattice with constraint of type B*, Physica D **453** (2023) 133827.

[35] I. Krichever, *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, In: Algebraic geometry and number theory. In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th birthday. Ed. by Ginzburg, Victor. Basel: Birkhäuser. Progress in Mathematics **253** (2006) 497–514.

[36] I. Krichever, *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer variety*, Annals of Mathematics **172** (2010) 485–516.

[37] S. Wojciechowski, *The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **15** (1982) L653-L657.

[38] F.W. Nihhoff, G.D. Pang, *A time-discretized version of the Calogero-Moser model*, Phys. Lett. A **191** (1994) 101-107.

[39] F.W. Nihhoff, O. Ragnisco, V. Kuznetsov, *Integrable time-discretization of the Ruijsenaars-Schneider model*, Commun. Math. Phys. **176** (1996) 681-700.