Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 7

А.В. Забродин*

Иерархия КП

С уравнением КП связана целая бесконечная иерархия так называемых высших уравнений КП, с ним совместных. Чтобы ее ввести, нам понадобится техника псевдодифференциальных операторов.

Псевдодифференциальные операторы. Псевдодифференциальный оператор – это ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k \partial_x^{N-k}$, где v_k – функции, а оператор ∂_x имеет следующий стандартный закон коммутации с любой функцией: $\partial_x f = f' + f\partial_x$. Умножив обе части этого равенства на ∂_x^{-1} слева и справа, его можно также понимать как правило проноса оператора ∂_x^{-1} через функцию: $\partial_x^{-1} f = f\partial_x^{-1} - \partial_x f' \partial_x^{-1}$. Многократное применение дает

$$\partial_x^{-1} f = f\partial_x^{-1} - f'\partial_x^{-2} + f''\partial_x^{-3} + \dots .$$

Псевдодифференциальные операторы перемножаются как ряды Лорана с учетом некоммутативности символа ∂_x с коэффициентными функциями. Мы для краткости пишем $\partial_x f$, понимая под этим композицию оператора умножения на функцию f и оператора дифференцирования ∂_x, надеясь, что это не приведет к недоразумениям. Композиция обычно записывается как $\partial_x \circ f$, но педантичное использование этого обозначения на наш взгляд затрудняет чтение формул.

Задача. Для любых функций f, g докажите следующие тождества в алгебре псевдодифференциальных операторов:

а) $\quad (\partial_x - g)^{-1} f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{(n)} (\partial_x - g)^{-n-1},$

б) $\quad e^{-f}\partial_x^{-1} e^f = (\partial_x + f')^{-1},$

в) $\quad \partial_x^n f = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} \partial_x^{n-k}, \quad n \geq 0,$

*e-mail: zabrodin@itep.ru

г) $\quad \partial_x^{-n} f = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \begin{pmatrix} k+n-1 \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}\partial_x^{-n-k}, \quad n>0.$

Здесь $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент. Заметим, что формулы в) и г) можно объединить в одну, если распространить определение биномиального коэффициента на произвольные комплексные числа n с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$$

тогда при $n<0$ $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} k-n-1 \\ k \end{pmatrix}$. Для доказательства формул в) и г) можно воспользоваться индукцией по n.

Пусть дан псевдодифференциальный оператор $P = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \partial_x^{N-k}$. Число N называется порядком псевдодифференциального оператора. Будем обозначать P_+ его дифференциальную часть (т.е. сумму членов с неотрицательными степенями оператора ∂_x: $P_+ = \sum_{k=0}^{N} v_k \partial_x^{N-k}$), тогда $P_- = P - P_+$ – сумма членов с отрицательными степенями.

На псевдодифференциальные операторы можно распространить операцию сопряжения, определенную как $\partial_x^\dagger = -\partial_x$, $f^\dagger = f$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k \partial_x^{N-k}\right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} (-\partial_x)^{N-k} v_k.$$

Иерархия КП: уравнения Лакса и уравнения нулевой кривизны. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор $\mathcal{L}$ вида

$$\mathcal{L} = \partial_x + u_1 \partial_x^{-1} + u_2 \partial_x^{-2} + \dots,$$

в котором коэффициенты u_i – функции от x. Он называется оператором Лакса иерархии КП. Введем эволюцию в пространстве функций от x, наложив на $\mathcal{L}$ уравнения типа Лакса

$$\partial_{t_m}\mathcal{L} = [(\mathcal{L}^m)_+, \mathcal{L}], \qquad m = 1, 2, 3, \dots.$$

Здесь t_m – эволюционные параметры (“времена”). Каждое из этих уравнений задает бесконечную систему эволюционых уравнений на бесконечный набор функций u_i вида $\partial_{t_j} u_i = \mathcal{P}_{ij}(\{u_l\})$, где $\mathcal{P}_{ij}(\{u_l\})$ – дифференциальные полиномы от u_l. Генераторы потоков по t_m,

$$A_m = (\mathcal{L}^m)_+,$$

это дифференциальные операторы порядка m. Например, $A_1 = \partial_x$, $A_2 = \partial_x^2 + 2u_1$, $A_3 = \partial_x^3 + 3u_1\partial_x + u_2$.

Уравнение Лакса при $m=1$ гласит, что $\partial_{t_1}\mathcal{L} = [\partial_x, \mathcal{L}]$, или $\partial_{t_1} u_i = \partial_x u_i$, что позволяет отождествить t_1 с x. Иными словами, эволюция по первому времени просто сдвигает аргумент x у всех функций: $u_i(x) \to u_i(x+t_1)$. Эволюция по старшим временам в таком простом виде не выражается.

Имеется другое, эквивалентное представление иерархии КП, в котором псевдо-дифференциальный оператор Лакса в явном виде не участвует, а участвуют только дифференциальные операторы A_m. Мы сейчас покажем, что из уравнений Лакса следуют уравнения

$$\partial_{t_m} A_n - \partial_{t_n} A_m - [A_m, A_n] = 0$$

для всех $m, n \geq 1$, которые называются уравнениями Захарова-Шабата или условиями нулевой кривизны. Для доказательства сначала заметим, что в силу уравнений Лакса $\partial_{t_m} \mathcal{L}^n = [A_m, \mathcal{L}^n]$ для всех n, и тогда

$$\begin{aligned} & \partial_{t_m} (\mathcal{L}^n)_+ - \partial_{t_n} (\mathcal{L}^m)_+ - [A_m, A_n] \\ = \;& \Big(\partial_{t_m} \mathcal{L}^n - \partial_{t_n} \mathcal{L}^m - [A_m, A_n]\Big)_+ \\ = \;& \Big([A_m, \mathcal{L}^n] - [A_n, \mathcal{L}^m] - [A_m, A_n]\Big)_+ \\ = \;& \Big([A_m,\, \mathcal{L}^n - A_n] - [A_n, \mathcal{L}^m]\Big)_+ \\ = \;& \Big([(\mathcal{L}^m)_+, (\mathcal{L}^n)_-] - [(\mathcal{L}^n)_+, \mathcal{L}^m]\Big)_+ \\ = \;& \Big([\mathcal{L}^m, (\mathcal{L}^n)_-] + [\mathcal{L}^m, (\mathcal{L}^n)_+]\Big)_+ \;=\; \Big([\mathcal{L}^m, \mathcal{L}^n]\Big)_+ \;=\; 0. \end{aligned}$$

Верно и обратное утверждение – из всей совокупности уравнений Захарова-Шабата следуют уравнения Лакса. Очевидно, уравнение Захарова-Шабата эквивалентно коммутационному соотношению $[\partial_{t_m} - A_m,\, \partial_{t_n} - A_n] = 0$.

Каждое из уравнений Захарова-Шабата порождает замкнутую систему из конечного числа дифференциальных уравнений на конечное число неизвестных функций, которая, однако, не представляется в эволюционном виде и содержит производные по трем временам: $x = t_1$, t_m, t_n. Если $n > m$, получается система из $n-1$ уравнения на неизвестные функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Именно про эти системы обычно говорят как про уравнения иерархии КП. Простейший нетривиальный пример соответствует выбору $m = 2$, $n = 3$. Обозначив $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t$, $u = 2u_1$, $w = u_2$, придем к системе двух уравнений на u и w, из которой можно исключить w и получить уравнение КП на u. В общем случае получающуюся систему нельзя свести к одному уравнению.

Линейные задачи и тау-функция. Уравнения Захарова-Шабата являются условиями совместности линейных задач на волновую функцию ψ

$$\partial_{t_m} \psi = A_m \psi.$$

Совместность означает наличие большого запаса общих решений. Их можно искать в виде ряда по спектральному параметру z, который, хотя явно и не входит в формулировку линейных задач, играет важную роль. Обозначим через $\mathbf{t}$ множество времен t_m, $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$, и введем обозначение

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k.$$

Волновую функцию можно искать в виде

$$\psi(x, \mathbf{t}; z) = e^{xz+\xi(\mathbf{t},z)}\Big(1 + \xi_1(x, \mathbf{t})z^{-1} + \xi_2(x, \mathbf{t})z^{-2} + \ldots\Big).$$

Введем еще сопряженную (двойственную) волновую функцию ψ^* (звездочка здесь и далее не означает комплексного сопряжения), которая удовлетворяет сопряженным линейным уравнениям

$$-\partial_{t_m}\psi^* = A_m^\dagger \psi^*$$

и представляется в виде ряда

$$\psi^*(x, \mathbf{t}; z) = e^{-xz-\xi(\mathbf{t},z)}\Big(1 + \xi_1^*(x, \mathbf{t})z^{-1} + \xi_2^*(x, \mathbf{t})z^{-2} + \ldots\Big).$$

Можно показать, что вся совокупность линейных задач эквивалентна интегральному соотношению

$$\oint_{C_\infty} \psi(x, \mathbf{t}; z)\psi^*(x, \mathbf{t}'; z)dz = 0,$$

справедливому для любых наборов времен $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$, где контур C_∞ – большая окружность вокруг ∞ радиуса $R \to \infty$. Иными словами, коэффициент при $1/z$ в разложении подинтегрального выражения в ряд Лорана должен быть равен 0. В свою очередь, из этого интегрального соотношения следует, что существует функция $\tau(x, \mathbf{t})$ такая, что

$$\psi(x, \mathbf{t}; z) = e^{xz+\xi(\mathbf{t},z)}\,\frac{\tau(x, \mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau(x, \mathbf{t})},$$

$$\psi^*(x, \mathbf{t}; z) = e^{-xz-\xi(\mathbf{t},z)}\,\frac{\tau(x, \mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau(x, \mathbf{t})},$$

где мы используем обозначение

$$\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = \Big\{t_1 \pm z^{-1}, t_2 \pm \tfrac{1}{2}z^{-2}, t_3 \pm \tfrac{1}{3}z^{-3}, \ldots\Big\}.$$

Функция $\tau(x, \mathbf{t})$ – это тау-функция иерархии КП. Интегральное соотношение для волновых функций переписывается как билинейное интегральное соотношение для тау-функции:

$$\oint_{C_\infty} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}\tau(x, \mathbf{t} - [z^{-1}])\tau(x, \mathbf{t}' + [z^{-1}])dz = 0,$$

которое служит производящим соотношением для всех уравнений иерархии КП. Дифференциальные уравнения иерархии КП на тау-функцию получаются разложением интегрального билинейного соотношения в ряд по степеням $\mathbf{t} - \mathbf{t}'$. Коэффициентные функции u_i в операторе Лакса выражаются как различные комбинации производных от тау-функции по временам. Например,

$$u_1 = \partial_x^2 \log\tau, \quad u_2 = \frac{3}{2}(\partial_x^3 \log\tau + \partial_{t_2}\partial_x \log\tau).$$

Напомним, что $\partial_x = \partial_{t_1}$.

В следующем разделе нам потребуется следствие интегрального билинейного соотношения, которое получается дифференцированием его по t_m с последующим полаганием $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$. В результате получается соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty} z^m\psi(x, \mathbf{t}; z)\psi^*(x, \mathbf{t}; z)dz = \partial_{t_m}\partial_x \log\tau(x, \mathbf{t}).$$

Соответствие с системой КМ на уровне иерархий

Мы видели, что динамика полюсов рациональных по $x = t_1$ решений уравнения КП по времени t_2 совпадает с гамильтоновым потоком рациональной системы КМ с гамильтонианом $H_2 = \mathrm{tr} L^2$. Оказывается, это соответствие можно распространить на всю иерархию: динамика полюсов рациональных по $x = t_1$ решений уравнения КП по любому из высших времен t_m совпадает с гамильтоновым потоком рациональной системы КМ с гамильтонианом $H_m = \mathrm{tr} L^m$. Это результат был получен Шиотой [23] в 1994 году. Здесь мы воспроизведем доказательство в несколько ином виде.

Тау-функция рациональных решений с полюсами в точках x_j – это полином с корнями x_j:

$$\tau(x, \mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j(\mathbf{t})),$$

так что

$$u_1 = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(x - x_j(\mathbf{t}))^2}.$$

Волновые функции ψ, ψ^* имеют простые полюса в нулях тау-функции. Их можно представить в виде

$$\psi = e^{xz+\xi(\mathbf{t},z)} \Big(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{x - x_j(\mathbf{t})}\Big),$$

$$\psi^* = e^{-xz-\xi(\mathbf{t},z)} \Big(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j^*}{x - x_j(\mathbf{t})}\Big).$$

Подставляя это в полученное выше соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} z^m \psi(x, \mathbf{t}; z) \psi^*(x, \mathbf{t}; z) dz = \partial_{t_m} \partial_x \log \tau(x, \mathbf{t}),$$

будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} z^m \Big(1 + \sum_j \frac{c_j^*}{x - x_j}\Big) \Big(1 + \sum_j \frac{c_j}{x - x_j}\Big) = \sum_j \frac{\partial_{t_m} x_j}{(x - x_j)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при старших полюсах, получим:

$$\partial_{t_m} x_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} z^m c_j^* c_j dz.$$

Коэффициенты c_i, c_i^* можно рассматривать как компоненты векторов

$$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{c}^* = (c_1^*, \ldots, c_N^*).$$

Повторяя вывод динамики полюсов по $y = t_2$ при фиксированных остальных временах, имеем

$$\mathbf{c} = -(zI - L)^{-1} \mathbf{e}, \qquad \mathbf{c}^* = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} (zI - L)^{-1},$$

где L – матрица Лакса рациональной системы КМ (с $g = 1$). Тогда

$$\partial_{t_m} x_j = \operatorname*{res}_{\infty} \sum_{k,k'} z^m \Big(\frac{1}{zI - L}\Big)_{kj} \Big(\frac{1}{zI - L}\Big)_{jk'}$$

$$= \operatorname*{res}_{\infty} \operatorname{tr}\left(z^m E \frac{1}{zI - L} E_j \frac{1}{zI - L} \right),$$

где E – матрица, состоящая из всех единиц, а E_j – диагональная матрица с единицей в месте jj и нулями в остальных местах. Воспользуемся тем, что $E_j = -\partial L/\partial p_j$ и вспомним коммутационное соотношение $[L, X] = E - I$, из которого выразим

$$E = LX - XL + I.$$

Теперь найдем:

$$\operatorname{tr}\left(E \frac{1}{zI - L} E_j \frac{1}{zI - L} \right) = -\operatorname{tr}\left((LX - XL + I) \frac{1}{zI - L} \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{1}{zI - L} \right)$$

$$= -\operatorname{tr}\left(X \frac{1}{zI - L} \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{L}{zI - L} \right) + \operatorname{tr}\left(X \frac{L}{zI - L} \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{1}{zI - L} \right) - \operatorname{tr}\left(\frac{1}{zI - L} \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{L}{zI - L} \right)$$

$$= \operatorname{tr}\left(X \frac{1}{zI - L} \frac{\partial L}{\partial p_j} \right) - \operatorname{tr}\left(X \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{1}{zI - L} \right) + \frac{\partial}{\partial p_j} \operatorname{tr} \frac{1}{zI - L}.$$

Поскольку матрицы X и $\partial L/\partial p_j$ диагональны, разность первых двух членов равна нулю, и остается

$$\partial_{t_m} x_j = -\frac{\partial}{\partial p_j} \operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m \operatorname{tr} \frac{1}{zI - L} \right) = \frac{\partial}{\partial p_j} \operatorname{tr} L^m = \frac{\partial H_m}{\partial p_j}.$$

Мы получили первую группу гамильтоновых уравнений для потока по t_m.

Чтобы вывести вторую группу гамильтоновых уравнений, продифференцируем соотношение

$$\partial_{t_m} x_j = -\operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m c_j^* c_j \right)$$

по t_2, и, обозначая эту производную точкой над буквой, будем иметь:

$$\partial_{t_m} \dot{x}_j = -\operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m (c_j^* \dot{c}_j + \dot{c}_j^* c_j) \right).$$

Из анализа динамики полюсов по t_2 следует, что $\dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}$, $\dot{\mathbf{c}}^* = -\mathbf{c}^* M$, где M – M-матрица пары Лакса для рациональной системы КМ (с $g = 1$). Отсюда

$$\partial_{t_m} p_j = \frac{1}{2} \partial_{t_m} \dot{x}_j = -\frac{1}{2} \sum_k \operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m (c_i^* M_{jk} c_k - c_k^* M_{kj} c_j) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname*{res}_{\infty} \left[z^m \operatorname{tr}\left(E \frac{1}{zI - L} [E_j, M] \frac{1}{zI - L} \right) \right]$$

$$= \operatorname*{res}_{\infty} \left[z^m \operatorname{tr}\left(LX - XL + I \right) \frac{1}{zI - L} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{1}{zI - L} \right) \right],$$

Отметим, что матрица $[E_j, M] = 2\partial L/\partial x_j$ имеет матричные элементы

$$[E_j, M]_{ik} = 2 \frac{\delta_{ij} - \delta_{jk}}{(x_i - x_k)^2}.$$

Мы пришли к такому же выражению, как и для $\partial_{t_m} x_i$, только вместо производной по p_j теперь стоит производная по x_j. Повторяя приведенную выше цепочку равенств, получаем в итоге

$$\partial_{t_m} p_j = -\frac{\partial}{\partial x_j}\,\mathrm{tr} L^m = -\frac{\partial H_m}{\partial x_j},$$

что есть вторая группа гамильтоновых уравнений. Итак, мы показали, что потоки по временам t_m в иерархии КП находятся в соответствии с высшими гамильтоновыми потоками системы КМ с гамильтонианами $H_m = \mathrm{tr} L^m$.

Аналогичное соответствие между потоками иерархии КП и потоками в системе КМ можно установить также в тригонометрическом и эллиптическом случаях. Оно, однако, принимает более сложный вид и требует более изощренной техники для своего доказательства. Так, в тригонометрическом случае потокам по t_m в иерархии КП отвечают гамильтоновы потоки с гамильтонианами

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2(m+1)\gamma}\mathrm{tr}\Big((L+\gamma I)^{m+1} - (L-\gamma I)^{m+1}\Big),$$

которые являются линейными комбинациями гамильтонианов $H_m = \mathrm{tr} L^m$. Подробное доказательство содержится в работе [24]. Эллиптический случай был проанализирован в работе [25]. Результат формулируется следующим образом. Введем функцию $\lambda(z)$, которая определяется из уравнения спектральной кривой

$$\det\Big((z+\zeta(\lambda))I - L(\lambda)\Big) = 0$$

с матрицей Лакса эллиптической системы КМ $L(\lambda)$, зависящей от спектрального параметра λ. Эта функция, имеющая при $z \to \infty$ разложение

$$\lambda(z) = -Nz^{-1} + \sum_{m\geq 1} \mathcal{H}_m z^{-m-1},$$

является производящей функцией гамильтонианов

$$\mathcal{H}_m = -\operatorname*{res}_{\infty}(z^m \lambda(z))$$

эллиптической системы КМ, которые определяют динамику полюсов эллиптических решений КП по временам t_m.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem*, Commun. Pure Appl. Math. **30** (1977) 95–148.

[4] И.М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функ. Анализ и его Прил. **12:1** (1978) 76–78.

[5] И.М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функ. Анализ и его Прил. **14:4** (1980) 45–54.

[6] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва, 1987.

[8] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва, 1989.

[9] Т. Мива, М. Джимбо, Э. Дате, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры*, Издательство МЦНМО, Москва, 2005.

[10] J. Harnad and F. Balogh, *Tau functions and their applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2021.

[11] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981), Singapore: World Scientific, 1983, 39–119.

[12] M. Jimbo and T. Miwa, *Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 943–1001.

[13] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[14] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[15] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[16] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[17] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[18] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[19] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[20] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[21] I. Krichever, A. Zabrodin, *Monodromy free linear equations and many-body systems*, Letters in Mathematical Physics 113:75 (2023).

[22] А. Забродин, *Об интегрируемости деформированной системы Руйсенарса-Шнайдера*, УМН **78:2** (2023) 149–188.

[23] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5844–5849.

[24] A. Zabrodin, *KP hierarchy and trigonometric Calogero-Moser hierarchy*, J. Math. Phys. **61** (2020) 043502.

[25] V. Prokofev, A. Zabrodin, *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero-Moser model*, Journal of Physics A: Math. Theor., **54** (2021) 305202.

[26] J. Gibbons, T. Hermsen, *A generalization of the Calogero-Moser system*, Physica D **11** (1984) 337–348.

[27] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey and M. Talon, *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **170** (1995) 83–119.

[28] И. Кричевер, А. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН **50:6** (1995) 3–56.

[29] D. Rudneva, A. Zabrodin, *Dynamics of poles of elliptic solutions to BKP equation*, Journal of Physics A: Math. Theor. **53** (2020) 075202.

[30] A. Zabrodin, *How Calogero-Moser particles can stick together*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 225201.

[31] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984) 1–95.

[32] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Physica D **229** (2007), no. 2, 184–190.

[33] В. Прокофьев, А. Забродин, *Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса-Шнайдера*, ТМФ **208** (2021) 282—309.

[34] I. Krichever, A. Zabrodin, *Toda lattice with constraint of type B*, Physica D **453** (2023) 133827.

[35] I. Krichever, *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, In: Algebraic geometry and number theory. In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th birthday. Ed. by Ginzburg, Victor. Basel: Birkhäuser. Progress in Mathematics **253** (2006) 497–514.

[36] I. Krichever, *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer variety*, Annals of Mathematics **172** (2010) 485–516.

[37] S. Wojciechowski, *The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **15** (1982) L653-L657.

[38] F.W. Nihhoff, G.D. Pang, *A time-discretized version of the Calogero-Moser model*, Phys. Lett. A **191** (1994) 101-107.

[39] F.W. Nihhoff, O. Ragnisco, V. Kuznetsov, *Integrable time-discretization of the Ruijsenaars-Schneider model*, Commun. Math. Phys. **176** (1996) 681-700.