Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 10

А.В. Забродин*

Неабелева цепочка Тоды и спиновая система РШ

Эллиптические решения неабелевой (матричной) двумеризованной цепочки Тоды были изучены в работе [28]. Иерархия неабелевой двумеризованной цепочки Тоды может быть построена аналогично матричной иерархии КП с использованием псевдоразностных операторов Лакса, коэффициенты которых являются матричными функциями. Мы не будем здесь вдаваться в общую теорию, а сосредоточимся на первом нетривиальном уравнении, которое имеет вид

$$\partial_t((\partial_{\bar{t}} g(x))g^{-1}(x)) = g(x)g^{-1}(x-\eta) - g(x+\eta)g^{-1}(x),$$

где $g(x)$ – матрица размера $n\times n$. Это уравнение эквивалентно условию совместности переопределенной системы линейных задач

$$\partial_t \Psi(x) = \Psi(x+\eta) + V(x)\Psi(x),$$

$$\partial_{\bar{t}} \Psi(x) = C(x)\Psi(x-\eta),$$

где

$$V(x) = (\partial_t g(x))g^{-1}(x), \quad C(x) = g(x)g^{-1}(x-\eta).$$

Анализ эллиптических решений аналогичен проведенному в разделе 5.3 для матричного уравнения КП, поэтому здесь мы опустим некоторые подробности. Рассмотрим первую линейную задачу для функции Ψ и сопряженную линейную задачу для двойственной функции Ψ^*:

$$\partial_t \Psi_{\alpha\beta}(x) = \Psi_{\alpha\beta}(x+\eta) + V_{\alpha\gamma}(x)\Psi_{\gamma\beta}(x),$$

$$-\partial_t \Psi^*_{\alpha\beta}(x) = \Psi^*_{\alpha\beta}(x-\eta) + \Psi^*_{\alpha\gamma}(x)V_{\gamma\beta}(x),$$

где как обычно подразумевается суммирование по повторяющимся греческим индексам. Полюсной анзац для эллиптических решений имеет вид

$$V_{\alpha\beta}(x) = \sum_i a_i^\alpha b_i^\beta \Big(\zeta(x-x_i) - \zeta(x-x_i+\eta)\Big).$$

*e-mail: zabrodin@itep.ru

Это эллиптическая функция от x. Поэтому волновые функции нужно искать среди двоякоблоховских функций:

$$\Psi_{\alpha\beta}(x) = z^{x/\eta} \sum_i a_i^\alpha c_i^\beta \Phi(x - x_i, \lambda),$$

$$\Psi^*_{\alpha\beta}(x) = z^{-x/\eta} \sum_i c_i^{*\alpha} b_i^\beta \Phi(x - x_i + \eta, -\lambda).$$

Подстановка в линейную задачу приводит к выражению, имеющему простые полюса в точках $x_i - \eta$ и полюса в x_i (вплоть до второго порядка). Сокращение полюсов второго порядка дает связь

$$\dot{x}_i = b_i^\gamma a_i^\gamma.$$

Сокращение полюсов в $x_i - \eta$ дает линейные уравнения

$$\sum_j c_j^\beta b_i^\gamma a_j^\gamma \Phi(x_{ij} - \eta) = z c_i^\beta.$$

Сокращение полюсов в x_i дает уравнения

$$\partial_t(a_i^\alpha c_i^\beta) + \zeta(\eta)\dot{x}_i a_i^\alpha c_i^\beta = c_i^\beta \sum_{j\neq i} a_j^\alpha a_i^\gamma b_j^\gamma \Big(\zeta(x_{ij}) - \zeta(x_{ij}+\eta)\Big) + a_i^\alpha \sum_{j\neq i} c_j^\beta b_i^\gamma a_j^\gamma \Phi(x_{ij}, \lambda),$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{\dot{a}_i^\alpha}{a_i^\alpha} - \sum_{j\neq i} \frac{\dot{a}_j^\alpha}{a_i^\alpha} a_i^\gamma b_j^\gamma \Big(\zeta(x_{ij}) - \zeta(x_{ij}+\eta)\Big) = -\frac{\dot{c}_i^\beta}{c_i^\beta} + \sum_{j\neq i} \frac{\dot{c}_j^\beta}{c_i^\beta} b_i^\gamma a_j^\gamma \Phi(x_{ij}, \lambda) - \zeta(\eta)\dot{x}_i.$$

Правая часть не зависит от индекса α, поэтому

$$\Lambda_i = \frac{\dot{a}_i^\alpha}{a_i^\alpha} - \sum_{j\neq i} \frac{\dot{a}_j^\alpha}{a_i^\alpha} a_i^\gamma b_j^\gamma \Big(\zeta(x_{ij}) - \zeta(x_{ij}+\eta)\Big)$$

не зависит от α, откуда получаем первую группу уравнений движения для векторов a_i^α, b_i^α:

$$\dot{a}_i^\alpha = \Lambda_i a_i^\alpha + \sum_{j\neq i} a_j^\alpha a_i^\gamma b_j^\gamma \Big(\zeta(x_{ij}) - \zeta(x_{ij}+\eta)\Big)$$

и эволюционные уравнения для c_i^α:

$$\dot{c}_i^\beta = -(\Lambda_i + \zeta(\eta)\dot{x}_i) c_i^\beta + \sum_{j\neq i} c_j^\beta b_i^\gamma a_j^\gamma \Phi(x_{ij}, \lambda).$$

В матричном виде полученные уравнения имеют вид

$$L(\lambda)\mathbf{c}^\beta = z\mathbf{c}^\beta, \quad \partial_t \mathbf{c}^\beta = M(\lambda)\mathbf{c}^\beta$$

с матрицами

$$L_{ij}(\lambda) = b_i^\gamma a_j^\gamma \Phi(x_{ij} - \eta, \lambda),$$

$$M_{ij}(\lambda) = -\delta_{ij}(\Lambda_i + \zeta(\eta)\dot{x}_i) + (1 - \delta_{ij}) b_i^\gamma a_j^\gamma \Phi(x_{ij}, \lambda).$$

Мы узнаем здесь пару Лакса для спиновой системы РШ.

Аналогичное вычисление для сопряженной задачи приводит к уравнениям

$$\mathbf{c}^{*\alpha} L(\lambda) = z\mathbf{c}^{\alpha}, \quad -\partial_t \mathbf{c}^{*\alpha} = \mathbf{c}^{*\alpha} M^*(\lambda),$$

где $\mathbf{c}^{*\alpha}$ – вектор-строка, и

$$M^*_{ij}(\lambda) = -\delta_{ij}(\Lambda^*_i + \zeta(\eta)\dot{x}_i) + (1-\delta_{ij}) b^\gamma_i a^\gamma_j \Phi(x_{ij}, \lambda)$$

с

$$-\Lambda^*_i = \frac{\dot{b}^\beta_i}{b^\beta_i} - \sum_{j\neq i} \frac{\dot{b}^\beta_j}{b^\beta_i} b^\gamma_i a^\gamma_j \Big(\zeta(x_{ij}) - \zeta(x_{ij} - \eta)\Big).$$

Условия совместности линейных систем имеют вид уравнений Лакса

$$\dot{L} + [L, M] = 0, \quad \dot{L} + [L, M^*] = 0,$$

откуда следует, что $\Lambda^*_i = \Lambda_i$. Тогда получаем вторую группу уравнений движения для векторов a^α_i, b^α_i в виде

$$\dot{b}^\beta_i = -\Lambda_i b^\beta_i + \sum_{j\neq i} b^\beta_j b^\gamma_i a^\gamma_j \Big(\zeta(x_{ij}) - \zeta(x_{ij} - \eta)\Big).$$

Как уже отмечалось, без потери общности можно положить $\Lambda_i = 0$.

Двумеризованная цепочка Тоды типа B и деформированная система Руйсенарса-Шнайдера

Деформированная система РШ из главы 3 получается как динамика полюсов сингулярных решений двумеризованной цепочки Тоды типа B, которая была введена в работе [34].

Двумеризованная цепочка Тоды типа B

Иерархия двумеризованной цепочки Тоды типа B – это подиерархия двумеризованной цепочки Тоды, выделяемая наложением связи на операторы Лакса последней. Ее можно расматривать как разностный аналог иерархии B-КП.

Мы будем пользоваться обозначениями и соглашениями главы 7. Введем оператор сдвига

$$T = e^{-\varphi(x)} e^{\eta \partial_x},$$

где

$$e^{\varphi(x)} = \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)},$$

и наложим следующую связь на операторы Лакса двумеризованной цепочки Тоды:

$$(T - T^{\dagger})\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{\dagger}(T - T^{\dagger}).$$

Сопряженние разностных и псевдоразностных операторов (операция †) определяется по правилу $(f(x) \circ e^{\eta\partial_x})^{\dagger} = e^{-\eta\partial_x} \circ f(x)$.

Задача. Покажите, что эта связь сохраняется потоками $\partial_{t_k} - \partial_{\bar{t}_k}$ цепочки Тоды для всех $k \geq 1$ (и разрушается потоками $\partial_{t_k} + \partial_{\bar{t}_k}$).

Поэтому для того, чтобы определить динамику цепочки Тоды типа B (или просто B-Тоды) нужно ограничить независимые переменные в Тоде, положив $\bar{t}_k = -t_k$. Тем самым в B-Тоде имеется только один набор времен $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \ldots\}$, а не два, как в Тоде.

Не вдаваясь в общую теорию, укажем, как получить первое уравнение (точнее, систему уравнений) иерархии. Рассмотрим разностные операторы

$$\mathcal{A}_1 = v(x)(e^{\eta\partial_x} - e^{-\eta\partial_x}),$$

$$\mathcal{A}_2 = \Big(f_0(x) + f_1(x)e^{\eta\partial_x} + e^{-\eta\partial_x} f_1(x)\Big)(e^{\eta\partial_x} - e^{-\eta\partial_x})$$

с некоторыми функциями $v(x), f_0(x), f_1(x)$ и наложим на них уравнение Захарова-Шабата

$$\partial_{t_2}\mathcal{A}_1 - \partial_{t_1}\mathcal{A}_2 + [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] = 0.$$

Это даст следующую систему трех уравнений на три неизвестные функции:

$$\left\{\begin{array}{l} v(x) f_1(x+\eta) = v(x+2\eta) f_1(x), \\[2ex] \partial_{t_1} f_1(x) + v(x+\eta) f_0(x) - v(x) f_0(x+\eta) = 0, \\[2ex] \partial_{t_2} v(x) - \partial_{t_1} f_0(x) + 2v(x)\Big(f_1(x) - f_1(x-\eta)\Big) = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение позволяет исключить функцию f_1:

$$f_1(x) = v(x)v(x+\eta),$$

и тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \partial_{t_1} \log\Big(v(x)v(x+\eta)\Big) = \dfrac{f_0(x+\eta)}{v(x+\eta)} - \dfrac{f_0(x)}{v(x)}, \\ \\ \partial_{t_2} v(x) - \partial_{t_1} f_0(x) + 2v^2(x)\Big(v(x+\eta) - v(x-\eta)\Big) = 0. \end{cases}$$

Можно ввести тау-функцию двумеризованной цепочки Тоды типа B, через которую функции $v(x), f_0(x)$ выражаются следующим образом:

$$v(x) = \frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}, \qquad f_0(x) = v(x)\partial_{t_1} \log \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x-\eta)}.$$

При этой подстановке первое уравнение обращается в тождество, а второе превращается в билинейное уравнение на тау-функцию.

Эллиптические решения

Рассмотрим решения, которые являются эллиптическими функциями от x и найдем динамику их полюсов по времени $t = t_1$. Для этого, как обычно, рассмотрим соответствующую линейную задачу $\partial_t \psi = \mathcal{A}_1 \psi$, которая записывается как дифференциально-разностное уравнение

$$\partial_t \psi(x) = v(x)\Big(\psi(x+\eta) - \psi(x-\eta)\Big).$$

Функция $v(x)$ выражается через тау-функцию как указано выше. Для наших целей удобно переписать это уравнение в терминах функции

$$\Psi(x) = \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}\, \psi(x+\eta).$$

Уравнение для Ψ имеет вид

$$\partial_t \Psi(x-\eta) = \Psi(x) + b(x)\Psi(x-\eta) - u^-(x)\Psi(x-2\eta),$$

где

$$b(x) = \partial_t \log \frac{\tau(x)}{\tau(x-\eta)}, \quad u^-(x) = \frac{\tau(x-2\eta)\tau(x+\eta)}{\tau(x-\eta)\tau(x)}.$$

Для эллиптических решений

$$\tau(x) = C \prod_{j=1}^{N} \sigma(x - x_j),$$

тогда

$$b(x) = \sum_j \dot{x}_j \Big(\zeta(x - x_j - \eta) - \zeta(x - x_j)\Big),$$

$$u^-(x)=\prod_j \frac{\sigma(x-x_j-2\eta)\sigma(x-x_j+\eta)}{\sigma(x-x_j-\eta)\sigma(x-x_j)}$$

являются эллиптическими функциями от x с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Следовательно, решения для $\Psi(x)$ нужно искать среди двоякоблоховских функций вида

$$\Psi(x)=k^{x/\eta}\sum_{i=1}^{N} c_i\Phi(x-x_i,\lambda),$$

где коэффициенты c_i не зависят от x. Спектральные параметры k,λ будут связаны уравнением спектральной кривой. Подстановка в линейное уравнение дает:

$$k^{-1}\sum_i \dot c_i\Phi(x-x_i-\eta)-k^{-1}\sum_i c_i\dot x_i\Phi'(x-x_i-\eta)$$

$$=\sum_i c_i\Phi(x-x_i)+k^{-1}\sum_j \dot x_j\Big(\zeta(x-x_j-\eta)-\zeta(x-x_j)\Big)\sum_i c_i\Phi(x-x_i-\eta)$$

$$-k^{-2}\prod_j \frac{\sigma(x-x_j-2\eta)\sigma(x-x_j+\eta)}{\sigma(x-x_j-\eta)\sigma(x-x_j)}\sum_i c_i\Phi(x-x_i-2\eta),$$

где $\Phi'(x)=\partial_x\Phi(x,\lambda)$. Обе части имеют полюса при $x=x_i$ и $x=x_i+\eta$ (возможные полюса при $x=x_i+2\eta$ в последних членах сокращаются нулями числителя). Полюса второго порядка при $x=x_i+\eta$ сокращаются тождественно. Сравнение простых полюсов при $x=x_i$ дает уравнения

$$c_i-k^{-1}\dot x_i\sum_j c_j\Phi(x_{ij}-\eta)-k^{-2}\sigma(2\eta)U_i^-\sum_j c_j\Phi(x_{ij}-2\eta)=0,$$

где

$$U_i^-=\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_{ij}-2\eta)\sigma(x_{ij}+\eta)}{\sigma(x_{ij}-\eta)\sigma(x_{ij})}.$$

Ниже нам встретится также функция U_i^+, которая отличается от U_i^- изменением знака $\eta\to-\eta$. Вводя $N\times N$ матрицу $L=L(k,\lambda)$ с матричными элементами

$$L_{ij}(k,\lambda)=\dot x_i\Phi(x_{ij}-\eta,\lambda)+k^{-1}\sigma(2\eta)U_i^-\Phi(x_{ij}-2\eta,\lambda)$$

и вектор $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_N)^{\mathrm{T}}$, можно записать эту систему линейных уравнений в матричном виде:

$$L(k,\lambda)\mathbf{c}=k\mathbf{c},$$

что дает уравнение спектральной кривой

$$\det\Big(kI-L(k,\lambda)\Big)=0.$$

Сравнение полюсов при $x=x_i+\eta$ дает уравнения

$$\dot c_i=\sum_j M_{ij}c_j \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{c}}=M\mathbf{c},$$

где матрица $M=M(k,\lambda)$ имеет вид

$$M_{ij}(k,\lambda)=\dot x_i(1-\delta_{ij})\Phi(x_{ij},\lambda)+k^{-1}\sigma(2\eta)U_i^+\Phi(x_{ij}-\eta,\lambda)$$

$$-\delta_{ij}\Big(\sum_k \dot x_k\zeta(x_{ik}+\eta)-\sum_{k\neq i}\zeta(x_{ik})\Big).$$

Мы узнаем здесь матрицы L, M деформированной системы РШ из главы 3. Совместность переопределенной системы уравнений на вектор $\mathbf{c}$ выражается в виде уравнения для тройки Манакова, обобщающего уравнение Лакса. Тем самым динамика полюсов по времени t_1 эквивалентна динамике деформированной системы РШ.

Уравнения движения интегрируемых систем частиц как условия существования мероморфных решений линейных уравнений

Эта глава посвящена альтернативному подходу к выводу уравнений движения интегрируемых систем частиц, преимущество которого в том, что он, пожалуй, является наиболее простым и экономным. В этом подходе, предложенном Кричевером (см. работы [35, 36, 21]) уравнения движения получаются как условия существования мероморфных решений линейных дифференциальных или разностных уравнений, служащих вспомогательными линейными задачами для интегрируемых нелинейных уравнений. Недостаток этого метода – невозможность в этих же рамках найти коммутационные представления уравнений движения.

Линейное уравнение для КП. Рассмотрим линейное уравнение

$$(\partial_t - \partial_x^2 - 2u)\psi = 0,$$

которое является одной из вспомогательных линейных задач для уравнения КП. Легко видеть, что если функция $u = u(x)$ имеет полюс в некоторой точке a на комплексной x-плоскости, это должен быть полюс второго порядка с нулевым вычетом. Разлагая левую часть в окрестности этого полюса, можно найти необходимое условие существования мероморфного решения в этой окрестности. Мы имеем разложения:

$$u = -\frac{1}{(x-a)^2} + u_0 + u_1(x-a) + \dots,$$

$$\psi = \frac{\alpha}{x-a} + \beta + \gamma(x-a) + \delta(x-a)^2 + \dots.$$

Подставив их в линейное уравнение, видим, что старшие полюса (третьего порядка) сокращаются тождественно. Приравнивая коэффициенты перед $(x-a)^{-2}$, $(x-a)^{-1}$ и $(x-a)^0$ к нулю, получаем условия

$$\begin{cases} \dot{a}\alpha + 2\beta = 0, \\[2ex] \dot{\alpha} + 2\gamma - 2u_0\alpha = 0, \\[2ex] \dot{\beta} - \dot{a}\gamma - 2u_0\beta - 2u_1\alpha = 0, \end{cases}$$

где точка как обычно означает производную по t. Продифференцировав по t первое условие, подставив $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ из второго и третьего, а затем снова воспользовавшись первым, получим необходимое условие существования мероморфного решения

$$\ddot{a} + 4u_1 = 0.$$

Из этого условия можно получить уравнения движения системы КМ, в общем случае эллиптической. В самом деле, пусть $u(x)$ – двоякопериодическая функция с полюсами в точках x_i:

$$u = -\sum_i \wp(x - x_i).$$

Ее разложение в окрестности полюса в x_i имеет указанный выше вид, где

$$u_0 = -\sum_{j\neq i} \wp(x_i - x_j), \qquad u_1 = -\sum_{j\neq i} \wp'(x_i - x_j),$$

так что условия существования мероморфного решения в окрестности каждого из полюсов дают уравнения движения системы КМ:

$$\ddot{x}_i = 4\sum_{j\neq i} \wp'(x_i - x_j).$$

Линейное уравнение для В-КП. Рассмотрим линейное уравнение

$$(\partial_t - \partial_x^3 - 6u\partial_x)\psi = 0,$$

которое является одной из вспомогательных линейных задач для уравнения В-КП. Пусть функция u имеет полюс в точке a и предположим, что существует мероморфное решение для ψ в окрестности этой точки. Мы имеем разложения:

$$u = -\frac{1}{(x-a)^2} + u_0 + u_1(x-a) + u_2(x-a)^2 + u_3(x-a)^3 + \dots,$$

$$\psi = \frac{\alpha}{x-a} + \beta + \gamma(x-a) + \delta(x-a)^2 + \varepsilon(x-a)^3 + \mu(x-a)^4 + \dots.$$

Подставив их в левую часть линейного уравнения, видим, что возможные полюса четвертого и третьего порядков сокращаются тождественно. Приравнивая к нулю коэффициенты перед $(x-a)^{-2}$, $(x-a)^{-1}$, $(x-a)^0$ и $(x-a)$, получаем условия

$$\begin{cases} \alpha\dot{a} + 6\alpha u_0 + 6\gamma = 0, \\ \dot{\alpha} + 6\alpha u_1 + 12\delta = 0, \\ \dot{\beta} - \gamma\dot{a} - 6\gamma u_0 + 6\alpha u_2 + 12\varepsilon = 0, \\ \dot{\gamma} - 2\delta\dot{a} - 12\delta u_0 - 6\gamma u_1 + 6\alpha u_3 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что коэффициент μ, который мог бы войти в последнее условие, сокращается и туда не входит. Продифференцируем по t первое условие:

$$\ddot{a} + 6\dot{u}_0 + 6\frac{\dot{\gamma}}{\alpha} - 6\frac{\gamma\dot{\alpha}}{\alpha^2} = 0.$$

Подставив сюда $\dot{\alpha}$ из второго условия и $\dot{\gamma}$ из четвертого, найдем необходимое условие существования мероморфного решения:

$$\ddot{a} + 6\dot{u}_0 - 12u_1(\dot{a} + 6u_0) - 36u_3 = 0.$$

Из этого условия можно получить уравнения движения системы, рассмотренной в разделе 6.2. В самом деле, пусть $u(x)$ – двоякопериодическая мероморфная функция

$$u = -\sum_i \wp(x - x_i),$$

тогда ее разложение в окрестности полюса в x_i имеет указанный выше вид с

$$u_0 = -\sum_{j\neq i} \wp(x_i - x_j), \quad u_1 = -\sum_{j\neq i} \wp'(x_i - x_j), \quad u_3 = -\frac{1}{6}\sum_{j\neq i} \wp'''(x_i - x_j),$$

и

$$\dot{u}_0 = -\sum_{j\neq i} (\dot{x}_i - \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j).$$

Отсюда видно, что наше условие дает уравнения движения

$$\ddot{x}_i + 6\sum_{j\neq i} (\dot{x}_i + \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j) - 72 \sum_{j\neq k\neq i} \wp(x_i - x_j)\wp'(x_i - x_k) = 0,$$

полученные в разделе 6.2 из других соображений.

Линейная задача для двумеризованной цепочки Тода по времени t_1. Рассмотрим дифференциально-разностное линейное уравнение

$$\partial_t \psi(x) = \psi(x + \eta) + b(x)\psi(x),$$

которое является вспомогательной линейной задачей для двумеризованной цепочки Тода по времени $t = t_1$. Пусть функция $b(x)$ имеет полюс первого порядка в некоторой точке a, тогда из уравнения следует, что она должна иметь также полюс в точке $a - \eta$:

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu}{x - a} + \mu_0 + O(x - a), & x \to a \\[2ex] -\dfrac{\nu}{x - a + \eta} + \mu_1 + O(x - a + \eta), & x \to a - \eta. \end{cases}$$

Разложение функции $\psi(x)$ в окрестности точки a имеет вид

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{x - a} + \beta + O(x - a),$$

тогда

$$\partial_t \psi(x) = \frac{\alpha\dot{a}}{(x - a)^2} + \frac{\dot{\alpha}}{x - a} + O(1).$$

При этом у функции ψ в точке $a - \eta$ особенности нет. Подставим эти разложения в линейное уравнение:

$$\frac{\alpha\dot{a}}{(x - a)^2} + \frac{\dot{\alpha}}{x - a} + O(1) = \left(\frac{\nu}{x - a} + \mu_0 + \ldots\right)\left(\frac{\alpha}{x - a} + \beta + \ldots\right).$$

Приравнивая коэффициенты при полюсах в левой и правой частях, получим условия

$$\begin{cases} \nu = \dot{a}, \\[2ex] \dot{\alpha} = \nu\beta + \mu_0\alpha. \end{cases}$$

В окрестности точки $a-\eta$ имеем:

$$\partial_t\psi(a-\eta)+O(x-a+\eta)$$

$$=\frac{\alpha}{x-a+\eta}+\beta-\Big(\frac{\nu}{x-a+\eta}+\mu_1+\ldots\Big)\Big(\psi(a-\eta)+(x-a+\eta)\psi'(a-\eta)+\ldots\Big).$$

Приравнивая коэффициенты при $(x-a+\eta)^{-1}$ и $(x-a+\eta)^0$, получим условия

$$\begin{cases}\alpha=\nu\psi(a-\eta),\\ \\ \partial_t\psi(a-\eta)=\beta-\mu_1\psi(a-\eta)-\nu\psi'(a-\eta).\end{cases}$$

Продифференцировав по t первое из этих уравнений и воспользовавшись полученными ранее условиями, найдем:

$$\dot\alpha=\ddot a\psi(a-\eta)+\dot a\dot\psi(a-\eta),$$

где

$$\dot\psi(a-\eta)=\partial_t\psi(a-\eta)+\dot a\psi'(a-\eta)$$

есть полная производная по t от $\psi(a-\eta)$ (здесь $\psi'(a-\eta)$ – производная по x в точке $a-\eta$). Комбинируя полученные уравнения, найдем условие существования мероморфного решения:

$$\ddot a-\dot a(\mu_0+\mu_1)=0.$$

Предположим теперь, что $b(x)$ – эллиптическая функция от x, имеющая полюса первого порядка в точках x_j, тогда она должна иметь вид

$$b(x)=\sum_j\dot x_j\Big(\zeta(x-x_j)-\zeta(x-x_j+\eta)\Big).$$

Положим $a=x_i$ для некоторого i, тогда

$$\mu_0=\sum_{k\neq i}\dot x_k\zeta(x_i-x_k)-\sum_k\dot x_k\zeta(x_i-x_k+\eta),$$

$$\mu_1=\sum_{k\neq i}\dot x_k\zeta(x_i-x_k)-\sum_k\dot x_k\zeta(x_i-x_k-\eta)$$

и найденные выше условия дают уравнения движения эллиптической системы РШ:

$$\ddot x_i+\sum_{k\neq i}\dot x_i\dot x_k\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta)+\zeta(x_i-x_k-\eta)-2\zeta(x_i-x_k)\Big)=0.$$

Линейная задача для двумеризованной цепочки Тода по времени $\bar t_1$. Рассмотрим теперь линейное уравнение

$$\partial_t\psi(x)=v(x)\psi(x-\eta),$$

которое является линейной задачей для двумеризованной цепочки Тода по времени $t=\bar t_1$. Предположим, что функция $v(x)$ имеет полюс второго порядка в точке a с разложением

$$v(x)=\frac{\nu}{(x-a)^2}+\frac{\mu}{x-a}+O(1)$$

в окрестности этой точки. Предположим также, что $v(x)$ имеет ноль в точке $a-\eta$: $v(a-\eta)=0$. Тогда $\psi(x)$ имеет полюс первого порядка в точке a:

$$\psi(x)=\frac{\alpha}{x-a}+O(1), \quad x\to a.$$

Подставив эти разложения в линейное уравнение, пишем:

$$\frac{\alpha\dot{a}}{(x-a)^2}+\frac{\dot{\alpha}}{x-a}=\Big(\frac{\nu}{(x-a)^2}+\frac{\mu}{x-a}+O(1)\Big)\Big(\psi(a-\eta)+(x-a)\psi'(a-\eta)+\ldots\Big).$$

Приравнивая коэффициенты при полюсах, получаем условия

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\dot{a}=\nu\psi(a-\eta),\\[2ex] \dot{\alpha}=\nu\psi'(a-\eta)+\mu\psi(a-\eta).\end{array}\right.$$

При $x=a-\eta$ наше линейное уравнение дает $\partial_t\psi(a-\eta)=0$, так что полная производная по t от $\psi(a-\eta)$ равна

$$\dot{\psi}(a-\eta)=\dot{a}\psi'(a-\eta).$$

Комбинируя полученные уравнения, находим условие существования мероморфного решения:

$$\nu\ddot{a}+\mu\dot{a}^2-\dot{\nu}\dot{a}=0.$$

Предположим теперь, что $v(x)$ – эллиптическая функция вида

$$v(x)=\prod_{j=1}^{N}\frac{\sigma(x-x_j+\eta)\sigma(x-x_j-\eta)}{\sigma^2(x-x_j)},$$

тогда имеем, положив $a=x_i$:

$$\nu=-\sigma^2(\eta)\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j+\eta)\sigma(x_i-x_j-\eta)}{\sigma^2(x_i-x_j)},$$

$$\mu=\nu\sum_{k\neq i}\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta)+\zeta(x_i-x_k-\eta)-2\zeta(x_i-x_k)\Big),$$

и условие существования мероморфного решения дает те же уравнения движения эллиптической системы РШ.

Линейное уравнение для двумеризованной цепочки Тода типа B. Рассмотрим линейное уравнение

$$\partial_t\psi(x)=v(x)(\psi(x+\eta)-\psi(x-\eta)),$$

которое является вспомогательной линейной задачей для двумеризованной цепочки Тода типа B. Предположим, что функция $v(x)$ имеет полюс второго порядка в точке a с разложением

$$v(x)=\frac{\nu}{(x-a)^2}+\frac{\mu}{x-a}+O(1)$$

в окрестности этой точки. Предположим также, что $v(x)$ имеет нули в точках $a-\eta$ и $a+\eta$:

$$v(x) = \begin{cases} (x-a-\eta)V^{+}(a) + O((x-a-\eta)^2), & x \to a+\eta, \\ \\ (x-a+\eta)V^{-}(a) + O((x-a+\eta)^2), & x \to a-\eta. \end{cases}$$

Тогда функция $\psi(x)$ имеет простой полюс в точке a:

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{x-a} + O(1), \quad x \to a.$$

При $x \to a$ линейное уравнение с этими разложениями дает:

$$\frac{\alpha\dot{a}}{(x-a)^2} + \frac{\dot{\alpha}}{x-a}$$

$$= \Big(\frac{\nu}{(x-a)^2} + \frac{\mu}{x-a} + O(1)\Big)\Big(\psi(a+\eta) - \psi(a-\eta) + (x-a)(\psi'(a+\eta) - \psi'(a-\eta)) + \ldots\Big).$$

Приравнивая коэффициенты при полюсах, получаем условия

$$\begin{cases} \alpha\dot{a} = \nu(\psi(a+\eta) - \psi(a-\eta)), \\ \\ \dot{\alpha} = \mu(\psi(a+\eta) - \psi(a-\eta)) + \nu(\psi'(a+\eta) - \psi'(a-\eta)). \end{cases}$$

При $x = a \pm \eta$ линейное уравнение дает:

$$\partial_t \psi(a \pm \eta) = \mp\alpha\, V^{\pm}(a).$$

Следовательно,

$$\dot{\psi}(a \pm \eta) = \mp\alpha\, V^{\pm}(a) + \dot{a}\psi'(a \pm \eta).$$

Продифференцировав условие $\alpha\dot{a} = \nu(\psi(a+\eta) - \psi(a-\eta))$ по t и комбинируя с остальными уравнениями, находим условие существования мероморфного решения:

$$\nu\ddot{a} + \mu\dot{a}^2 - \dot{\nu}\dot{a} + \nu^2(V^{+}(a) + V^{-}(a)) = 0.$$

Предположим, что $v(x)$ – эллиптическая функция вида

$$v(x) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(x-x_j+\eta)\sigma(x-x_j-\eta)}{\sigma^2(x-x_j)},$$

тогда имеем, положив $a = x_i$:

$$\nu = -\sigma^2(\eta)\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j+\eta)\sigma(x_i-x_j-\eta)}{\sigma^2(x_i-x_j)},$$

$$\mu = \nu\sum_{k\neq i}\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta) + \zeta(x_i-x_k-\eta) - 2\zeta(x_i-x_k)\Big),$$

$$V^{\pm}(x_i) = \pm\frac{\sigma(2\eta)}{\sigma^2(\eta)}\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j\pm 2\eta)\sigma(x_i-x_j)}{\sigma^2(x_i-x_j\pm\eta)},$$

и наше условие дает уравнения

$$\ddot{x}_i + \sum_{k\neq i}\dot{x}_i\dot{x}_k\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta) + \zeta(x_i-x_k-\eta) - 2\zeta(x_i-x_k)\Big)$$

$$-\sigma(2\eta)\left[\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j+2\eta)\sigma(x_i-x_j-\eta)}{\sigma(x_i-x_j+\eta)\sigma(x_i-x_j)} - \prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j-2\eta)\sigma(x_i-x_j+\eta)}{\sigma(x_i-x_j-\eta)\sigma(x_i-x_j)}\right] = 0,$$

которые являются уравнениями движения деформированной системы РШ.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem*, Commun. Pure Appl. Math. **30** (1977) 95–148.

[4] И.М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функ. Анализ и его Прил. **12:1** (1978) 76–78.

[5] И.М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функ. Анализ и его Прил. **14:4** (1980) 45–54.

[6] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва, 1987.

[8] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва, 1989.

[9] Т. Мива, М. Джимбо, Э. Дате, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры*, Издательство МЦНМО, Москва, 2005.

[10] J. Harnad and F. Balogh, *Tau functions and their applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2021.

[11] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981), Singapore: World Scientific, 1983, 39–119.

[12] M. Jimbo and T. Miwa, *Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 943–1001.

[13] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[14] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[15] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[16] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[17] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[18] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[19] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[20] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[21] I. Krichever, A. Zabrodin, *Monodromy free linear equations and many-body systems*, Letters in Mathematical Physics 113:75 (2023).

[22] А. Забродин, *Об интегрируемости деформированной системы Руйсенарса-Шнайдера*, УМН **78:2** (2023) 149–188.

[23] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5844–5849.

[24] A. Zabrodin, *KP hierarchy and trigonometric Calogero-Moser hierarchy*, J. Math. Phys. **61** (2020) 043502.

[25] V. Prokofev, A. Zabrodin, *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero-Moser model*, Journal of Physics A: Math. Theor., **54** (2021) 305202.

[26] J. Gibbons, T. Hermsen, *A generalization of the Calogero-Moser system*, Physica D **11** (1984) 337–348.

[27] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey and M. Talon, *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **170** (1995) 83–119.

[28] И. Кричевер, А. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН **50:6** (1995) 3–56.

[29] D. Rudneva, A. Zabrodin, *Dynamics of poles of elliptic solutions to BKP equation*, Journal of Physics A: Math. Theor. **53** (2020) 075202.

[30] A. Zabrodin, *How Calogero-Moser particles can stick together*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 225201.

[31] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984) 1–95.

[32] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Physica D **229** (2007), no. 2, 184–190.

[33] В. Прокофьев, А. Забродин, *Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса-Шнайдера*, ТМФ **208** (2021) 282—309.

[34] I. Krichever, A. Zabrodin, *Toda lattice with constraint of type B*, Physica D **453** (2023) 133827.

[35] I. Krichever, *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, In: Algebraic geometry and number theory. In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th birthday. Ed. by Ginzburg, Victor. Basel: Birkhäuser. Progress in Mathematics **253** (2006) 497–514.

[36] I. Krichever, *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer variety*, Annals of Mathematics **172** (2010) 485–516.

[37] S. Wojciechowski, *The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **15** (1982) L653-L657.

[38] F.W. Nihhoff, G.D. Pang, *A time-discretized version of the Calogero-Moser model*, Phys. Lett. A **191** (1994) 101-107.

[39] F.W. Nihhoff, O. Ragnisco, V. Kuznetsov, *Integrable time-discretization of the Ruijsenaars-Schneider model*, Commun. Math. Phys. **176** (1996) 681-700.