# Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 5

А.В. Забродин*

# 1 Деформированные системы Руйсенарса-Шнайдера

Системы РШ допускают дальнейшую деформацию с сохранением интегрируемости (см. работы [11, 12]). Однако, гамильтонова структура этих деформированных систем не известна, и, возможно, они не гамильтоновы. Мы обсудим их на уровне ньютоновских уравнений движения. Как и системы РШ, они существуют в рациональной, тригонометрической и эллиптической версиях. Мы рассмотрим сразу эллиптическую версию как наиболее общую.

## 1.1 Уравнения движения

Уравнения движения деформированной системы РШ имеют вид

$$\ddot{x}_i + \sum_{j\neq i}^{N} \dot{x}_i \dot{x}_j \Big( \zeta(x_{ij}+\eta) + \zeta(x_{ij}-\eta) - 2\zeta(x_{ij}) \Big) + g(U_i^- - U_i^+) = 0,$$

где

$$U_i^{\pm} = \prod_{j\neq i}^{N} U^{\pm}(x_{ij}), \qquad U^{\pm}(x_{ij}) = \frac{\sigma(x_{ij}\pm 2\eta)\sigma(x_{ij}\mp\eta)}{\sigma(x_{ij}\pm\eta)\sigma(x_{ij})}$$

и $g$ является параметром деформации. При $g=0$ они превращаются в уравнения движения эллиптической системы РШ. Очевидно, что $g\neq 0$ можно убрать из формул растяжением временной переменной $t \to g^{-1/2}t$. В дальнейшем мы без потери общности фиксируем $g=\sigma(2\eta)$.

Мы покажем, что уравнения движения деформированной системы РШ могут быть получены ограничением гамильтонова потока с гамильтонианом $H_+ - H_-$ системы РШ с четным числом частиц $N=2N_0$ на подпространство $\mathcal{P}\subset\mathcal{F}$ половинной размерности $4N_0$-мерного фазового пространства $\mathcal{F}$, соответствующее конфигурациям, в которых $2N_0$ частиц попарно слипаются, образуя $N_0$ пар с расстоянием между частицами в каждой паре равным $\eta$. Такие конфигурации мгновенно разрушаются

*e-mail: zabrodin@itep.ru

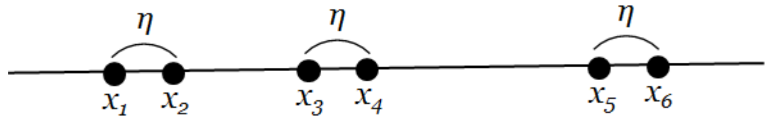


Рис. 1: Пары частиц в модели РШ ($N = 6$, $N_0 = 3$).

потоками с гамильтонианоми $H_+, H_-$, но сохраняются потоком с гамильтонианом $H_+ - \sigma^2(\eta)H_-$, и соответствующая динамика может быть ограничена на подпространство $\mathcal{P}$. Это ограничение и дает приведенные выше уравнения движения, где $N$ надо заменить на $N_0$, а $x_i$ ($i = 1, \ldots, N_0$) является координатой $i$-й пары, двигающейся как целое с фиксированным расстоянием между двумя частицами. На самом деле подространство $\mathcal{P}$ лагранжево; значение этого факта в теории деформированной системы РШ еще предстоит понять.

Итак, покажем, что ограничение динамики системы РШ с $N = 2N_0$ частицами на попространство $\mathcal{P}$, в котором частицы слипаются в $N_0$ пар таких, что

$$x_{2i} - x_{2i-1} = \eta, \qquad i = 1, \ldots, N_0$$

приводит к уравнениям движения деформированной системы РШ для координат пар. Естественно ввести переменные

$$X_i = x_{2i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N_0,$$

которые являются координатами пар. Как мы увидим ниже, такая структура сохраняется гамильтоновым потоком с гамильтонианом $\bar{H} = H_+ - \sigma^2(\eta)H_-$ Следовательно, чтобы определить динамическую систему, нужно рассмотреть эволюцию во времени $t$, отвечающему потоку с гамильтонианом $\bar{H} = H_+ - \sigma^2(\eta)H_-$ и зафиксировать временные переменные, отвечающие остальным потокам.

В целях упрощения последующих формул и избавления от несущественных множителей и коэффициентов мы здесь переопределим импульсы и возьмем гамильтонианы в виде

$$H_\pm = \sum_i e^{\pm p_i} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma(x_{ij} \pm \eta)}{\sigma(x_{ij})}.$$

Нетрудно убедиться, что эти гамильтонианы дают те же самые ньютоновские уравнения движения. Для дальнейшего удобства изменим также нормировку интегралов движения:

$$J_{\pm k} = \frac{\sigma(|k|\eta)}{\sigma^k(\eta)} \sum_{\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, N\}, |\mathcal{I}| = k} \exp\Big(\pm \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i\Big) \prod_{i \in \mathcal{I}, j \notin \mathcal{I}} \frac{\sigma(x_{ij} \pm \eta)}{\sigma(x_{ij})},$$

тогда $\bar{H} = J_1 - J_{-1}$.

Для скоростей $\dot{x}_i = \partial \bar{H} / \partial p_i$ имеем:

$$\dot{x}_{2i-1} = e^{p_{2i-1}} \prod_{j=1, \neq 2i-1}^{2N_0} \frac{\sigma(x_{2i-1,j} + \eta)}{\sigma(x_{2i-1,j})} + \sigma^2(\eta) e^{-p_{2i-1}} \prod_{j=1, \neq 2i-1}^{2N_0} \frac{\sigma(x_{2i-1,j} - \eta)}{\sigma(x_{2i-1,j})},$$

$$\dot{x}_{2i} = e^{p_{2i}} \prod_{j=1,\neq 2i}^{2N_0} \frac{\sigma(x_{2i,j}+\eta)}{\sigma(x_{2i,j})} \,+\, \sigma^2(\eta) e^{-p_{2i}} \prod_{j=1,\neq 2i}^{2N_0} \frac{\sigma(x_{2i,j}-\eta)}{\sigma(x_{2i,j})}.$$

При наложении связи $x_{2i} - x_{2i-1} = \eta$ первый член в правой части первой из этих формул, а также второй член во второй из них обращаются в 0, поскольку в произведении будет присутствовать равный нулю множитель. Тогда в терминах координат пар $X_i$ эти уравнения гласят:

$$\dot{x}_{2i-1} = \sigma(\eta)\sigma(2\eta) e^{-p_{2i-1}} \prod_{j=1,\neq i}^{N_0} \frac{\sigma(X_{ij}-2\eta)}{\sigma(X_{ij})},$$

$$\dot{x}_{2i} = \frac{\sigma(2\eta)}{\sigma(\eta)}\, e^{p_{2i}} \prod_{j=1,\neq i}^{N_0} \frac{\sigma(X_{ij}+2\eta)}{\sigma(X_{ij})}.$$

Отсюда ясно, что если положить

$$p_{2i-1} = \alpha_i + P_i, \quad p_{2i} = \alpha_i - P_i, \quad i = 1, \ldots, N_0,$$

где

$$\alpha_i = \log \sigma(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{j\neq i}^{N_0} \log \frac{\sigma(X_{ij}-2\eta)}{\sigma(X_{ij}+2\eta)}$$

и $P_i$ произвольны, $\dot{x}_{2i-1} = \dot{x}_{2i}$ для всех $i$, так что расстояние между частицами в каждой паре в процессе эволюции сохраняется. Таким образом, под действием $\bar{H}$-потока каждая пара движется как целое, и

$$\dot{X}_i = \sigma(2\eta) e^{-P_i} \prod_{j\neq i}^{N_0} \frac{(\sigma(X_{ij}-2\eta)\sigma(X_{ij}+2\eta))^{1/2}}{\sigma(X_{ij})}.$$

Мы перешли от исходного $4N_0$-мерного фазового пространства $\mathcal{F}$ с координатами $(\{x_i\}_N, \{p_i\}_N)$ к $2N_0$-мерному подпространству $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ пар, определенному наложением связей

$$\begin{cases} x_{2i} - x_{2i-1} = \eta, \quad x_{2i-1} = X_i, \\[2ex] p_{2i-1} + p_{2i} = 2\log \sigma(\eta) + \displaystyle\sum_{j\neq i} \log \frac{\sigma(X_{ij}-2\eta)}{\sigma(X_{ij}+2\eta)}. \end{cases}$$

Координатами в $\mathcal{P}$ являются $(\{X_i\}_{N_0}, \{P_i\}_{N_0})$.

Ограничивая второй набор гамильтоновых уравнений $\dot{p}_i = -\partial \bar{H}/\partial x_i$ на подпространство $\mathcal{P}$, имеем:

$$\dot{p}_{2i-1} \;=\; \sigma(\eta)\sigma(2\eta)e^{-\alpha_i-P_i}\prod_{k=1,\neq i}^{N_0}\frac{\sigma(X_{ik}-2\eta)}{\sigma(X_{ik})}\left[\sum_{j=1,\neq i}^{N_0}\Big(\zeta(X_{ij}-2\eta)-\zeta(X_{ij})\Big)+\zeta(\eta)-\zeta(2\eta)\right]$$

$$+\,\sigma(\eta)\sigma(2\eta)\sum_{l=1,\neq i}^{N_0}e^{-\alpha_l-P_l}\prod_{k=1,\neq l}^{N_0}\frac{\sigma(X_{lk}-2\eta)}{\sigma(X_{lk})}\Big(\zeta(X_{il}+\eta)-\zeta(X_{il})\Big)$$

$$-\,\frac{\sigma(2\eta)}{\sigma(\eta)}\sum_{l=1}^{N_0}e^{\alpha_l-P_l}\prod_{k=1,\neq l}^{n}\frac{\sigma(X_{lk}+2\eta)}{\sigma(X_{lk})}\Big(\zeta(X_{il}-2\eta)-\zeta(X_{il}-\eta)\Big)$$

$$+\,\sigma^{-1}(\eta)e^{\alpha_i+P_i}\prod_{k=1,\neq i}^{N_0}\frac{\sigma(X_{ik}+\eta)}{\sigma(X_{ik}-\eta)}-\sigma(\eta)e^{-\alpha_i+P_i}\prod_{k=1,\neq i}^{N_0}\frac{\sigma(X_{ik}-\eta)}{\sigma(X_{ik}+\eta)}.$$

Взяв производную по времени от $\dot{X}_i$, получим:

$$\ddot{X}_i=-\sigma(2\eta)\dot{P}_ie^{-P_i}\prod_{j\neq i}^{N_0}\frac{(\sigma(X_{ij}-2\eta)\sigma(X_{ij}+2\eta))^{1/2}}{\sigma(X_{ij})}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N_0}\dot{X}_i(\dot{X}_i-\dot{X}_j)\Big(\zeta(X_{ij}-2\eta)+\zeta(X_{ij}+2\eta)-2\zeta(X_{ij})\Big),$$

где надо подставить $\dot{P}_i=-\dot{\alpha}_i+\dot{p}_{2i-1}$ из уравнения выше:

$$\dot{P}_i=-\dot{\alpha}_i+\dot{X}_i\left[\sum_{j\neq i}^{N_0}\Big(\zeta(X_{ij}-2\eta)-\zeta(X_{ij})\Big)+\zeta(\eta)-\zeta(2\eta)\right]$$

$$+\sum_{l\neq i}^{N_0}\dot{X}_l\Big(\zeta(X_{il}+\eta)-\zeta(X_{il})\Big)-\sum_{l=1}^{N_0}\dot{X}_l\Big(\zeta(X_{il}-2\eta)-\zeta(X_{il}-\eta)\Big)$$

$$+e^{P_i}\prod_{k\neq i}^{N_0}\frac{\sigma^{1/2}(X_{ik}-2\eta)\sigma(X_{ik}+\eta)}{\sigma^{1/2}(X_{ik}+2\eta)\sigma(X_{ik}-\eta)}-e^{P_i}\prod_{k\neq i}^{N_0}\frac{\sigma^{1/2}(X_{ik}+2\eta)\sigma(X_{ik}-\eta)}{\sigma^{1/2}(X_{ik}-2\eta)\sigma(X_{ik}+\eta)}.$$

Подставляя сюда $\dot{\alpha}_i$ из

$$\alpha_i=\log\sigma(\eta)+\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N_0}\log\frac{\sigma(X_{ij}-2\eta)}{\sigma(X_{ij}+2\eta)},$$

окончательно получаем:

$$\ddot{X}_i=-\sum_{j\neq i}^{N_0}\dot{X}_i\dot{X}_j\Big(\zeta(X_{ij}+\eta)+\zeta(X_{ij}-\eta)-2\zeta(X_{ij})\Big)+\sigma(2\eta)\Big(U_i^+-U_i^-\Big),$$

где

$$U_i^{\pm}=\prod_{j\neq i}^{N_0}\frac{\sigma(X_{ij}\pm 2\eta)\sigma(X_{ij}\mp\eta)}{\sigma(X_{ij}\pm\eta)\sigma(X_{ij})}.$$

Это и есть уравнения движения деформированной системы РШ (при $g=\sigma(2\eta)$, $N=N_0$).

## 1.2 Коммутационное представление

Уравнения движения деформированной системы РШ не имеют представления Лакса, но допускают более общее коммутационное представление, известное в литературе как тройка Манакова. Из него можно получить интегралы движения. Здесь мы приведем только результат; вывод будет дан позднее в главе, посвященной динамике полюсов эллиптических решений уравнения Тоды типа B.

Теперь матрицы $L$ и $M$ будут зависеть от двух спектральных параметров – $\lambda$ и $k$ (впоследствии они окажутся связанными уравнением спектральной кривой). Рассмотрим матрицы

$$L_{ij}(k,\lambda) = \dot{x}_i \Phi(x_{ij}-\eta,\lambda) + k^{-1} g U_i^- \Phi(x_{ij}-2\eta,\lambda),$$

$$M_{ij}(k,\lambda) = \dot{x}_i (1-\delta_{ij}) \Phi(x_{ij},\lambda) + k^{-1} g U_i^+ \Phi(x_{ij}-\eta,\lambda) + \delta_{ij}\Big(\sum_l \dot{x}_l \zeta(x_{il}+\eta) - \sum_{l\neq i} \dot{x}_l \zeta(x_{il})\Big),$$

$$R_{ij}(k,\lambda) = g k^{-1} (U_i^- - U_i^+) \Phi(x_{ij}-\eta,\lambda).$$

Здесь и далее $g=\sigma(2\eta)$. Мы утверждаем, что матричное уравнение

$$\dot{L} + [L,M] = R(L-kI)$$

эквивалентно уравнениям движения деформированной системы РШ. Его можно записать в несколько ином виде, введя матрицы $\mathcal{L}(k,\lambda)=L(k,\lambda)-kI$ и

$$M^{\pm}_{ij}(k,\lambda) = \dot{x}_i (1-\delta_{ij}) \Phi(x_{ij},\lambda) + k^{-1} g U_i^{\pm} \Phi(x_{ij}-\eta,\lambda) + \delta_{ij}\Big(\sum_l \dot{x}_l \zeta(x_{il}+\eta) - \sum_{l\neq i} \dot{x}_l \zeta(x_{il})\Big),$$

тогда будем иметь

$$\dot{\mathcal{L}} = M^- \mathcal{L} - \mathcal{L} M^+,$$

так что матрицы $\mathcal{L}$, $M^+$, $M^-$ образуют тройку Манакова.

Вычисление, необходимое для доказательства сделанного утверждения, непростое и требует пояснений. Для этого введем матрицы

$$A^0_{ij} = (1-\delta_{ij})\Phi(x_{ij}), \quad A_{ij} = \Phi(x_{ij}-\eta), \quad B_{ij} = \Phi(x_{ij}-2\eta)$$

и диагональные матрицы

$$\dot{X}_{ij} = \delta_{ij}\dot{x}_i, \quad U^{\pm}_{ij} = \delta_{ij} U^{\pm}_i,$$

$$Z^{\pm}_{ij} = \delta_{ij}\Big(\sum_l \dot{x}_l \zeta(x_{il}\pm\eta) - \sum_{l\neq i} \dot{x}_l \zeta(x_{il})\Big),$$

$$D^-_{ij} = \delta_{ij} \sum_{l\neq i}\Big(\zeta(x_{il}-2\eta) + \zeta(x_{il}+\eta) - \zeta(x_{il}-\eta) - \zeta(x_{il})\Big),$$

$$S^-_{ij} = \delta_{ij} \sum_{l\neq i} \dot{x}_l \Big(\zeta(x_{il}-2\eta) + \zeta(x_{il}+\eta) - \zeta(x_{il}-\eta) - \zeta(x_{il})\Big).$$

Нам понадобятся также матрицы $A'_{ij} = \Phi'(x_{ij} - \eta, \lambda)$, $B'_{ij} = \Phi'(x_{ij} - 2\eta, \lambda)$. В этих обозначениях

$$L = \dot{X}A + gk^{-1}U^{-}B,$$

$$M = \dot{X}A^{0} + gk^{-1}U^{+}A - Z^{+}.$$

Теперь находим:

$$\dot{L} + [L, M] = \Big(\ddot{X} + (Z^{+}+Z^{-})\dot{X} + g(U^{-}-U^{+})\Big)A + gk^{-1}(U^{-}-U^{+})A(L - kI)$$

$$+ W_0 + gk^{-1}W_1 + g^2k^{-2}W_2,$$

где

$$W_0 = \dot{X}^2A' - \dot{X}A'\dot{X} + \dot{X}A\dot{X}A^0 - \dot{X}A^0\dot{X}A - \dot{X}AZ^{+} - \dot{X}Z^{-}A,$$

$$W_1 = U^{-}\dot{X}DB - U^{-}(S^{-}-Z^{+})B + U^{-}\dot{X}B' - U^{-}B'\dot{X} + \dot{X}AU^{+}A$$

$$+ U^{-}B\dot{X}A^0 - \dot{X}A^0U^{-}B - U^{-}BZ^{+} - U^{-}A\dot{X}A,$$

$$W_2 = U^{-}BU^{+}A - U^{+}AU^{-}B - (U^{-} - U^{+})AU^{-}B.$$

Прямое вычисление с использованием тождеств, приведенных в главе 1, показывает, что $W_0 = 0$. Вычисление $W_2$ дает:

$$\Big(U^{-}BU^{+}A - U^{+}AU^{-}B\Big)_{ij}$$

$$= \Phi(x_{ij} - 3\eta)\sum_{l}\Big[U_i^{-}U_l^{+}\Big(\zeta(x_{il} - 2\eta) + \zeta(x_{lj} - \eta) - \zeta(x_{ij} - 3\eta + \lambda) + \zeta(\lambda)\Big)$$

$$- U_i^{+}U_l^{-}\Big(\zeta(x_{il} - \eta) + \zeta(x_{lj} - 2\eta) - \zeta(x_{ij} - 3\eta + \lambda) + \zeta(\lambda)\Big)\Big].$$

Используя тот факт, что сумма вычетов эллиптической функции

$$\Big(\zeta(x-x_j-\eta) - \zeta(x-x_i+2\eta)\Big)\prod_{l}\frac{\sigma(x - x_l + 2\eta)\sigma(x - x_l - \eta)}{\sigma(x - x_l + \eta)\sigma(x - x_l)}$$

равна нулю, заключаем, что

$$\Big(U^{-}BU^{+}A - U^{+}AU^{-}B\Big)_{ij}$$

$$= \Phi(x_{ij}-3\eta)(U_i^{-}-U_i^{+})\sum_{l}\Big[U_l^{-}\Big(\zeta(x_{il}-\eta) + \zeta(x_{lj}-2\eta) - \zeta(x_{ij}-3\eta+\lambda) + \zeta(\lambda)\Big),$$

так что $W_2 = 0$. Вычисление, показывающее что и $W_1 = 0$, наиболее трудоемко. Нужно использовать тот факт, что сумма вычетов эллиптической функции

$$\Big(\zeta(x-x_j-\eta) - \zeta(x-x_i+\eta)\Big)\prod_{l}\frac{\sigma(x - x_l + 2\eta)\sigma(x - x_l - \eta)}{\sigma(x - x_l + \eta)\sigma(x - x_l)}$$

равна нулю (эта функция имеет простые полюса при $x = x_l$ и $x = x_l - \eta$, а также полюса второго порядка при $x = x_i - \eta$).

В результате получаем матричное тождество

$$\dot{L} + [L, M] = R(L - kI) + P,$$

где $P$ – матрица

$$P = \Big(\ddot{X} + (Z^+ + Z^-)\dot{X} + g(U^- - U^+)\Big)A,$$

и

$$R = gk^{-1}(U^- - U^+)A.$$

Уравнения движения деформированной системы РШ – это в точности условие $P = 0$.

## 1.3 Интегралы движения

Уравнение спектральной кривой имеет вид

$$\det \mathcal{L}(k, \lambda) = \det\Big(kI - L(k, \lambda)\Big) = 0.$$

Временная эволюция $L \to L(t)$ нашей "матрицы Лакса" не изоспектральна. Тем не менее, характеристический полином $\det(kI - L(k, \lambda))$ является интегралом движения, так что спектральная кривая не зависит от времени. Это следует из представления Манакова. Действительно,

$$\frac{d}{dt} \log \det(L - kI) = \frac{d}{dt} \operatorname{tr} \log(L - kI)$$

$$= \operatorname{tr}\Big(\dot{L}(L - kI)^{-1}\Big) = \operatorname{tr} R = 0,$$

поскольку матрица $R$ бесследовая:

$$\operatorname{tr} R = gk^{-1}\Phi(-\eta, \lambda) \sum_i (U_i^- - U_i^+) = 0,$$

что следует из того, что сумма $\sum_i (U_i^- - U_i^+)$ пропорциональна сумме вычетов эллиптической функции

$$F(x) = \prod_j \frac{\sigma(x - x_j - 2\eta)\sigma(x - x_j + \eta)}{\sigma(x - x_j - \eta)\sigma(x - x_j)}.$$

Характеристический полином $\det(kI - L(k, \lambda))$ – производящая функция интегралов движения (строго говоря, это не полином, а лорановский полином по $k$).

Чтобы изучить свойства спектральной кривой, удобно перейти к калибровочно-преобразованной матрице Лакса $\tilde{L} = e^{-\eta\zeta(\lambda)}G^{-1}LG$, где $G$ – диагональная матрица с матричными элементами $G_{ii} = e^{-\zeta(\lambda)x_i}$, и спектральному параметру $z = ke^{-\eta\zeta(\lambda)}$. Тогда уравнение спектральной кривой примет вид

$$\det\Big(zI - \tilde{L}(z, \lambda)\Big) = 0,$$

где

$$\tilde{L}_{ij}(z, \lambda) = \dot{x}_i \phi(x_{ij} - \eta, \lambda) - gz^{-1}U_i^- \phi(x_{ij} - 2\eta, \lambda), \quad \phi(x, \lambda) = \frac{\sigma(x + \lambda)}{\sigma(\lambda)\sigma(x)}.$$

Обозначим

$$Q(z,\lambda)=\frac{\det\Big(zI-\tilde L(z,\lambda)\Big)}{\sigma(2N\eta-\lambda)}.$$

Это производящая функция интегралов движения. Вычисление детерминанта дает

$$Q(z,\lambda)=\frac{z^N}{\sigma(2N\eta-\lambda)}-\frac{z^{-N}}{\sigma(\lambda)}$$

$$+\sum_{k=1}^{N} z^{N-k}\frac{\sigma(\lambda-k\eta)}{\sigma(\lambda)\sigma(2N\eta-\lambda)\sigma(k\eta)}\,\mathsf{J}_k-\sum_{k=1}^{N-1} z^{k-N}\frac{\sigma(\lambda-2N\eta+k\eta)}{\sigma(\lambda)\sigma(2N\eta-\lambda)\sigma(k\eta)}\,\mathsf{J}_k,$$

где $\mathsf{J}_k$ – интегралы движения деформированной системы РШ. Они могут быть найдены в явном виде (см. далее). Из уравнения спектральной кривой $Q(z,\lambda)=0$ видно, что она обладает голоморфной инволюцией $\iota:(z,\lambda)\mapsto(z^{-1},2N\eta-\lambda)$ с двумя неподвижными точками $(\pm1,N\eta)$.

Необходимо дать некоторые пояснения к вычислению детерминанта. Это довольно длинное, но прямое вычисление, которое использует формулу для детерминанта суммы двух матриц и формулу для детерминанта эллиптической матрицы Коши. Прежде всего, детерминант $\det(I+M)$ равен сумме всех диагональных миноров матрицы $M$ всех размеров, включая "пустой минор", который надо положить равным 1. После этого мы сталкиваемся с детерминантами вида $\det(A_{\mathcal J}+B_{\mathcal J})$, где $A_{\mathcal J}$, $B_{\mathcal J}$ – диагональные миноры матриц $\dot X_i\phi(X_{ij}-\eta,u)$, $\sigma(2\eta)z^{-1}U_i^-\phi(X_{ij}-2\eta,u)$ размера $n\le N$ со строками и столбцами, занумерованными индексами из множества $\mathcal J=\{j_1,\dots,j_n\}\subseteq\{1,\dots,N\}$ $(j_1<j_2<\ldots<j_n\le N)$. Формула для детерминанта суммы двух матриц утверждает, что

$$\det(A_{\mathcal J}+B_{\mathcal J})=\sum_{\mathcal I\subseteq\mathcal J}\det A^{(B)}_{\mathcal J\setminus\mathcal I},$$

где сумма идет по всем подмножествам $\mathcal I$ множества $\mathcal J$ и $A^{(B)}_{\mathcal J\setminus\mathcal I}$ – матрица $A_{\mathcal J}$, в которой строки с номерами из множества $\mathcal I$ заменены на соответствующие строки матрицы $B_{\mathcal J}$. Каждая матрица $A^{(B)}_{\mathcal J\setminus\mathcal I}$ – это эллиптическая матрица Коши (умноженная на диагональную матрицу), так что ее детерминант известен. Чтобы это увидеть, положим в эллиптической матрице Коши $x_j=X_j$ и

$$y_j=X_j-\eta\quad\text{if } j\in\mathcal J\setminus\mathcal I,$$

$$y_j=X_j-2\eta\quad\text{if } j\in\mathcal I.$$

Детерминант тогда представляется как полином Лорана от $z$ с коэффициентами, которые записываются как суммы по множествам $\mathcal I,\mathcal I'\subseteq\{1,\dots,N\}$ таким, что $\mathcal I\cap\mathcal I'=\emptyset$.

**Задача.** Проведите это вычисление со всеми подробностями и найдите явный вид коэффициентов $\mathsf{J}_k$.

Явный вид интегралов движения следующий:

$$\mathsf{J}_{\pm n}=\sum_{m=0}^{[k/2]} J_{\pm n,m},$$

где $J_{\pm n,m}$ дается формулой

$$J_{\pm n,m}=\frac{\sigma(n\eta)}{\sigma^{n-2m}(\eta)}\sum_{\substack{\mathcal{I},\mathcal{I}',\mathcal{I}\cap\mathcal{I}'=\emptyset\\|\mathcal{I}|=m,|\mathcal{I}'|=n-2m}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{I}'}\dot{X}_j\Big)\Big(\prod_{\substack{i,j\in\mathcal{I}'\\i<j}}V(X_{ij})\Big)\Big(\prod_{i\in\mathcal{I}}\prod_{\ell\in\mathcal{N}\setminus(\mathcal{I}\cup\mathcal{I}')}U^{\pm}(X_{i\ell})\Big).$$

Здесь

$$V(X_{ij})=\frac{\sigma^2(X_{ij})}{\sigma(X_{ij}+\eta)\,\sigma(X_{ij}-\eta)},$$

$$U^{\pm}(X_{ij})=\frac{\sigma(X_{ij}\pm2\eta)\,\sigma(X_{ij}\mp\eta)}{\sigma(X_{ij}\pm\eta)\,\sigma(X_{ij})}.$$

Первые два интеграла таковы:

$$\mathsf{J}_1=\sum_{i=1}\dot{x}_i,$$

$$\mathsf{J}_2=\frac{\sigma(2\eta)}{2\sigma^2(\eta)}\left[\sum_{i\neq j}\dot{x}_i\dot{x}_jV(x_{ij})+\sigma^2(\eta)\sum_i\Big(\prod_{\ell\neq i}U^+(x_{i\ell})+\prod_{\ell\neq i}U^-(x_{i\ell})\Big)\right],$$

В том, что $\mathsf{J}_1$ – интеграл движения, можно убедиться непосредственно, просуммировав уравнения движения. Можно доказать, что $J_{n,m}=J_{-n,m}$. Это следует из тождества

$$\sum_{\mathcal{I}\subset\mathcal{N}'}\prod_{i\in\mathcal{I}}\prod_{\ell\in\mathcal{N}'\setminus\mathcal{I}}U^+(X_{i\ell})=\sum_{\mathcal{I}\subset\mathcal{N}'}\prod_{i\in\mathcal{I}}\prod_{\ell\in\mathcal{N}'\setminus\mathcal{I}}U^-(X_{i\ell}),$$

где $\mathcal{N}'$ – любое подмножество множества $\mathcal{N}=\{1,\dots,N\}$, частным случаем которого является уже встречавшееся нам тождество $\sum_i(U_i^- - U_i^+)=0$.

# Список литературы


[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional $N$-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, "Наука", 1990.

[4] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[5] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[6] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, "Наука", Москва, 1970.

[7] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[8] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[9] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[10] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[11] I. Krichever, A. Zabrodin, *Monodromy free linear equations and many-body systems*, Letters in Mathematical Physics 113:75 (2023).

[12] А. Забродин, *Об интегрируемости деформированной системы Руйсенарса-Шнайдера*, УМН **78:2** (2023) 149–188.