Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 4

А.В. Забродин*

Системы Руйсенарса-Шнайдера

Системы типа КМ допускают деформацию, совершенно отличную от деформаций, обсуждавшихся в предыдущей главе. При этом гамильтониан больше не имеет представления в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. Об этой деформации часто говорят как о релятивистском обобщении систем КМ, и соответствующие системы называются системами Руйсенарса-Шнайдера (РШ), которые предложили их в 1986 году (см. [9, 10]). Они тоже являются интегрируемыми системами и существуют в рациональной, тригонометрической и эллиптической версиях. Мы начнем с рациональной версии, а потом рассмотрим эллиптические системы как наиболее общие; все остальные получаются из них вырождениями (стремлением одного или обоих периодов к бесконечности).

Рациональная система РШ

Гамильтониан и уравнения движения. Гамильтониан имеет вид

$$H_+ = \eta^{-2} \sum_{i=1}^{N} e^{\eta p_i} \prod_{j \neq i} \frac{(x_{ij} + \eta)^{1/2} (x_{ij} - \eta)^{1/2}}{x_{ij}},$$

где p_i, x_i – канонически сопряженные импульсы и координаты, $x_{ij} = x_i - x_j$, а $\eta > 0$ – параметр. В пределе $\eta \to 0$ получается гамильтониан рациональной системы КМ. Действительно, разлагая по степеням η, имеем:

$$H_+ = \eta^{-2} N + \eta^{-1} \sum_i p_i + \frac{1}{2} \Big(\sum_i p_i^2 - \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_{ij}^2} \Big) + O(\eta),$$

т.е. при вычитании сингулярных членов, первый из которых есть просто константа, а второй – полный импульс, в пределе $\eta \to 0$ воспроизводится гамильтониан КМ с $g = 1$. При этом нет никакой потери общности, поскольку растяжением координат можно добиться любого значения константы связи.

*e-mail: zabrodin@itep.ru

Для краткой записи последующих формул обозначим

$$V_i = \prod_{j \neq i} \frac{(x_{ij}+\eta)^{1/2}(x_{ij}-\eta)^{1/2}}{x_{ij}}.$$

Гамильтоновы уравнения движения таковы:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_+}{\partial p_i} = \eta^{-1} e^{\eta p_i} V_i,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_+}{\partial x_i} = -\frac{1}{2\eta^2} \sum_{j \neq i} \Big(e^{\eta p_i} V_i + e^{\eta p_j} V_j \Big) \Big(\frac{1}{x_{ij}+\eta} + \frac{1}{x_{ij}-\eta} - \frac{2}{x_{ij}} \Big).$$

Задача. Покажите, что ньютоновские уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_i = -\sum_{j \neq i} \dot{x}_i \dot{x}_j \Big(\frac{1}{x_{ij}+\eta} + \frac{1}{x_{ij}-\eta} - \frac{2}{x_{ij}} \Big) = -2 \sum_{j \neq i} \frac{\eta^2 \dot{x}_i \dot{x}_j}{x_{ij}(x_{ij}+\eta)(x_{ij}-\eta)}.$$

Систему РШ иногда называют релятивистским обобщением системы КМ. Это название оправдывается следующими соображениями. Наряду с H_+ введем еще

$$H_- = \eta^{-2} \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta p_i} \prod_{j \neq i} \frac{(x_{ij}+\eta)^{1/2}(x_{ij}-\eta)^{1/2}}{x_{ij}}.$$

Задача. Докажите, что $\{H_+, H_-\} = 0$.

Указание: это основано на тождестве

$$\sum_{i \neq k} \frac{1}{x_{ik}^3} \prod_{j \neq i,k} \Big(1 - \frac{\eta^2}{x_{ij}^2} \Big) = 0,$$

которое можно доказать, рассмотрев левую часть как рациональную функцию от, например, x_1 и проверив, что она не имеет особенностей, а на бесконечности равна нулю.

Введем теперь

$$H = H_+ + H_- = 2\eta^{-2} \sum_i \cosh(\eta p_i) V_i,$$

$$P = H_+ - H_- = 2\eta^{-2} \sum_i \sinh(\eta p_i) V_i$$

(гамильтониан и импульс системы), а также

$$B = \eta^{-1} \sum_i x_i.$$

Задача. Докажите, что эти функции удовлетворяют пуассоновой алгебре Пуанкаре

$$\{H, P\} = 0, \quad \{H, B\} = P, \quad \{P, B\} = H.$$

Это и свидетельствует о релятивистской инвариантности системы, причем параметр η имеет смысл обратной скорости света.

Чтобы избавиться от квадратных корней, можно сделать каноническое преобразование

$$e^{\eta p_i} \to e^{\eta p_i} \prod_{j\neq i} \Big(\frac{x_{ij}+\eta}{x_{ij}-\eta}\Big)^{1/2}, \quad x_i \to x_i.$$

Задача. Проверьте, что это преобразование каноническое.

Тогда в новых переменных гамильтонианы $H_\pm$ запишутся в виде

$$H_\pm = \eta^{-2} \sum_i e^{\pm \eta p_i} \prod_{j\neq i} \frac{x_{ij}\pm\eta}{x_{ij}}.$$

Задача. Проверьте, что для обоих этих гамильтонианов ньютоновские уравнения движения имеют тот же самый вид

$$\ddot{x}_i + \sum_{j\neq i} \dot{x}_i \dot{x}_j \Big(\frac{1}{x_{ij}+\eta} + \frac{1}{x_{ij}-\eta} - \frac{2}{x_{ij}}\Big) = 0$$

и исследуйте, как устроен предел этих уравнений к уравнениям движения системы КМ.

В дальнейшем мы будем рассматривать гамильтонианы системы РШ, не содержащие квадратных корней (после канонического преобразования).

Представление Лакса и интегралы движения. Уравнения движения системы РШ имеют представление Лакса с матрицами

$$L_{ij} = \frac{\dot{x}_i}{x_i - x_j - \eta},$$

$$M_{ij} = \delta_{ij} \Big(\sum_{k\neq i} \frac{\dot{x}_k}{x_i - x_k} - \sum_k \frac{\dot{x}_k}{x_i - x_k + \eta}\Big) + \frac{(1-\delta_{ij})\dot{x}_i}{x_i - x_j}.$$

Разумеется, пару Лакса можно выразить через координаты и импульсы, если подставить сюда

$$\dot{x}_i = \eta^{-1} e^{\eta p_i} \prod_{l\neq i} \frac{x_i - x_l + \eta}{x_i - x_l}.$$

Задача. Проверьте, что уравнение Лакса $\dot{L} + [L, M] = 0$ эквивалентно ньютоновским уравнениям движения.

Отметим, что матрица Лакса характеризуется коммутационным соотношением

$$[X, L] - \eta L = \dot{\mathbf{x}} \mathbf{e}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^{\mathrm{T}}$. В правой части стоит матрица ранга 1.

Из уравнения Лакса следует, что спектральные инварианты матрицы Лакса – интегралы движения. Рассмотрим, например, характеристический полином матрицы Лакса $\det(zI - L)$. Его можно вычислить явно, пользуясь тем, что матрица Лакса (а также любой ее диагональный минор) – это матрица Коши, умноженная на диагональную матрицу. Формула для детерминанта матрицы Коши известна:

$$\det_{1\leq i,j\leq n} \frac{1}{y_i - x_j} = \frac{\prod_{k<l}(y_k - y_l)(x_l - x_k)}{\prod_{k,l}(y_k - y_l)}.$$

В нашем случае $y_i = x_i - \eta$. Отсюда сразу находим:

$$\det(zI - L) = z^N + \sum_{k=1}^{N} z^{N-k} I_k,$$

где интегралы движения I_k имеют вид

$$I_k = \frac{\eta^{-k}}{k!} \sum_{[i_1,\dots,i_k]}^{N} \dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_k} \prod_{\alpha<\beta}^{k} \frac{x^2_{i_\alpha i_\beta}}{x^2_{i_\alpha i_\beta} - \eta^2}.$$

Суммирование ведется по всем наборам различных индексов $i_1, \dots, i_k$. В терминах импульсов имеем:

$$I_k = \eta^{-2k} \sum_{\mathcal{I}\subset\{1,\dots,N\},|\mathcal{I}|=k} \exp\Big(\eta \sum_{i\in\mathcal{I}} p_i\Big) \prod_{i\in\mathcal{I}, j\notin\mathcal{I}} \frac{x_{ij}+\eta}{x_{ij}}.$$

Здесь суммирование ведется по всем подмножествам $\mathcal{I}$ множества $\{1, \dots, N\}$ с числом элементов k. Среди этих интегралов движения содержится гамильтониан: $I_1 = H_+$. Отметим, что

$$I_N = \eta^{-2N} \exp\Big(\eta \sum_{i=1}^{N} p_i\Big).$$

Можно также ввести интегралы движения I_{-k} с отрицательными номерами. Они вводятся по формуле

$$I_{-k} = \eta^{-4k} I_N^{-1} I_{N-k} = \eta^{-2k} \sum_{\mathcal{I}\subset\{1,\dots,N\},|\mathcal{I}|=k} \exp\Big(-\eta \sum_{i\in\mathcal{I}} p_i\Big) \prod_{i\in\mathcal{I}, j\notin\mathcal{I}} \frac{x_{ij}-\eta}{x_{ij}}.$$

В частности, $I_{-1} = H_-$.

Инволютивность этих интегралов движения была доказана Руйсенарсом в самом общем эллиптическом случае методом, который использовал квантование системы РШ с постоянной Планка $\hbar$. Оказывается, доказать, что операторные интегралы движения коммутируют, проще, чем явно вычислять скобки Пуассона между их классическими аналогами. Инволютивность в классическом пределе $\hbar \to 0$ тогда следует из коммутативности.

Эллиптическая система РШ

Гамильтониан и уравнения движения. Гамильтонианы $H_\pm$ имеют вид

$$H_\pm = \sigma^{-2}(\eta) \sum_i e^{\pm\sigma(\eta)p_i} \prod_{j\neq i} \frac{\sigma(x_{ij}\pm\eta)}{\sigma(x_{ij})}.$$

Здесь и далее при тригонометрическом вырождении под функцией $\sigma(x)$ можно понимать синус. Точно так же как в рациональном случае находится предел при $\eta \to 0$, который после вычитания сингулярных членов и канонического преобразования совпадает с гамильтонианом эллиптической системы КМ.

Задача. Докажите, что $\{H_+, H_-\} = 0$.

Задача. Получите ньютоновские уравнения движения

$$\ddot{x}_i + \sum_{j\neq i} \dot{x}_i \dot{x}_j \Big(\zeta(x_{ij}+\eta) + \zeta(x_{ij}-\eta) - 2\zeta(x_{ij}) \Big) = 0.$$

Пользуясь тождеством для эллиптических функций их можно представить в виде

$$\ddot{x}_i = \sum_{j\neq i} \dot{x}_i \dot{x}_j \frac{\wp'(x_{ij})}{\wp(\eta) - \wp(x_{ij})}.$$

Представление Лакса и интегралы движения. Как и в случае эллиптической системы КМ, эллиптическая система РШ допускает целое семейство пар Лакса, зависящих от спектрального параметра λ. Матрицы L, M выражаются в терминах функции Ламэ-Эрмита $\Phi(x,\lambda)$ следующим образом:

$$L_{ij}(\lambda) = \dot{x}_i \Phi(x_{ij}-\eta, \lambda),$$

$$M_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} \Big(\sum_{k\neq i} \dot{x}_k \zeta(x_{ik}) - \sum_k \dot{x}_k \zeta(x_{ik}+\eta) \Big) + (1-\delta_{ij}) \dot{x}_i \Phi(x_{ij}, \lambda).$$

Задача. Проверьте, что уравнение Лакса $\dot{L}(\lambda) + [L(\lambda), M(\lambda)] = 0$ эквивалентно ньютоновским уравнениям движения.

Характеристический полином матрицы Лакса

$$R(z,\lambda) = \det(zI - L(\lambda))$$

сохраняется при динамике и служит производящей функцией интегралов движения. Руйсенарсом было доказано, что все эти интегралы движения находятся в инволюции. Уравнение $R(z,\lambda)=0$ задает комплексную кривую, которая называется спектральной кривой и является интегралом движения.

Эти интегралы движения могут быть найдены в явном виде. Матрица Лакса (а также любой ее диагональный минор) – это эллиптическя матрица Коши, умноженная на диагональную матрицу. Формула для детерминанта эллиптической матрицы Коши известна:

$$\det_{1\le i,j\le n} \left(\frac{\sigma(y_i - x_j + \lambda)}{\sigma(\lambda)\sigma(y_i - x_j)} \right) = \frac{\sigma\Big(\lambda + \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)\Big)}{\sigma(\lambda)} \frac{\prod_{k<l} \sigma(y_k - y_l)\sigma(x_l - x_k)}{\prod_{k,l} \sigma(y_k - y_l)}.$$

Задача. Докажите эту формулу.

В нашем случае $y_i = x_i - \eta$. Отсюда сразу находим:

$$\det(zI - L(\lambda)) = z^N + \sum_{k=1}^N z^{N-k} \frac{\sigma(\lambda - k\eta)}{\sigma(\lambda)} I_k,$$

где интегралы движения I_k имеют вид

$$I_k = \frac{\sigma^{-k}(\eta)}{k!} \sum_{[i_1,\dots,i_k]}^N \dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_k} \prod_{\alpha<\beta}^k \frac{\sigma^2(x_{i_\alpha i_\beta})}{\sigma(x_{i_\alpha i_\beta}+\eta)\sigma(x_{i_\alpha i_\beta}-\eta)}.$$

Суммирование ведется по всем наборам различных индексов $i_1, \dots, i_k$. В терминах импульсов имеем:

$$I_k = \sigma^{-2k}(\eta) \sum_{\mathcal{I} \subset \{1,\dots,N\}, |\mathcal{I}|=k} \exp\Big(\sigma(\eta) \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i\Big) \prod_{i \in \mathcal{I}, j \notin \mathcal{I}} \frac{\sigma(x_{ij}+\eta)}{\sigma(x_{ij})}.$$

Здесь суммирование ведется по всем подмножествам $\mathcal{I}$ множества $\{1, \dots, N\}$ с числом элементов k. Среди этих интегралов движения содержится гамильтониан: $I_1 = H_+$. Отметим, что

$$I_N = \sigma^{-2N}(\eta) \exp\Big(\sigma(\eta) \sum_{i=1}^{N} p_i\Big).$$

Можно также ввести интегралы движения I_{-k} с отрицательными номерами по формуле

$$I_{-k} = \sigma^{-4k}(\eta) I_N^{-1} I_{N-k} = \sigma^{-2k}(\eta) \sum_{\mathcal{I} \subset \{1,\dots,N\}, |\mathcal{I}|=k} \exp\Big(-\sigma(\eta) \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i\Big) \prod_{i \in \mathcal{I}, j \notin \mathcal{I}} \frac{\sigma(x_{ij}-\eta)}{\sigma(x_{ij})}.$$

В частности, $I_{-1} = H_-$.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[4] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[5] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[6] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[7] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[8] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[9] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[10] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.