Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 3

А.В. Забродин*

Система КМ с эллиптическим потенциалом

Потенциал взаимодействия в тригонометрической системе КМ допускает дальнейшую деформацию, при которой он становится двоякопериодической (эллиптической) функцией в комплексной плоскости с полюсами второго порядка. Мы будем называть такие системы эллиптическими. В пределе, когда второй период стремится к бесконечности, эллиптическая система переходит в тригонометрическую. Большинство утверждений о рациональных и тригонометрических системах КМ, включая свойство интегрируемости, имеют аналоги для эллиптических систем, хотя их формулировки и доказательства более сложны.

Эллиптические функции. Не предполагая, что читатель хорошо знаком с эллиптическими функциями, мы совершим краткий экскурс в их теорию, напомнив основные факты и зафиксировав обозначения. За более подробными сведениями следует обратиться к книгам [6, 7, 8].

Эллиптическими называются функции комплексного переменного, имеющие два линейно независимых над $\mathbb{R}$ периода (двоякопериодические). Если один из периодов стремится к бесконечности, эллиптические функции вырождаются в тригонометрические (или гиперболические). Согласно теореме Лиувилля, ограниченные во всей комплексной плоскости функции – только константы, поэтому непостоянная эллиптическая функция обязана иметь особенности. Одного простого полюса в параллелограмме периодов быть не может, т.к. сумма вычетов должна быть равна нулю, и простейшие эллиптические функции имеют либо два простых полюса в параллелограмме периодов, либо один полюс второго порядка с нулевым вычетом.

Мы будем использовать функции Вейерштрасса – $\wp$-функцию, ζ-функцию и σ-функцию. Из них только $\wp$-функция является двоякопериодической, а две другие, тесно с ней связанные, имеют простые трансформационные свойства при сдвигах на периоды. Пусть ω_1, ω_2 – комплексные числа, такие, что $\mathcal{I}m(\omega_2/\omega_1) > 0$. Для наглядности будем считать, что ω_1 вещественно и положительно, а ω_2 чисто мнимо, хотя это не обязательно. Точки $s = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, образуют решетку Λ в комплексной плоскости. Фактор комплексной плоскости по этой решетке, $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Lambda$,

*e-mail: zabrodin@itep.ru

– тор (эллиптическая кривая), т.е. паралеллограмм с отождествленными противоположными сторонами.

Функция Вейерштрасса $\wp(z)$ задается сходящимся рядом

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{s\neq 0}\Big(\frac{1}{(z-s)^2} - \frac{1}{s^2}\Big), \quad s = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Это четная двоякопериодическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$: $\wp(z+2\omega_\alpha) = \wp(z)$, $\alpha = 1, 2$. Во всех точках решетки она имеет полюса второго порядка, и других особенностей у нее нет. В малой окрестности нуля она ведет себя следующим образом:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2), \quad z \to 0$$

(обратите внимание на отсутствие константного члена разложения).

Функция $\zeta(z)$ – первообразная $\wp$-функции (со знаком минус): $\zeta'(z) = -\wp(z)$, т.е.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \Big(\wp(x) - \frac{1}{x^2}\Big)dx.$$

Она задается рядом

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s\neq 0}\Big(\frac{1}{z-s} + \frac{1}{s} + \frac{z}{s^2}\Big), \quad s = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Это нечетная функция, которая уже не является двоякопериодической, но при сдвигах на периоды преобразуется очень просто:

$$\zeta(z+2\omega_\alpha) = \zeta(z) + 2\eta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

где η_α – некоторые константы (зависящие от ω_1, ω_2), причем $\eta_\alpha = \zeta(\omega_\alpha)$, как легко видеть, положив в этой формуле $z = -\omega_\alpha$. Нетрудно доказать следующее соотношение между ними:

$$2\eta_1\omega_2 - 2\eta_2\omega_1 = \pi i.$$

Функция $\zeta(z)$ имеет простые полюса с вычетом 1 во всех точках решетки, и других особенностей у нее нет. При $z \to 0$ она ведет себя следующим образом:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + O(z^3).$$

Функция $\sigma(z)$ вводится соотношением $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$, откуда

$$\log(\sigma(z)/z) = \int_0^z \Big(\zeta(x) - \frac{1}{x}\Big)dx.$$

Она задается бесконечным произведением по решетке

$$\sigma(z) = z\prod_{s\neq 0}\Big(1 - \frac{z}{s}\Big)e^{\frac{z}{s} + \frac{z^2}{2s^2}}, \quad s = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ее трансформационные свойства при сдвигах на периоды таковы:

$$\sigma(z+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)}\sigma(z).$$

Это нечетная целая функция, имеющая нули первого порядка во всех точках решетки. При $z \to 0$ она ведет себя следующим образом:

$$\sigma(z) = z + O(z^5).$$

Функции Вейерштрасса удовлетворяют большому количеству красивых и нетривиальных тождеств. Мы здесь отметим следующие:

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)},$$

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta(u),$$

$$\sigma(a+b)\sigma(a-b)\sigma(u+c)\sigma(u-c) + \sigma(b+c)\sigma(b-c)\sigma(u+a)\sigma(u-a) \\ + \sigma(c+a)\sigma(c-a)\sigma(u+b)\sigma(u-b) = 0.$$

Общий способ доказательства подобных тождеств таков. Надо все перенести в одну часть или поделить одну часть равенства на другую и рассмотреть полученное выражение как функцию какого-нибудь одного аргумента, например, u. После этого нужно проверить, что эта функция двоякопериодическая и не имеет особенностей; следовательно, по теореме Лиувилля это константа. Найти константу можно, положив u равным какому-нибудь специальному значению, для которого значение функции легко находится.

При $\omega_1 = \infty$, $\omega_2 = \pi i/\gamma$ функции Вейерштрасса вырождаются в гиперболические:

$$\wp(x) = \frac{\gamma^2}{\sinh^2(\gamma x)} + \frac{\gamma^2}{3},$$

$$\zeta(x) = \gamma \coth(\gamma x) - \frac{\gamma^2}{3}\, x,$$

$$\sigma(x) = \gamma^{-1} e^{-\frac{1}{6}\gamma^2 x^2} \sinh(\gamma x).$$

Если оба периода стремятся к бесконечности, функции Вейерштрасса вырождаются в рациональные:

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \zeta(x) = \frac{1}{x}, \quad \sigma(x) = x.$$

Нам еще будет нужна функция

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\sigma(x+\lambda)}{\sigma(x)\sigma(\lambda)}\, e^{-\zeta(\lambda)x},$$

которая называется функцией Ламэ-Эрмита. Она двоякопериодична по λ и квазипериодична по x:

$$\Phi(x + 2\omega_\alpha, \lambda) = e^{2(\eta_\alpha \lambda - \zeta(\lambda)\omega_\alpha)} \Phi(x, \lambda).$$

Ее разложение при $x \to 0$ имеет вид

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \wp(\lambda) x + O(x^2).$$

Отметим следующие тождества:

$$\partial_x \Phi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)\Big(\zeta(x+\lambda) - \zeta(x) - \zeta(\lambda)\Big),$$

$$\Phi(x,\lambda)\Phi(y,\lambda) = \Phi(x+y,\lambda)\Big(\zeta(x) + \zeta(y) - \zeta(x+y+\lambda) + \zeta(\lambda)\Big),$$

$$\partial_x \Phi(x,\lambda)\Phi(y,\lambda) - \partial_y \Phi(y,\lambda)\Phi(x,\lambda) = \Phi(x+y,\lambda)\Big(\wp(y) - \wp(x)\Big),$$

которые используются далее.

Гамильтониан и уравнения движения. Гамильтониан эллиптической системы КМ имеет вид

$$H = \sum_i p_i^2 - g^2 \sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j).$$

Растяжение координат и периодов $x_i \to g x_i$, $\omega_\alpha \to g\omega_\alpha$ позволяет без потери общности положить $g = 1$. Уравнения движения таковы:

$$\dot{x}_i = 2p_i,$$

$$\dot{p}_i = -2g^2 \sum_{j \neq i} \wp'(x_i - x_j),$$

или, в ньютоновской форме,

$$\ddot{x}_i = 4g^2 \sum_{j \neq i} \wp'(x_i - x_j).$$

Представление Лакса. В эллиптическом случае естественным образом строится целое семейство пар Лакса, зависящих от комплексного параметра λ, который называется спектральным параметром. Разумеется, такие семейства существуют и в вырожденных случаях – тригонометрическом и рациональном, а пары Лакса, которые мы в этих случаях обсуждали ранее, получаются при $\lambda = \infty$. В эллиптическом случае никакой выделенной точки подобной ∞ на торе нет, что побуждает с самого начала рассматривать все семейство.

Итак, матрицы $L = L(\lambda)$, $M = M(\lambda)$ теперь зависят от параметра λ. Их матричные элементы выражаются через функцию Ламэ-Эрмита

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{\sigma(x+\lambda)}{\sigma(x)\sigma(\lambda)}\, e^{-\zeta(\lambda)x}$$

и ее производную $\partial_x \Phi(x,\lambda) = \Phi'(x,\lambda)$ следующим образом:

$$L_{ij}(\lambda) = -\delta_{ij} p_i - g(1-\delta_{ij})\Phi(x_i - x_j, \lambda),$$

$$M_{ij}(\lambda) = -2g\delta_{ij} \sum_{k \neq i} \wp(x_i - x_k) - 2g(1-\delta_{ij})\Phi'(x_i - x_j, \lambda).$$

Задача. Найдите тригонометрическое и рациональное вырождения этой пары Лакса.

Задача. Покажите, что уравнение Лакса

$$\dot{L}(\lambda) + [L(\lambda), M(\lambda)] = 0$$

эквивалентно уравнениям движения.

Как и ранее, уравнение Лакса означает, что матрица Лакса в процессе эволюции подвергается изоспектральному преобразованию, и мы можем предъявить семейство интегралов движения (спектральных инвариантов) $\mathrm{tr} L^k(\lambda)$.

Задача. Найдите $\mathrm{tr} L^2(\lambda)$ и $\mathrm{tr} L^3(\lambda)$ в явном виде.

Характеристический полином матрицы Лакса

$$R(z, \lambda) = \det(zI - L(\lambda))$$

также интеграл движения. Уравнение $R(z, \lambda) = 0$ задает комплексную кривую, которая называется спектральной кривой и является интегралом движения.

Задача. Докажите, что все эти интегралы движения находятся в инволюции (достаточно доказать это для собственных значений матрицы Лакса).

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[4] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[5] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[6] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[7] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[8] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[9] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[10] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.