Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 2

А.В. Забродин*

Рациональная система КМ в квадратичном потенциале

Частицы системы КМ можно поместить во внешнее поле с квадратичным потенциалом с сохранением интегрируемости. Гамильтониан системы КМ во внешнем поле имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 - g^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \omega^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2,$$

откуда находим уравнения движения:

$$\ddot{x}_i = -8g^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3} - 4\omega^2 x_i.$$

Из них сразу следует, что центр масс частиц совершает гармонические колебания с частотой 2ω.

Коммутационное представление. В обозначениях предыдущего раздела введем матрицы

$$L^{\pm} = L \pm i\omega X.$$

Задача. Покажите, что уравнения движения эквивалентны матричным уравнениям

$$\dot{L}^{\pm} + [L^{\pm}, M] \pm 2i\omega L^{\pm} = 0$$

с матрицей M из предыдущего раздела.

Рассмотрим матрицы

$$L_1 = L^+ L^- = L^2 + \omega^2 X^2 - ig\omega(E - I),$$

$$L_2 = L^- L^+ = L^2 + \omega^2 X^2 + ig\omega(E - I).$$

Задача. Покажите, что матрицы L_1, L_2 удовлетворяют уравнению Лакса:

$$\dot{L}_\alpha + [L_\alpha, M] = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

*e-mail: zabrodin@itep.ru

Такому же уравнению Лакса удовлетворяет и матрица

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = L^2 + \omega^2 X^2,$$

и мы можем сразу предъявить набор интегралов движения

$$I_k = \operatorname{tr} \mathcal{L}^k.$$

При $k = 1$ получаем гамильтониан системы. Можно показать, что все эти интегралы движения находятся в инволюции.

Задача. Получите явное выражение для I_2.

Отметим, что коммутационное представление можно записать в терминах матриц L, M и X. Из уравнений $\dot{L}^{\pm} + [L^{\pm}, M] \pm 2i\omega L^{\pm} = 0$ находим:

$$\dot{L} + [L, M] \pm i\omega\Big(\dot{X} + [X, M] + 2L\Big) = 2\omega^2 X.$$

Мнимая часть должна быть равна нулю, т.е. должно быть

$$\dot{X} + [X, M] + 2L = 0,$$

в чем можно убедиться непосредственно. Поэтому мы имеем коммутационное представление в виде

$$\dot{L} + [L, M] = 2\omega^2 X.$$

Метод проектирования. При $\omega \neq 0$ свободное движение в пространстве матриц надо заменить на гармонические колебания с частотой 2ω и спроектировать на собственные значения. А именно, мы покажем, что собственные значения матрицы

$$X_0 \cos(2\omega t) - L_0 \frac{\sin(2\omega t)}{\omega}$$

двигаются во времени как частицы системы КМ в квадратичном потенциале. Очевидно, при $\omega = 0$ это сводится к утверждению предыдущего раздела. Пусть V – диагонализующая матрица:

$$X_0 \cos(2\omega t) - L_0 \frac{\sin(2\omega t)}{\omega} = V X V^{-1},$$

где X – диагональная матрица. Продифференцировав это соотношение по времени, получим:

$$2\omega \sin(2\omega t) X_0 + \cos(2\omega t) L_0 = 2 V L V^{-1},$$

где мы положили $L = -\frac{1}{2}(\dot{X} + [X, M])$, и $M = -\dot{V} V^{-1}$. Продифференцировав еще раз, будем иметь:

$$\dot{L} + [L, M] = 2\omega^2 X,$$

т.е. приведенное выше коммутационное представление уравнений движения.

Теперь мы должны показать, что матрица L имеет требуемый вид. Уравнение $\dot{L} + [L, M] = 2\omega^2 X$ равносильно уравнению Лакса для $\mathcal{L} = L^2 + \omega^2 X^2$. Поэтому мы можем написать

$$V(L^2 + \omega^2 X^2) V^{-1} = L_0^2 + \omega^2 X_0^2.$$

Подставив сюда временную зависимость матрицы VXV^{-1}, после некоторых простых преобразований получим:

$$VLV^{-1} = \cos(2\omega t)L_0 + \omega\sin(2\omega t)X_0.$$

Это соотношение позволяет найти коммутатор $[L, X]$, который оказывается не зависящим от времени и равным

$$[L, X] = V^{-1}[L_0, X_0]V = gV^{-1}(I - E)V = g(I - E),$$

как и ранее, поскольку матрица V нормирована точно таким же образом. Отсюда следует, что матрица L имеет такой же вид, как и раньше.

Отметим еще, что если $x_i(t)$ – решение уравнений движения системы КМ с $\omega = 0$, из приведенных формул следует, что

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(\omega^{-1}\tan(2\omega t))\cos(2\omega t)$$

является решением уравнений движения системы КМ во внешнем поле с $\omega \neq 0$.

Система КМ с тригонометрическим потенциалом

Потенциал взаимодействия в системе КМ допускает деформацию, при которой он становится периодическим в комплексной плоскости с одним вещественным или чисто мнимым периодом. Мы будем называть такие системы тригонометрическими (гиперболическими) системами КМ (иногда их называют системами Калоджеро-Сазерденда). Интегрируемость при такой деформации сохраняется. Все утверждения, сделанные в предыдущем разделе для рациональной системы КМ за исключением самодуальности, имеют свои прямые аналоги для тригонометрических систем, хотя их формулировки и доказательства могут быть несколько более сложными по форме.

Гамильтониан и уравнения движения. Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_i p_i^2 - g^2 \sum_{i\neq j} \frac{\gamma^2}{\sinh^2(\gamma(x_i - x_j))},$$

где g^2 – константа взаимодействия, а γ – параметр, характеризующий период потенциала, который равен $\pi i/\gamma$. При вещественных γ имеем гиперболическую систему, при чисто мнимых – тригонометрическую. В дальнейшем мы не будем заострять внимание на этой разнице, называя их тригонометрическими в обоих случаях. В пределе $\gamma \to 0$ приходим к рациональной системе КМ.

Уравнения движения таковы:

$$\dot{x}_i = 2p_i,$$

$$\dot{p}_i = -4g^2\gamma^3 \sum_{j\neq i} \frac{\cosh(\gamma(x_i - x_j))}{\sinh^3(\gamma(x_i - x_j))},$$

или, в ньютоновской форме,

$$\ddot{x}_i = -8g^2\gamma^3 \sum_{j\neq i} \frac{\cosh(\gamma(x_i - x_j))}{\sinh^3(\gamma(x_i - x_j))}.$$

Представление Лакса и интегралы движения. Матрица Лакса тригонометрической системы КМ имеет вид

$$L_{ij} = -p_i \delta_{ij} - \frac{g\gamma(1-\delta_{ij})}{\sinh(\gamma(x_i - x_j))}.$$

В дальнейшем будет удобно перейти к новым переменным

$$w_i = e^{2\gamma x_i}$$

и наряду с диагональной матрицей $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_N)$ ввести диагональную матрицу $W = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_N)$. Введем еще внедиагональные матрицы A, B с матричными элементами

$$A_{ik} = 2\gamma(1-\delta_{ik})\frac{w_i^{1/2} w_k^{1/2}}{w_i - w_k},$$
$$B_{ik} = 4\gamma^2(1-\delta_{ik})\frac{w_i^{3/2} w_k^{1/2}}{(w_i - w_k)^2},$$

а также диагональную матрицу

$$D_{ik} = 4\gamma^2 \delta_{ik} \sum_{l \neq i} \frac{w_i w_l}{(w_i - w_l)^2}.$$

Мы обозначаем их теми же буквами, что и соответствующие матрицы в предыдущем разделе, поскольку они являются их полными аналогами и в пределе $\gamma \to 0$ переходят в них. Пара Лакса такова:

$$L = -\tfrac{1}{2}\dot{X} - gA,$$

$$M = \gamma \dot{X} + 2gB - 2gD.$$

Задача. Докажите, что уравнение Лакса $\dot{L} + [L, M] = 0$ эквивалентно уравнениям движения.

Приведем уравнение, характеризующее матрицу Лакса:

$$[W, L] = 2g\gamma\Big(W - W^{1/2} E W^{1/2}\Big)$$

или

$$W^{1/2} L W^{-1/2} - W^{-1/2} L W^{1/2} = 2g\gamma(I - E).$$

В пределе $\gamma \to 0$ оно переходит в уравнение $[X, L] = g(I - E)$, которое обсуждалось в предыдущем разделе.

Как и в предыдущем разделе, из представления Лакса следует, что в процессе эволюции матрица Лакса подвергается изоспектральной деформации, и величины $H_k = \mathrm{tr} L^k$ являются интегралами движения.

Задача. Убедитесь, что $H_2 = H$ и найдите H_3 в явном виде.

Задача. Методом, использованным в предыдущем разделе, докажите инволютивность интегралов движения H_k.

Линеаризация в пространстве матриц. Линеаризация в пространстве матриц имеет аналог для тригонометрической системы: величины $w_i(t) = e^{2\gamma x_i(t)}$, где $x_i(t)$ – координаты частиц в тригонометрической системе КМ, являются собственными значениями матрицы

$$e^{-4\gamma t L_0} e^{2\gamma X_0}.$$

Задача. Докажите это утверждение.

Задача. Попробуйте найти соответствующую матрицу для высших потоков.

Тригонометрическая система КМ и рациональная система во внешнем поле. В 1997 году Некрасовым был получен замечательный результат, устанавливающий соответствие динамики тригонометрической системы КМ и динамики рациональной системы КМ во внешнем квадратичном потенциале.

Рассмотрим системы с отталкиванием, т.е. заменим в предыдущих формулах $g \to ig$, а также $\gamma \to i\gamma$. Чтобы не смешивать обозначения, обозначим координаты и импульсы тригонометрической системы через θ_i, $-\xi_i$ с каноническими скобками Пуассона между ними. Гамильтониан и матрица Лакса тригонометрической системы примут тогда вид

$$H = \sum_i \xi_i^2 + g^2 \sum_{i \neq j} \frac{\gamma^2}{\sin^2(\gamma(\theta_i - \theta_j))},$$

$$L_{jk} = \xi_j \delta_{jk} - \frac{ig\gamma(1-\delta_{jk})}{\sin(\gamma(\theta_j - \theta_k))}.$$

Изменим также обозначение для матрицы Лакса в рациональной системе и введем матрицу

$$P_{jk} = -p_j \delta_{jk} - \frac{ig(1-\delta_{jk})}{x_j - x_k}$$

(это то, что было матрицей Лакса L); в случае отталкивания она эрмитова. Вместо матриц $L^{\pm}$ рассмотрим матрицы

$$Z = P + i\omega X, \quad Z^\dagger = P - i\omega X.$$

Как следует из предыдущего раздела, матрица Z удовлетворяет уравнению типа Лакса

$$\dot{Z} + [Z, M] + 2i\omega Z = 0,$$

из которого можно заключить, что

$$Z(t) = e^{2i\omega t} V Z(0) V^{-1}$$

с унитарной матрицей V.

Рассмотрим разложение матрицы Z в произведение унитарной и эрмитовой, аналогичное представлению комплексного числа z в виде $z = re^{i\varphi}$. Мы запишем его в симметризованном виде

$$Z = U^{1/2} R^{1/2} U^{1/2}, \quad R^\dagger = R, \quad U^\dagger = U^{-1},$$

тогда
$$Z^\dagger Z = U^{-1/2} R U^{1/2}.$$
Пусть V – унитарная матрица, диагонализующая матрицу U, т.е.
$$U = VWV^{-1}, \quad W = \mathrm{diag}(e^{2i\omega\theta_1}, \ldots, e^{2i\omega\theta_N}).$$
Она определена с точностью до умножения справа на диагональную матрицу. Мы зафиксируем эту свободу, наложив условие $U\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

Положим
$$L = V^{-1} R V.$$
Коммутационное соотношение $[X, P] = ig(I - E)$ или $[Z, Z^\dagger] = -2\omega g(I - E)$ переписывается в виде
$$U^{1/2} R U^{-1/2} - U^{-1/2} R U^{1/2} = -2\omega g(I - E)$$
или
$$W^{1/2} L W^{-1/2} - W^{-1/2} L W^{1/2} = 2\omega g(I - E).$$
Сравнив с аналогичным соотношением для тригонометрической системы КМ, заключаем, что должно быть $\omega = \gamma$, и тогда L станет матрицей Лакса для нее с диагональными элементами $\xi_i = (V^{-1}RV)_{ii}$. Поэтому гамильтонианы $\mathrm{tr}(Z^\dagger Z)^k$ рациональной системы КМ превращаются в гамильтонианы $\mathrm{tr}L^k$ тригонометрической системы КМ. В частности, при $k = 1$ имеем, что динамика частиц КМ во внешнем поле эквивалентна свободной динамике частиц тригонометрическогой системы КМ с гамильтонианом $\sum_i \xi_i$, т.е. θ_j двигаются с одинаковой постоянной скоростью. Это следует и из соотношения
$$Z(t) = e^{2i\omega t} V Z(0) V^{-1},$$
установленного ранее.

Осталось показать, что преобразование от (p_i, x_i) к (ξ_i, θ_i) каноническое. Опять-таки это проще делать в матричном виде. Мы имеем
$$\mathrm{tr}(dZ \wedge dZ^\dagger) = 2i\omega \mathrm{tr}(dP \wedge dX).$$

Задача. Пользуясь тождеством
$$\mathrm{tr}(d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y}) = \mathrm{tr}(dX \wedge dY) - d\mathrm{tr}([X, Y] U^{-1} dU)$$
из задачи к лекции 1, покажите, что
$$\sum_i d\xi_i \wedge d\theta_i = -\mathrm{tr}(dP \wedge dX) = \sum_i dp_i \wedge dx_i,$$
что и означает каноничность преобразования.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, "Наука", 1990.

[4] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[5] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[6] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, "Наука", Москва, 1970.

[7] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[8] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[9] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[10] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.