Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения. Лекция 11

А.В. Забродин*

Системы Калоджеро-Мозера и Руйсенарса-Шнайдера в дискретном времени

Как мы убедились в предыдущих главах, динамику полюсов эллиптических решений нелинейных интегрируемых уравнений можно вывести из вспомогательных линейных задач для этих уравнений, причем волновая функция (решение линейной задачи) параметризуется вычетами в полюсах x_i, на которые возникает система линейных уравнений. Альтернативный подход заключается в том, чтобы параметризовать волновую функцию не вычетами в полюсах, а ее нулями y_i, и получить уравнения на эти нули. Например, в рациональном случае вместо функции ψ в виде

$$\psi = e^{kx}\Big(1 + \sum_i \frac{c_i}{x - x_i}\Big)$$

можно рассматривать функцию

$$\psi = e^{kx} \prod_i \frac{x - y_i}{x - x_i}$$

и подставить ее в линейное уравнение. Как мы увидим, при этом возникает система уравнений, связывающая нули и полюса, симметричная относительно перестановки $x_i \leftrightarrow y_i$. Отсюда следует, что нули волновой функции удовлетворяют тем же уравнениям движения, что и полюса, т.е. динамическим уравнениям систем КМ или РШ. Это позволяет интерпретировать преобразование $x_i \to y_i$ (переход от полюсов к нулям) как преобразование Бэклунда систем типа КМ или РШ. В свою очередь, такое преобразование Бэклунда можно понимать как сдвиг на один шаг дискретного времени $n \in \mathbb{Z}$, т.е. если обозначить $x_i = x_i^n$, $y_i = x_i^{n+1}$, преобразование Бэклунда означает эволюцию в дискретном времени $x_i^n \to x_i^{n+1}$. В этом и заключается идея построения интегрируемой временной дискретизации систем типа КМ и РШ. Возникают уравнения, связывающие x_i^n, x_i^{n+1} и x_i^{n-1}, непрерывный предел которых совпадает с уравнениями движения систем КМ или РШ. Преобразованиям Бэклунда в интегрируемых системах многих частиц и динамике в дискретном времени посвящены работы [37, 38, 39].

*e-mail: zabrodin@itep.ru

Система КМ в дискретном времени

Мы начнем с системы КМ и рассмотрим сразу ее наиболее общую эллиптическую версию.

Преобразование Бэклунда. Обратимся к линейному уравнению

$$\partial_t \psi = \partial_x^2 \psi + 2\partial_x^2 \log \tau \, \psi$$

на волновую функцию ψ, где $t = t_2$. Представим волновую функцию в виде $\psi = \tilde{\tau}/\tau$, тогда линейное уравнение запишется в виде

$$\partial_t \log \frac{\tilde{\tau}}{\tau} = \partial_x^2 \log(\tau\tilde{\tau}) + \Big(\partial_x \log \frac{\tilde{\tau}}{\tau}\Big)^2.$$

Для эллиптических решений тау-функция имеет вид

$$\tau = e^{Q(x,t)} \prod_i \sigma(x - x_i(t)),$$

где $Q(x,t)$ – некоторая квадратичная форма по x, t, явный вид которой нам сейчас не важен. Поскольку ψ должна быть двоякоблоховской функцией, общий вид функции $\tilde{\tau}$ следующий:

$$\tilde{\tau} = Ce^{Q(x,t)+\alpha x+\beta t} \prod_i \sigma(x - y_i(t)),$$

с некоторыми константами C, α, β, так что

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tau} = Ce^{\alpha x+\beta t} \prod_i \frac{\sigma(x - y_i)}{\sigma(x - x_i)}.$$

Подставляя это в наше уравнение, имеем:

$$\sum_i \Big(\dot{x}_i \zeta(x - x_i) - \dot{y}_i \zeta(x - y_i)\Big) = -\sum_i \Big(\wp(x - x_i) + \wp(x - y_i)\Big)$$

$$+ \left(\sum_i \Big(\zeta(x - x_i) - \zeta(x - y_i)\Big)\right)^2 + 2\alpha \sum_i \Big(\zeta(x - x_i) - \zeta(x - y_i)\Big) + \mathrm{const}\,.$$

Приравнивая коэффициенты при полюсах в точках $x = x_i$ и $x = y_i$, получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_i = 2\sum\limits_{j\neq i} \zeta(x_i - x_j) - 2\sum\limits_j \zeta(x_i - y_j) + 2\alpha, \\[3ex] \dot{y}_i = -2\sum\limits_{j\neq i} \zeta(y_i - y_j) + 2\sum\limits_j \zeta(y_i - x_j) + 2\alpha. \end{array}\right.$$

Переопределив $x_i \to x_i + 2\alpha t$, $y_i \to y_i + 2\alpha t$, можно без потери общности положить $\alpha = 0$, что мы и сделаем. Эти уравнения симметричны относительно перестановки $x_i \leftrightarrow y_i$ (при одновременном изменении знака t). Отметим, что в тригонометрическом и рациональном случаях число переменных y_i не обязано равняться числу переменных x_i, т.к. часть нулей волновой функции может уходить на бесконечность.

Мы покажем, что из этих уравнений следуют уравнения движения системы КМ как для x_i, так и для y_i. В самом деле, дифференцируя первое уравнение по времени, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_i &= -2\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i-\dot{x}_j)\wp(x_i-x_j)+2\sum_j(\dot{x}_i-\dot{y}_j)\wp(x_i-y_j) \\
&= -4\sum_{j\neq i}\Big(\sum_{k\neq i}\zeta(x_i-x_k)-\sum_k\zeta(x_i-y_k)-\sum_{k\neq j}\zeta(x_j-x_k)+\sum_k\zeta(x_j-y_k)\Big)\wp(x_i-x_j) \\
&\quad +4\sum_j\Big(\sum_{k\neq i}\zeta(x_i-x_k)-\sum_k\zeta(x_i-y_k)+\sum_{k\neq j}\zeta(y_j-y_k)-\sum_k\zeta(y_j-x_k)\Big)\wp(x_i-y_j).
\end{aligned}
$$

Ниже мы покажем, что правая часть на самом деле равна $4\sum\limits_{j\neq i}\wp'(x_i-x_j)$, т.е. x_i удовлетворяют уравнениям движения системы КМ. В силу симметрии те же уравнения выполняются для y_i. Поэтому преобразование $x_i\to y_i$ можно считать преобразованием Бэклунда для системы КМ, переводящим одно решение в другое. Это основано на тождестве

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j\neq i}\Big(\sum_{k\neq i}\zeta(x_i-x_k)-\sum_k\zeta(x_i-y_k)-\sum_{k\neq j}\zeta(x_j-x_k)+\sum_k\zeta(x_j-y_k)\Big)\wp(x_i-x_j) \\
&+\sum_j\Big(\sum_{k\neq i}\zeta(x_i-x_k)-\sum_k\zeta(x_i-y_k)+\sum_{k\neq j}\zeta(y_j-y_k)-\sum_k\zeta(y_j-x_k)\Big)\wp(x_i-y_j) \\
&-\sum_{j\neq i}\wp'(x_i-x_j)=0,
\end{aligned}
$$

где $x_1,\ldots,x_N$, $y_1,\ldots,y_N$ – произвольные переменные.

Доказательство тождества. Докажем это тождество.

Первый нетривиальный случай – это $N=2$. Положим $i=1$ и рассмотрим левую часть как функцию от x_1. Легко видеть, что это эллиптическая функция от x_1. Она может иметь полюса при $x_1=x_2$, $x_1=y_1$, $x_1=y_2$. Положив $x_1=x_2+\varepsilon$ и разложив при $\varepsilon\to 0$, можно проверить, что левая часть на самом деле регулярна при $x_1=x_2$ и, более того, ведет себя как $O(\varepsilon)$, так что она при $x_1=x_2$ обращается в 0. Аналогичным образом можно убедиться, что левая часть регулярна при $x_1=y_1$, $x_1=y_2$. Отсюда следует, что она тождественно равна нулю.

Переходя к общему случаю, обозначим левую часть тождества через $F_N^{(i)}=F_N^{(i)}(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N)$ и рассмотрим ее как функцию от x_i. Легко видеть, что это эллиптическая функция от x_i. Она может иметь полюса при $x_i=x_{i_0}$ ($i_0=1,\ldots,N$, $i_0\neq i$) и $x_i=y_{i_0}$ ($i_0=1,\ldots,N$). Положив $x_i=x_{i_0}+\varepsilon$, $x_i=y_{i_0}+\varepsilon$ и разложив при $\varepsilon\to 0$, можно проверить, что $F_N^{(i)}$ регулярна, т.е. сингулярные вклады сокращаются и $F_N^{(i)}=O(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, $F_N^{(i)}$ – константа, не зависящая от x_i. Чтобы ее найти, разложим $F_N^{(i)}$ вблизи x_{i_0} вплоть до членов порядка ε^0:

$$F_N^{(i)}=F_{N-1}^{(i_0)}(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_N,y_1,\ldots,\hat{y}_i,\ldots,y_N)+G_{N-1}^{(i_0)}+O(\varepsilon),$$

где $\hat{x}_i$, $\hat{y}_i$ означает, что аргументы x_i, y_i опущены, и

$$G^{(i_0)}_{N-1} = G^{(i_0)}_{N-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N)$$

дается выражением

$$\begin{aligned}
G^{(i_0)}_{N-1} = \frac{1}{2}\sum_k \wp'(x_{i_0} - y_k) - \frac{1}{2}\sum_{k\neq i,i_0} \wp'(x_{i_0} - x_k) + \zeta(x_{i_0} - y_i)\wp(x_{i_0} - y_i) \\
- \sum_{j\neq i,i_0} \Big(\zeta(x_{i_0} - x_j) - \zeta(x_{i_0} - y_i) + \zeta(x_j - y_i)\Big)\wp(x_{i_0} - x_j) \\
+ \sum_{j\neq i}\Big(\zeta(x_{i_0} - y_j) - \zeta(x_{i_0} - y_i) + \zeta(y_j - y_i)\Big)\wp(x_{i_0} - y_j) \\
+\Big(\sum_{k\neq i,i_0} \zeta(x_{i_0} - x_k) - \sum_{k\neq i}\zeta(x_{i_0} - y_k) + \sum_{k\neq i}\zeta(y_i - y_k) - \sum_{k\neq i,i_0} \zeta(y_i - x_k)\Big)\wp(x_{i_0} - y_i).
\end{aligned}$$

Во второй и третьей строках используем тождество

$$\zeta(x) - \zeta(y) - \zeta(x-y) = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(x) + \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)},$$

чтобы преобразовать сумму выражений в этих строках к виду

$$\begin{aligned}
\sum_{j\neq i,i_0} \Bigg(\frac{1}{2}\,\wp'(x_{i_0} - x_j) - \frac{1}{2}\,\wp'(x_{i_0} - y_j) \\
+\Big(\zeta(x_{i_0} - y_j) + \zeta(y_j - y_i) - \zeta(x_{i_0} - x_j) - \zeta(x_j - y_i)\Big)\wp(x_{i_0} - y_i)\Bigg) \\
+\Big(\zeta(x_{i_0} - y_{i_0}) - \zeta(x_{i_0} - y_i) + \zeta(y_{i_0} - y_i)\Big)\wp(x_{i_0} - y_{i_0}).
\end{aligned}$$

Подставив это обратно в выражение для $G^{(i_0)}_{N-1}$, получим после сокращений:

$$\begin{aligned}
G^{(i_0)}_{N-1} = \frac{1}{2}\,\wp'(x_{i_0} - y_i) + \frac{1}{2}\,\wp'(x_{i_0} - y_{i_0}) \\
+\Big(\zeta(x_{i_0} - y_{i_0}) - \zeta(x_{i_0} - y_i) + \zeta(y_{i_0} - y_i)\Big)\Big(\wp(x_{i_0} - y_{i_0}) - \wp(x_{i_0} - y_i)\Big).
\end{aligned}$$

Опять воспользовавшись тождеством, связывающим ζ- и $\wp$-функции, видим, что $G^{(i_0)}_{N-1} = 0$.

Окончание доказательства проводится по индукции: предположим, что $F^{(i)}_{N-1} = 0$ (как мы видели, это так для $N = 3$), тогда $F^{(i)}_N = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, $F^{(i)}_N = 0$.

Преобразование Бэклунда как динамика в дискретном времени. Преобразование Бэклунда $x_i \to y_i$ можно рассматривать как сдвиг на один шаг в дискретном времени $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $x_i = x_i^n$, $y_i = x_i^{n+1}$, тогда уравнения, задающие преобразование Бэклунда, примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i^n = 2\sum\limits_{j\neq i} \zeta(x_i^n - x_j^n) - 2\sum\limits_{j} \zeta(x_i^n - x_j^{n+1}), \\ \\ \dot{x}_i^{n+1} = -2\sum\limits_{j\neq i} \zeta(x_i^{n+1} - x_j^{n+1}) + 2\sum\limits_{j} \zeta(x_i^{n+1} - x_j^{n}). \end{array} \right.$$

Сдвинув $n \to n-1$ во втором уравнении и вычтя эти уравнения друг из друга, получим уравнения движения системы КМ в дискретном времени, связывающие x_i^n, x_i^{n+1} и x_i^{n-1}:

$$\sum_j \zeta(x_i^n - x_j^{n+1}) + \sum_j \zeta(x_i^n - x_j^{n-1}) - 2\sum_{j\neq i} \zeta(x_i^n - x_j^n) = 0. \tag{0.1}$$

Замечательным образом эти уравнения совпадают с уравнениями вложенного анзаца Бете для эллиптической квантовой модели Годена, ассоциированной с системой корней A_m, причем в этом случае дискретное время n принимает значения $0, 1, \ldots, m+1$. Вызвано ли это совпадение глубокими причинами или просто случайно, неизвестно.

Гамильтонов подход к дискретизации интегрируемых систем частиц обсуждается в книге [15].

Непрерывный предел. Полученные уравнения движения допускают разные пределы непрерывного времени. Как легко убедиться, наивный непрерывный предел дает тривиальные уравнения движения $\ddot{x}_i = 0$. Чтобы получить что-то менее тривиальное, нужно брать предел более изощренным способом. А именно, положим $t = n\delta$, $x_i^n \to x_i(t) + \varepsilon n$, так что

$$x_i^{n\pm 1} \to x_i \pm \varepsilon \pm \delta\dot{x}_i + \tfrac{1}{2}\delta^2\ddot{x}_i + \ldots$$

при $\varepsilon, \delta \to 0$, причем $\delta = O(\varepsilon^2)$. Отделяя члены в суммах, входящих в уравнения движения, с $j = i$ от членов с $j \neq i$ и разлагая их по отдельности, получим в первом неисчезающем порядке:

$$\frac{1}{\varepsilon + \delta\dot{x}_i - \frac{1}{2}\delta^2\ddot{x}_i} - \frac{1}{\varepsilon + \delta\dot{x}_i + \frac{1}{2}\delta^2\ddot{x}_i} - \varepsilon^2 \sum_{j\neq i} \wp'(x_i - x_j) = 0,$$

или, после сокращения сингулярных членов,

$$\ddot{x}_i = 4g^2 \sum_{j\neq i} \wp'(x_i - x_j), \qquad g = \frac{\varepsilon^2}{2\delta}.$$

Это уравнения движения эллиптической системы КМ в непрерывном времени.

Система РШ в дискретном времени

Идея нахождения дискретной временной динамики для системы РШ – та же, что и в случае системы КМ, только вместо линейной задачи для уравнения КП нужно использовать линейную задачу для двумеризованной цепочки Тоды.

Преобразование Бэклунда. Обратимся к первой линейной задаче для двумеризованной цепочки Тоды

$$\partial_t \psi(x) = \psi(x+\eta) + \partial_t \log \frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}\, \psi(x),$$

где $t = t_1$. Представим волновую функцию в виде $\psi = \tilde{\tau}/\tau$ и подставим в линейное уравнение, тогда оно примет вид

$$\partial_t \log \frac{\tilde{\tau}(x)}{\tau(x+\eta)} = \frac{\tilde{\tau}(x+\eta)\tau(x)}{\tau(x+\eta)\tilde{\tau}(x)}.$$

Для эллиптических решений

$$\tau = e^{Q(x,t)} \prod_i \sigma(x - x_i(t)),$$

где $Q(x,t)$ – некоторая квадратичная форма по x, t, явный вид которой нам не важен. Поскольку ψ должна быть двоякоблоховской функцией, общий вид функции $\tilde{\tau}$ следующий:

$$\tilde{\tau} = A e^{Q(x,t) + \alpha x + \beta t} \prod_i \sigma(x - y_i(t)),$$

с некоторыми константами A, α, β, так что

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tau} = A e^{\alpha x + \beta t} \prod_i \frac{\sigma(x - y_i)}{\sigma(x - x_i)}.$$

Подставив это в уравнение, имеем:

$$\sum_i \Big(\dot{x}_i \zeta(x - x_i + \eta) - \dot{y}_i \zeta(x - y_i) \Big) = e^{\alpha\eta} \prod_i \frac{\sigma(x - x_i)\sigma(x - y_i + \eta)}{\sigma(x - y_i)\sigma(x - x_i + \eta)} + \mathrm{const}.$$

Приравнивая вычеты в полюсах при $x = x_i - \eta$ и $x = y_i$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = C \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{\sigma(x_i - x_k - \eta)}{\sigma(x_i - x_k)} \prod_j \frac{\sigma(x_i - y_j)}{\sigma(x_i - y_j - \eta)}, \\[2ex] \dot{y}_i = C \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{\sigma(y_i - y_k + \eta)}{\sigma(y_i - y_k)} \prod_j \frac{\sigma(y_i - x_j)}{\sigma(y_i - x_j + \eta)} \end{cases}$$

с некоторой константой C, которая без потери общности может быть положена равной 1, чего всегда можно добиться растяжением времени. Эти уравнения симметричны относительно одновременной замены $x_i \leftrightarrow y_i$ и $\eta \to -\eta$. Как и ранее, в тригонометрическом и рациональном случаях число переменных y_i не обязано равняться числу переменных x_i, т.к. часть нулей волновой функции может уходить на бесконечность.

Из полученных уравнений следует, что как x_i, так и y_i удовлетворяют уравнениям движения системы РШ, т.е. преобразование $x_i \to y_i$ действительно является преобразованием Бэклунда. Для доказательства этого факта нам потребуется некоторая техника. Введем функцию

$$\phi(x, y) = \frac{\sigma(x + y)}{\sigma(x)\sigma(y)},$$

которая лишь экспоненциальным множителем отличается от функции Ламэ-Эрмита, введенной ранее. После подходящего растяжения времени полученная выше система уравнений запишется в терминах этой функции виде

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \prod_{k\neq i} \phi(x_i - x_k, -\eta) \prod_j \phi(x_i - y_j - \eta, \eta), \\ \\ \dot{y}_i = -\prod_{k\neq i} \phi(y_i - y_k, \eta) \prod_j \phi(y_i - x_j + \eta, -\eta), \end{cases}$$

а уравнения движения системы РШ – в виде

$$\frac{\ddot{x}_i}{\dot{x}_i} = \sum_{k\neq i} \dot{x}_k \left(\frac{\phi'(x_k - x_i, -\eta)}{\phi(x_k - x_i, -\eta)} - \frac{\phi'(x_i - x_k, -\eta)}{\phi(x_i - x_k, -\eta)} \right),$$

где $\phi'(x,y) = \partial_x \phi(x,y)$. Отметим, что растяжение времени не влияет на эти уравнения движения, поскольку они однородны по времени. Дифференцируя по времени первое уравнение системы, имеем:

$$\frac{\ddot{x}_i}{\dot{x}_i} = \sum_{k\neq i} (\dot{x}_i - \dot{x}_k) \frac{\phi'(x_i - x_k, -\eta)}{\phi(x_i - x_k, -\eta)} + \sum_k (\dot{x}_i - \dot{y}_k) \frac{\phi'(x_i - y_k - \eta, \eta)}{\phi(x_i - y_k - \eta, \eta)}$$

$$= \sum_{k\neq i} \dot{x}_k \left(\frac{\phi'(x_k - x_i, -\eta)}{\phi(x_k - x_i, -\eta)} - \frac{\phi'(x_i - x_k, -\eta)}{\phi(x_i - x_k, -\eta)} \right)$$

$$- \sum_{k\neq i} \dot{x}_k \frac{\phi'(x_k - x_i, -\eta)}{\phi(x_k - x_i, -\eta)} + \sum_{k\neq i} \dot{x}_i \frac{\phi'(x_i - x_k, -\eta)}{\phi(x_i - x_k, -\eta)} + \sum_k (\dot{x}_i - \dot{y}_k) \frac{\phi'(x_i - y_k - \eta, \eta)}{\phi(x_i - y_k - \eta, \eta)}.$$

Сравнив это с уравнениями движения системы РШ, видим, что нам нужно показать, что сумма слагаемых в третьей строчке равна нулю. Это следует из тождества

$$\sum_i \dot{x}_i = \sum_i \dot{y}_i$$

или

$$\sum_i \left(\prod_{k\neq i} \phi(x_i - x_k, -\eta) \prod_j \phi(x_i - y_j - \eta, \eta) + \prod_{k\neq i} \phi(y_i - y_k, \eta) \prod_j \phi(y_i - x_j + \eta, -\eta) \right) = 0,$$

которое доказано ниже. Действительно, взяв производную этого тождества по x_i и воспользовавшись уравнениями системы, как раз получим, что сумма слагаемых в третьей строчке равна нулю. Наше тождество – частный случай более общего тождества

$$\prod_{i=1}^n \phi(w_i, z_i) = \sum_{i=1}^n \phi\Big(w_i, \sum_{k=1}^n z_k\Big) \prod_{j\neq i}^n \phi(w_j - w_i, z_j),$$

которое мы докажем ниже. Оно получается из него, если взять $n = 2N - 1$. Удобно считать, что сумма при этом идет по $i = 2, \ldots, 2N$. Выберем переменные следующим образом:

$$z_2 = \ldots = z_N = -\eta, \quad z_{N+1} = \ldots = z_{2N} = \eta, \text{ так что } \sum_{k=2}^{2N} z_k = \eta,$$

$$w_2 = x_1 - x_2, \dots, w_N = x_1 - x_N, \quad w_{N+1} = x_1 - y_1 - \eta, \dots, w_{2N} = x_1 - y_N - \eta.$$

Тогда тождество дает $\sum\limits_{i=1}^{N} \dot{x}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \dot{y}_i$ в форме $\dot{x}_1 = -\sum\limits_{i=2}^{N} \dot{x}_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \dot{y}_i$.

То, что y_i удовлетворяют тем же уравнениям движения системы РШ, следует из симметрии $x_i \leftrightarrow y_i$.

Доказательство тождества. Мы начнем с простейшего случая $n = 2$.

Задача. Докажите тождество

$$\phi(w_1, z_1)\phi(w_2, z_2) = \phi(w_1, z_1 + z_2)\phi(w_2 - w_1, z_2) + \phi(w_2, z_1 + z_2)\phi(w_1 - w_2, z_1).$$

В общем случае доказательство проводится по индукции. Предположим, что тождество справедливо при некотором n и докажем, что из этого следует его справедливость при $n \to n + 1$:

$$\prod_{i=1}^{n+1} \phi(w_i, z_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \phi\Big(w_i, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n+1} \phi(w_j - w_i, z_j).$$

Пользуясь предположением индукции, преобразуем левую часть:

$$\prod_{i=1}^{n+1} \phi(w_i, z_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(w_{n+1}, z_{n+1})\phi\Big(w_i, \sum_{k=1}^{n} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n} \phi(w_j - w_i, z_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(w_{n+1} - w_i, z_{n+1})\phi\Big(w_i, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n} \phi(w_j - w_i, z_j)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \phi\Big(w_i - w_{n+1}, \sum_{k=1}^{n} z_k\Big)\phi\Big(w_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n} \phi(w_j - w_i, z_j),$$

где мы применили тождество, доказанное в задаче. Рассмотрим теперь правую часть тождества и выпишем отдельно первые n членов суммы:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \phi\Big(w_i, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n+1} \phi(w_j - w_i, z_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi\Big(w_i, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n+1} \phi(w_j - w_i, z_j) + \phi\Big(w_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j=1}^{n} \phi(w_j - w_{n+1}, z_j).$$

Сравнивая с преобразованной левой частью, видим, что первые члены в этих выражениях одинаковы. Тем самым мы должны доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \phi\Big(w_i - w_{n+1}, \sum_{k=1}^{n} z_k\Big)\phi\Big(w_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j \neq i}^{n} \phi(w_j - w_i, z_j)$$

$$= \phi\Big(w_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} z_k\Big) \prod_{j=1}^{n} \phi(w_j - w_{n+1}, z_j).$$

После сокращения общего множителя $\phi\Big(w_{n+1}, \sum\limits_{k=1}^{n+1} z_k\Big)$ видим, что это равенство следует из предположения индукции при $w_i \to w_i - w_{n+1}$.

Преобразование Бэклунда как динамика в дискретном времени. Как и в случае системы КМ, преобразование Бэклунда $x_i \to y_i$ можно рассматривать как сдвиг на один шаг в дискретном времени $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $x_i = x_i^n$, $y_i = x_i^{n+1}$, тогда уравнения, задающие преобразование Бэклунда, примут вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i^n = \prod_{k \neq i} \frac{\sigma(x_i^n - x_k^n - \eta)}{\sigma(x_i^n - x_k^n)} \prod_j \frac{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1})}{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1} - \eta)}, \\ \\ \dot{x}_i^{n+1} = \prod_{k \neq i} \frac{\sigma(x_i^{n+1} - x_k^{n+1} + \eta)}{\sigma(x_i^{n+1} - x_k^{n+1})} \prod_j \frac{\sigma(x_i^{n+1} - x_j^n)}{\sigma(x_i^{n+1} - x_j^n + \eta)}. \end{cases}$$

Сдвинув во втором уравнении $n \to n-1$, так чтобы левые части стали одинаковыми и приравнивая правые части, получим уравнения движения системы РШ в дискретном времени:

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{\sigma(x_i^n - x_k^{n-1})}{\sigma(x_i^n - x_k^{n-1} + \eta)} \frac{\sigma(x_i^n - x_k^n + \eta)}{\sigma(x_i^n - x_k^n - \eta)} \frac{\sigma(x_i^n - x_k^{n+1} - \eta)}{\sigma(x_i^n - x_k^{n+1})} = -1.$$

Как легко видеть, в пределе $\eta \to 0$ они переходят в уравнения движения системы КМ в дискретном времени.

Замечательным образом полученные уравнения совпадают с уравнениями вложенного анзаца Бете для обобщенной спиновой цепочки с эллиптической R-матрицей, ассоциированной с системой корней A_m, причем в этом случае дискретное время n принимает значения $0, 1, \ldots, m+1$, а x_i^n – корни Бете на n-м уровне анзаца Бете.

Задача. Выполните предельный переход к непрерывному времени в этих уравнениях и покажите, что в этом пределе они превращаются в уравнения движения системы РШ.

Дискретное представление Лакса. Уравнения движения системы РШ в дискретном времени имеют представление типа Лакса, которое является дискретной по времени версией представления Лакса и имеет тот же смысл: матрица Лакса при эволюции во времени подвергается изоспектральному преобразованию. Существование представления типа Лакса доказывает интегрируемость дискретной во времени системы РШ (а с ней и системы КМ как предельного случая). Дискретное представление Лакса можно получить, рассмотрев эллиптические решения дискретного во времени уравнения цепочки Тоды.

Введем тау-функцию двумеризованной цепочки Тоды в дискретном времени n по правилу

$$\tau^n(x) = \tau(x, \mathbf{t} - n[\lambda^{-1}], \bar{\mathbf{t}}),$$

где параметр λ^{-1} играет роль постоянной решетки. Значения непрерывных времен $\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}$ предполагаются фиксированными. В случае двух дискретных времен n, m положим

$$\tau^{n,m}(x) = \tau(x, \mathbf{t} - n[\lambda^{-1}] - m[\mu^{-1}], \bar{\mathbf{t}}).$$

Тогда билинейное функциональное уравнение на тау-функцию из раздела 7.1

$$\lambda\tau(x+\eta, \mathbf{t})\tau(x, \mathbf{t} + [\lambda^{-1}] - [\mu^{-1}]) - \mu\tau(x+\eta, \mathbf{t} + [\lambda^{-1}] - [\mu^{-1}])\tau(x, \mathbf{t})$$

$$= (\lambda - \mu)\tau(x+\eta, \mathbf{t} + [\lambda^{-1}])\tau(x, \mathbf{t} - [\mu^{-1}]),$$

где мы для краткости опустили времена $\bar{\mathbf{t}}$, запишется как уравнение в дискретных временах:

$$\lambda \tau^{n+1,m}(x+\eta)\tau^{n,m+1}(x) - \mu\tau^{n,m+1}(x+\eta)\tau^{n+1,m}(x) = (\lambda-\mu)\tau^{n,m}(x+\eta)\tau^{n+1,m+1}(x).$$

Волновая функция, зависящая от спектрального параметра z, вводится по формуле

$$\psi^n(x) = z^{x/\eta}\Big(1 - \frac{z}{\lambda}\Big)^n e^{\xi(\mathbf{t},z)} \frac{\tau(x, \mathbf{t} - n[\lambda^{-1}] - [z^{-1}])}{\tau(x, \mathbf{t})}.$$

Нетрудно убедиться, что билинейное функциональное соотношение на тау-функцию эквивалентно следующему линейному уравнению для волновой функции:

$$\psi^{n+1}(x) = -\lambda^{-1}\psi^n(x+\eta) + V^n(x)\psi^n(x), \qquad V^n(x) = \frac{\tau^n(x)\tau^{n+1}(x+\eta)}{\tau^{n+1}(x)\tau^n(x+\eta)}.$$

Для эллиптических по x решений

$$\tau^n(x) = \prod_{j=1}^{N} \sigma(x - x_j^n),$$

и

$$V^n(x) = \prod_j \frac{\sigma(x-x_j^n)\sigma(x - x_j^{n+1}+\eta)}{\sigma(x-x_j^{n+1})\sigma(x-x_j^n+\eta)}$$

является эллиптической функцией от x. Решения для $\psi^n(x)$ нужно искать среди двоякоблоховских функций, которые мы как обычно представим в виде

$$\psi^n(x) = z^{x/\eta}\sum_i c_i^n \Phi(x - x_i^n, u),$$

где второй спектральный параметр мы обозначили через u. После подстановки в линейное уравнение, имеем:

$$\sum_i c_i^{n+1}\Phi(x - x_i^{n+1}, u) + z\lambda^{-1}\sum_i c_i^n \Phi(x - x_i^n + \eta, u)$$

$$-\prod_k \frac{\sigma(x-x_i^n)\sigma(x-x_i^{n+1}+\eta)}{\sigma(x-x_i^{n+1})\sigma(x-x_i^n+\eta)}\sum_i c_i^n\Phi(x-x_i^n, u) = 0.$$

Левая часть может иметь простые полюса при $x = x_i^n - \eta$ и $x = x_i^{n+1}$. Условие сокращения полюсов приводит к переопределенной системе линейных уравнений на компоненты вектора $\mathbf{c}^n = (c_1^n, \ldots, c_N^n)^{\mathrm{T}}$:

$$\left\{\begin{array}{l} L^n\mathbf{c}^n = z\lambda^{-1}\mathbf{c}^n, \\ \\ \mathbf{c}^{n+1} = M^n\mathbf{c}^n. \end{array}\right.$$

Матрицы L^n, M^n имеют матричные элементы

$$L_{ij}^n = f_i^n\Phi(x_i^n - x_j^n - \eta, u),$$

$$M_{ij}^n = g_i^n\Phi(x_i^{n+1} - x_j^n, u),$$

где

$$f_i^n = \frac{\prod\limits_j \sigma(x_i^n - x_j^n - \eta)\sigma(x_i^n - x_j^{n+1})}{\prod\limits_j \sigma(x_i^n - x_j^{n+1} - \eta) \prod\limits_{l \neq i} \sigma(x_i^n - x_l^n)},$$

$$g_i^n = \frac{\prod\limits_j \sigma(x_i^{n+1} - x_j^n)\sigma(x_i^{n+1} - x_j^{n+1} + \eta)}{\prod\limits_j \sigma(x_i^{n+1} - x_j^n + \eta) \prod\limits_{l \neq i} \sigma(x_i^{n+1} - x_l^{n+1})}.$$

Условие совместности переопределенной линейной системы имеет вид

$$L^{n+1}M^n = M^n L^n.$$

Это и есть дискретное уравнение Лакса, означающее, что при сдвиге на шаг дискретного времени матрица Лакса подвергается преобразованию подобия, и ее спектр сохраняется.

Покажем, что дискретное уравнение Лакса эквивалентно уравнениям движения системы РШ в дискретном времени, полученным выше. Прежде всего заметим, что

$$\sum_i f_i^n + \sum_i g_i^n = 0,$$

поскольку в левой части стоит сумма вычетов эллиптической функции $V^n(x)$. Обозначим $R^n = L^{n+1}M^n - M^n L^n$, тогда

$$\begin{aligned} R_{ij}^n \quad &= \quad f_i^{n+1} \sum_k g_k^n \Phi(x_i^{n+1} - x_k^{n+1} - \eta, u)\Phi(x_k^{n+1} - x_j^{n+1}, u) \\ &- g_i^n \sum_k f_k^n \Phi(x_i^{n+1} - x_k^n, u)\Phi(x_k^n - x_j^n - \eta, u). \end{aligned}$$

Равенство $R_{ij}^n = 0$ (уравнение Лакса) в пределе $u \to 0$ влечет за собой равенство

$$f_i^{n+1} \sum_k g_k^n - g_i^n \sum_k f_k^n = 0,$$

или, вспоминая, что $\sum\limits_k f_k^n + \sum\limits_k g_k^n = 0$,

$$f_i^{n+1} = -g_i^n.$$

Это и есть уравнения движения

$$\prod_{k=1}^N \frac{\sigma(x_i^n - x_k^{n-1})}{\sigma(x_i^n - x_k^{n-1} + \eta)} \frac{\sigma(x_i^n - x_k^n + \eta)}{\sigma(x_i^n - x_k^n - \eta)} \frac{\sigma(x_i^n - x_k^{n+1} - \eta)}{\sigma(x_i^n - x_k^{n+1})} = -1.$$

системы РШ в дискретном времени, полученные ранее.

Задача. Покажите, что эти уравнения эквивалентны равенству $R_{ij}^n = 0$ для всех u.

Деформированная система РШ в дискретном времени

Преобразование Бэклунда. Применим теперь тот же метод к случаю решетки Тоды со связью типа B. Первая линейная задача для решетки Тоды со связью типа B имеет вид

$$\partial_t \psi(x) = v(x)\Big(\psi(x+\eta) - \psi(x-\eta)\Big),$$

где $v(x)$ выражается через тау-функцию $\tau(x)$:

$$v(x) = \frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}.$$

Для эллиптических решений тау-функция имеет вид

$$\tau(x) = C\prod_{i=1}^{N}\sigma(x-x_i),$$

где предполагается, что ее нули x_j все различны, так что $v(x)$ – эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Следовательно, решения можно искать среди двоякоблоховских функций. Полюса функции ψ – нули тау-функции, так что мы можем представить решения в виде

$$\psi(x) = \mu^{x/\eta} e^{(\mu-\mu^{-1})t}\,\frac{\hat\tau(x)}{\tau(x)},$$

где

$$\hat\tau(x) = \prod_{i=1}^{N}\sigma(x-y_i)$$

с некоторыми y_i. Тогда ψ-функция действительно является двоякоблоховской с блоховскими множителями

$$B_1 = \mu^{2\omega_1/\eta}\exp\Big(2\zeta(\omega_1)\sum_{j=1}^{N}(x_j-y_j)\Big), \quad B_2 = \mu^{2\omega_2/\eta}\exp\Big(2\zeta(\omega_2)\sum_{j=1}^{N}(x_j-y_j)\Big).$$

Можно показать, что

$$\sum_{j=1}^{N}(\dot x_j - \dot y_j) = 0,$$

так что блоховские множители не зависят от времени. В главе 8 было доказано, что полюса волновой функции удовлетворяют уравнениям движения деформированной системы РШ для любого μ.

Подставляя волновую функцию в линейное уравнение, имеем:

$$\frac{\partial_t\hat\tau(x)}{\hat\tau(x)} - \frac{\partial_t\tau(x)}{\tau(x)} + \mu - \mu^{-1} = \mu\frac{\hat\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\hat\tau(x)\,\tau(x)} - \mu^{-1}\frac{\tau(x+\eta)\hat\tau(x-\eta)}{\tau(x)\,\hat\tau(x)}.$$

Это уравнение инвариантно относительно одновременной замены $\tau \leftrightarrow \hat\tau$, $\mu \leftrightarrow \mu^{-1}$, так что y_j удовлетворяют тем же уравнениям движения, что и x_j. Обе части уравнения имеют простые полюса в точках $x = x_j$ и $x = y_j$. Приравнивая вычеты, приходим к уравнениям, связывающим нули y_i и полюса x_i волновой функции:

$$\dot{x}_i = \mu\sigma(-\eta)\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j-\eta)}{\sigma(x_i-x_j)}\prod_k\frac{\sigma(x_i-y_k+\eta)}{\sigma(x_i-y_k)}$$

$$+\,\mu^{-1}\sigma(-\eta)\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_j+\eta)}{\sigma(x_i-x_j)}\prod_k\frac{\sigma(x_i-y_k-\eta)}{\sigma(x_i-y_k)},$$

$$\dot{y}_i = \mu\sigma(-\eta)\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(y_i-y_j+\eta)}{\sigma(y_i-y_j)}\prod_k\frac{\sigma(y_i-x_k-\eta)}{\sigma(y_i-x_k)}$$

$$+\,\mu^{-1}\sigma(-\eta)\prod_{j\neq i}\frac{\sigma(y_i-y_j-\eta)}{\sigma(y_i-y_j)}\prod_k\frac{\sigma(y_i-x_k+\eta)}{\sigma(y_i-x_k)}.$$

Они симметричны относительно замены $x_j \leftrightarrow y_j$, $\mu \leftrightarrow \mu^{-1}$. Переход $x_j \to y_j$ можно рассматривать как преобразование Бэклунда деформированной системы РШ.

Нужно отметить, что уравнения движения для x_j и y_j в принципе можно вывести из полученных уравнений. Для этого от этих уравнений нужно взять производную по времени и воспользоваться ими еще раз, подставив выражения для $\dot{x}_j$, $\dot{y}_j$ через x_j, y_j. Тем самым они окажутся эквивалентными некоторому нетривиальному тождеству для эллиптических функций многих переменных, которое слишком сложно для того, чтобы доказывать его "в лоб". Однако, нам нет нужды в таком доказательстве, поскольку уравнения движения для x_j следуют из результатов главы 8, а уравнения для y_j – из симметрии $x_j \leftrightarrow y_j$. Отметим, что преобразование Бэклунда для системы РШ отличается от такового для деформированной системы РШ отсутствием вторых членов в правых частях. В этом смысле оно содержится в последнем как формальный предельный случай $\mu \to \infty$ (или $\mu \to 0$).

Динамика в дискретном времени. Обозначив переменную дискретного времени через $n \in \mathbb{Z}$, положим $x_i = x_i^n$, $y_i = x_i^{n+1}$. Сдвинув $n \to n-1$ во втором уравнении системы, чтобы левые части этих уравнений стали одинаковыми, приходим к выводу, что и правые части должны быть равны, что дает уравнения

$$\mu\prod_{k=1}^N \sigma(x_i^n - x_k^{n+1})\sigma(x_i^n - x_k^n + \eta)\sigma(x_i^n - x_k^{n-1} - \eta)$$

$$+\ \mu\prod_{k=1}^N \sigma(x_i^n - x_k^{n+1} + \eta)\sigma(x_i^n - x_k^n - \eta)\sigma(x_i^n - x_k^{n-1})$$

$$=\ \mu^{-1}\prod_{k=1}^N \sigma(x_i^n - x_k^{n+1} - \eta)\sigma(x_i^n - x_k^n + \eta)\sigma(x_i^n - x_k^{n-1})$$

$$+\ \mu^{-1}\prod_{k=1}^N \sigma(x_i^n - x_k^{n+1})\sigma(x_i^n - x_k^n - \eta)\sigma(x_i^n - x_k^{n-1} + \eta),$$

или

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1})\sigma(x_i^n - x_j^n + \eta)\sigma(x_i^n - x_j^{n-1} - \eta)}{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1} + \eta)\sigma(x_i^n - x_j^n - \eta)\sigma(x_i^n - x_j^{n-1})}$$

$$= -1 + \mu^{-2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1})\sigma(x_i^n - x_j^{n-1} + \eta)}{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1} + \eta)\sigma(x_i^n - x_j^{n-1})} + \mu^{-2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1} - \eta)\sigma(x_i^n - x_j^n + \eta)}{\sigma(x_i^n - x_j^{n+1} + \eta)\sigma(x_i^n - x_j^n - \eta)}.$$

Непрерывный предел. Полученные уравнения допускают различные непрерывные пределы. В одном из них введем сначала переменные

$$X_j^n = x_j^n - n\eta$$

и предположим, что они ведут себя гладко при изменении времени, т.е. $X_j^{n+1} = X_j^n + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, где мы ввели постоянную решетки ε на оси времени, так что непрерывной временной переменной будет $t = n\varepsilon$. В терминах переменных X_j^n уравнения принимают вид

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(X_i^n - X_j^{n+1} - \eta)\sigma(X_i^n - X_j^n + \eta)\sigma(X_i^n - X_j^{n-1})}{\sigma(X_i^n - X_j^{n+1})\sigma(X_i^n - X_j^n - \eta)\sigma(X_i^n - X_j^{n-1} + \eta)}$$

$$= -1 + \mu^{-2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(X_i^n - X_j^{n+1} - \eta)\sigma(X_i^n - X_j^{n-1} + 2\eta)}{\sigma(X_i^n - X_j^{n+1})\sigma(X_i^n - X_j^{n-1} + \eta)}$$

$$+ \mu^{-2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma(X_i^n - X_j^{n+1} - 2\eta)\sigma(X_i^n - X_j^n + \eta)}{\sigma(X_i^n - X_j^{n+1})\sigma(X_i^n - X_j^n - \eta)}.$$

Мы должны разложить их по степеням ε, учитывая, что

$$X_j^{n\pm 1} = X_j \pm \varepsilon \dot{X}_j + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ddot{X}_j + O(\varepsilon^3)$$

при $\varepsilon \to 0$. Достаточно разложить до порядка ε. Для самосогласованности процедуры разложения нужно потребовать, чтобы μ^{-1} было порядка ε.

Задача. Покажите, что при $\mu^{-1} = \varepsilon$ в лидирующем порядке получаются уравнения движения деформированной системы РШ для X_j.

Другая возможность – предположить, что гладкими во времени являются исходные переменные, т.е.

$$x_j^{n\pm 1} = x_j \pm \varepsilon \dot{x}_j + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ddot{x}_j + O(\varepsilon^3).$$

Легко видеть, что в случае общего положения, если $\mu^{-2} - 1 = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, лидирующий порядок будет ε, и разложение дает уравнения системы РШ (недеформированной). Однако, если $\mu^{-2} - 1 = O(\varepsilon)$, скажем, $\mu^{-2} = 1 + \alpha\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, первый порядок дает тождество $0 = 0$, и нужно разлагать до второго порядка по ε.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem*, Commun. Pure Appl. Math. **30** (1977) 95–148.

[4] И.М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функ. Анализ и его Прил. **12:1** (1978) 76–78.

[5] И.М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функ. Анализ и его Прил. **14:4** (1980) 45–54.

[6] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва, 1987.

[8] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва, 1989.

[9] Т. Мива, М. Джимбо, Э. Дате, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры*, Издательство МЦНМО, Москва, 2005.

[10] J. Harnad and F. Balogh, *Tau functions and their applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2021.

[11] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981), Singapore: World Scientific, 1983, 39–119.

[12] M. Jimbo and T. Miwa, *Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 943–1001.

[13] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[14] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[15] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[16] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[17] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[18] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[19] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[20] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[21] I. Krichever, A. Zabrodin, *Monodromy free linear equations and many-body systems*, Letters in Mathematical Physics 113:75 (2023).

[22] А. Забродин, *Об интегрируемости деформированной системы Руйсенарса-Шнайдера*, УМН **78:2** (2023) 149–188.

[23] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5844–5849.

[24] A. Zabrodin, *KP hierarchy and trigonometric Calogero-Moser hierarchy*, J. Math. Phys. **61** (2020) 043502.

[25] V. Prokofev, A. Zabrodin, *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero-Moser model*, Journal of Physics A: Math. Theor., **54** (2021) 305202.

[26] J. Gibbons, T. Hermsen, *A generalization of the Calogero-Moser system*, Physica D **11** (1984) 337–348.

[27] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey and M. Talon, *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **170** (1995) 83–119.

[28] И. Кричевер, А. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН **50:6** (1995) 3–56.

[29] D. Rudneva, A. Zabrodin, *Dynamics of poles of elliptic solutions to BKP equation*, Journal of Physics A: Math. Theor. **53** (2020) 075202.

[30] A. Zabrodin, *How Calogero-Moser particles can stick together*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 225201.

[31] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984) 1–95.

[32] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Physica D **229** (2007), no. 2, 184–190.

[33] В. Прокофьев, А. Забродин, *Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса-Шнайдера*, ТМФ **208** (2021) 282—309.

[34] I. Krichever, A. Zabrodin, *Toda lattice with constraint of type B*, Physica D **453** (2023) 133827.

[35] I. Krichever, *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, In: Algebraic geometry and number theory. In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th birthday. Ed. by Ginzburg, Victor. Basel: Birkhäuser. Progress in Mathematics **253** (2006) 497–514.

[36] I. Krichever, *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer variety*, Annals of Mathematics **172** (2010) 485–516.

[37] S. Wojciechowski, *The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **15** (1982) L653-L657.

[38] F.W. Nihhoff, G.D. Pang, *A time-discretized version of the Calogero-Moser model*, Phys. Lett. A **191** (1994) 101-107.

[39] F.W. Nihhoff, O. Ragnisco, V. Kuznetsov, *Integrable time-discretization of the Ruijsenaars-Schneider model*, Commun. Math. Phys. **176** (1996) 681-700.