Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения

А.В. Забродин*

Система КМ с рациональным потенциалом

В 1971 году Ф.Калоджеро ввел в рассмотрение систему взаимодействующих квантовых частиц на прямой с парным потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния между частицами. Несколько позднее классическая версия этой системы была рассмотрена Мозером, в работе которого была вскрыта ее замечательная алгебраическая структура. Поэтому в настоящее время эта система носит название системы частиц Калоджеро-Мозера (КМ).

Гамильтониан и уравнения движения. Состояние системы характеризуется координатами и импульсами частиц x_i, p_i, $i = 1, \ldots, N$ с каноническими скобками Пуассона $\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$, $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Все частицы считаются одинаковыми, их массу примем равной $\frac{1}{2}$. Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 - g^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}.$$

Параметр g^2 – константа взаимодействия. Если g вещественно, частицы притягиваются друг к другу, если чисто мнимое – отталкиваются. Без потери общности можно положить $g = 1$, чего всегда можно добиться преобразованием координат $x_i \to g x_i$. Гамильтоновы уравнения движения получаются по стандартным правилам:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 2p_i,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -4g^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3},$$

где точка как обычно означает производную по времени. Отсюда находим ньютоновские уравнения движения:

$$\ddot{x}_i = -8g^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3}.$$

*e-mail: zabrodin@itep.ru

Из них сразу следует, что центр масс частиц $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_i x_i$ движется с постоянной скоростью.

Представление Лакса. Ключом к доказательству интегрируемости системы КМ является представление уравнений движения в виде условия коммутации некоторых матриц (представление Лакса), найденное Мозером в 1975 году. Рассмотрим $N \times N$ матрицы L, M с матричными элементами

$$L_{ij} = -\delta_{ij} p_i - \frac{g(1-\delta_{ij})}{x_i - x_j},$$

$$M_{ij} = -2g\delta_{ij} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_i - x_k)^2} + \frac{2g(1-\delta_{ij})}{(x_i - x_j)^2}.$$

Матрица L называется матрицей Лакса, а пара матриц L, M – парой Лакса. Сейчас мы покажем, что уравнения движения системы КМ эквивалентны матричному уравнению

$$\dot{L} + [L, M] = 0,$$

которое называется уравнением Лакса. Отметим, что матричное уравнение Лакса – сильно переопределенная система уравнений, поскольку оно содержит N^2 соотношений (по числу матричных элементов), а уравнения движения представляют собой только N соотношений (по числу координат). Как мы увидим ниже, наши матрицы L, M таковы, что внедиагональные элементы левой части уравнения Лакса зануляются тождественно, и остается как раз N соотношений, обеспечивающих зануление диагональных элементов, которые и представляют собой уравнения движения.

Отметим здесь, что представление Лакса не единственно. Как мы увидим дальше, существует целое однопараметрическое семейство пар Лакса, приводящих к тем же самым уравнениям движения.

Для удобства вычислений введем матрицы A, B с нулями на главной диагонали и матричными элементами

$$A_{ij} = \frac{1-\delta_{ij}}{x_i - x_j}, \quad B_{ij} = \frac{1-\delta_{ij}}{(x_i - x_j)^2},$$

а также диагональные матрицы X, D с диагональными элементами

$$X_{ii} = x_i, \qquad D_{ii} = \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_i - x_k)^2},$$

тогда

$$L = -\frac{1}{2}\dot{X} - gA, \quad M = 2gB - 2gD.$$

Очевидно, $\dot{A} = [B, \dot{X}]$. Вычисление левой части уравнения Лакса дает:

$$\dot{L} + [L, M] = -\frac{1}{2}\ddot{X} + 4g^2([A, D] - [A, B]).$$

Задача. Докажите тождество

$$[A, D] - [A, B] = D',$$

где D' – диагональная матрица с матричными элементами

$$D'_{ij} = -2\delta_{ij} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_i - x_k)^3}.$$

Поэтому уравнение Лакса сводится к равенству диагональных матриц

$$\ddot{X} = 4D',$$

которое, очевидно, и содержит в себе все N ньютоновских уравнений движения.

Интегралы движения. Из представления Лакса сразу следует существование бесконечного набора интегралов движения (N из которых будут независимыми). Рассмотрим, например, величины

$$H_k = \operatorname{tr} L^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

В силу представления Лакса и циклического свойства следа имеем:

$$\dot{H}_k = k\operatorname{tr}(\dot{L}L^{k-1}) = k\operatorname{tr}([M, L]L^{k-1}) = k\operatorname{tr}(MLL^{k-1} - LML^{k-1}) = 0.$$

Как легко видеть, представление Лакса означает, что в процессе временной эволюции матрица Лакса подвергается изоспектральной деформации: $L(t) = UL(0)U^{-1}$, где матрица U такова, что $M = \dot{U}U^{-1}$. Поэтому все собственные значения матрицы Лакса – интегралы движения. В качестве независимых интегралов движения обычно выбирают $H_k = \operatorname{tr} L^k$, $k = 1, \ldots, N$. Вот несколько первых:

$$H_1 = -\sum_i p_i,$$

$$H_2 = H = \sum_i p_i^2 - g^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2},$$

$$H_3 = -\sum_i p_i^3 + 3g^2 \sum_{i \neq j} \frac{p_i}{(x_i - x_j)^2},$$

$$H_4 = \sum_i p_i^4 - 2g^2 \sum_{i \neq j} \frac{p_i p_j + 2p_i^2}{(x_i - x_j)^2} - +g^4 \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^4} + 2g^4 \sum_{[ijk]} \frac{1}{(x_i - x_j)^2 (x_j - x_k)^2},$$

где в последней сумме суммирование проводится по различным индескам i, j, k. Как мы видим, $-H_1 = P$ – полный импульс системы, а $H_2 = H$ – гамильтониан. Остальные интегралы движения иногда называются высшими гамильтонианами. Подобно H_2, они задают потоки в фазовом пространстве. Временную переменную, соответствующую потоку с гамильтонианом H_k, обозначим через t_k. Например, поток с гамильтонианом H_3 задается уравнениями

$$\partial_{t_3} x_i = \frac{\partial H_3}{\partial p_i} = -3p_i^2 + 3g^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2},$$

$$\partial_{t_3} p_i = -\frac{\partial H_3}{\partial x_i} = 6g^2 \sum_{j \neq i} \frac{p_i + p_j}{(x_i - x_j)^3}.$$

Ниже мы убедимся, что интегралы движения H_k находятся в инволюции, так что все эти потоки совместны, высшие гамильтонианы – интегралы движения друг для друга, и система КМ является полностью интегрируемой гамильтоновой системой.

Инволютивность интегралов движения. Следуя методу, предложенному в [3], докажем, что все собственные значения матрицы Лакса (а значит и все высшие гамильтонианы H_k) находятся в инволюции.

Предположим, что матрица Лакса диагонализуема, что имеет место в случае общего положения. Пусть λ, μ – два ее различных собственных значения, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N)^{\mathrm{T}}$ – соответствующие правые собственные векторы (векторы-столбцы), а $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_N)$, $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_N)$ – левые собственные векторы (векторы-строки):

$$L\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}, \quad L\mathbf{b} = \mu \mathbf{b},$$

$$\tilde{\mathbf{c}} L = \lambda \tilde{\mathbf{c}}, \quad \tilde{\mathbf{b}} L = \mu \tilde{\mathbf{b}}.$$

Нормируем собственные векторы условиями

$$(\tilde{\mathbf{c}}, \mathbf{c}) = \sum_i \tilde{c}_i c_i = 1, \quad (\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{b}) = \sum_i \tilde{b}_i b_i = 1.$$

Дифференцируя уравнения на собственные значения по p_i, x_i, получим соотношения

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \Big(\tilde{\mathbf{c}}, \frac{\partial L}{\partial p_i}\, \mathbf{c}\Big), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \Big(\tilde{\mathbf{c}}, \frac{\partial L}{\partial x_i}\, \mathbf{c}\Big)$$

и аналогичные соотношения для производных от μ. Подставив сюда нашу матрицу L, выраженную через координаты и импульсы, найдем:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = -\tilde{c}_i c_i,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = g \sum_{k \neq i} \frac{\tilde{c}_i c_k - \tilde{c}_k c_i}{(x_i - x_k)^2}.$$

Теперь мы можем найти скобку Пуассона $\{\lambda, \mu\}$:

$$\{\lambda, \mu\} = \sum_i \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial p_i}\Big)$$

$$= g \sum_i \left[-\tilde{c}_i c_i \sum_{k \neq i} \frac{\tilde{b}_i b_k - \tilde{b}_k b_i}{(x_i - x_k)^2} + \tilde{b}_i b_i \sum_{k \neq i} \frac{\tilde{c}_i c_k - \tilde{c}_k c_i}{(x_i - x_k)^2} \right].$$

Умножая уравнение на собственные значения

$$\sum_k L_{ik} c_k = \lambda c_i$$

на b_i, уравнение

$$\sum_k L_{ik} b_k = \mu b_i$$

на c_i и вычитая их друг из друга, получим соотношение

$$c_i b_i = \frac{g}{\lambda - \mu} \sum_{k \neq i} \frac{b_k c_i - c_k b_i}{x_i - x_k},$$

и аналогично

$$\tilde{c}_i \tilde{b}_i = -\frac{g}{\lambda - \mu} \sum_{k \neq i} \frac{\tilde{b}_k \tilde{c}_i - \tilde{c}_k \tilde{b}_i}{x_i - x_k}.$$

Подставив это в вышеприведенную формулу для $\{\lambda, \mu\}$, будем иметь:

$$\{\lambda, \mu\} = \frac{g^2}{\lambda - \mu} \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \frac{b_j c_i - c_j b_i}{x_i - x_j} \sum_{l \neq i} \frac{\tilde{c}_i \tilde{b}_l - \tilde{b}_i \tilde{c}_l}{(x_i - x_l)^2} + \sum_{j \neq i} \frac{\tilde{b}_j \tilde{c}_i - \tilde{c}_j \tilde{b}_i}{x_i - x_j} \sum_{l \neq i} \frac{c_i b_l - b_i c_l}{(x_i - x_l)^2} \right]$$

$$= \frac{g^2}{\lambda - \mu} \sum_i \sum_{j,l \neq i} \left[\frac{1}{(x_i - x_j)(x_i - x_l)^2} + \frac{1}{(x_i - x_l)(x_i - x_j)^2} \right] (b_j c_i - c_j b_i)(\tilde{c}_i \tilde{b}_l - \tilde{b}_i \tilde{c}_l)$$

$$= \frac{g^2}{\lambda - \mu} \sum_i \sum_{j,l \neq i} \left[\frac{1}{(x_i - x_l)^2} - \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right] \frac{1}{x_l - x_j} (b_j c_i - c_j b_i)(\tilde{c}_i \tilde{b}_l - \tilde{b}_i \tilde{c}_l).$$

Перегруппировка членов и переобозначение индексов суммирования приводят к следующему выражению:

$$\{\lambda, \mu\} = \frac{g^2}{\lambda - \mu} \sum_i \sum_{l \neq i} \frac{\tilde{c}_i \tilde{b}_l - \tilde{b}_i \tilde{c}_l}{(x_i - x_l)^2} \sum_{j \neq i} \frac{b_j c_i - c_j b_i}{x_l - x_j} - \frac{g^2}{\lambda - \mu} \sum_{j \neq i} \frac{b_j c_i - c_j b_i}{(x_i - x_j)^2} \sum_{l \neq i} \frac{\tilde{c}_i \tilde{b}_l - \tilde{b}_i \tilde{c}_l}{x_l - x_j}.$$

Умножим уравнение на собственное значение

$$-p_i c_i - g \sum_{l \neq i} \frac{1}{x_i - x_l} c_l = \lambda c_i$$

на b_j, а уравнение

$$-p_i b_i - g \sum_{l \neq i} \frac{1}{x_i - x_l} b_l = \mu b_i$$

на c_j и вычтем их друг из друга. Мы получим:

$$g \sum_{l \neq i} \frac{c_l b_j - b_l c_j}{x_i - x_l} = \mu b_i c_j - \lambda c_i b_j + p_i (b_i c_j - c_i b_j).$$

Аналогичным образом получим соотношение

$$g \sum_{l \neq i} \frac{\tilde{c}_l \tilde{b}_j - \tilde{b}_l \tilde{c}_j}{x_l - x_i} = \mu \tilde{b}_i \tilde{c}_j - \lambda \tilde{c}_i \tilde{b}_j + p_i (\tilde{b}_i \tilde{c}_j - \tilde{c}_i \tilde{b}_j).$$

Подставив это в формулу для $\{\lambda,\mu\}$, найдем:

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{g\lambda}{\lambda-\mu}\sum_{j\neq i}\frac{\tilde{c}_i c_j b_i \tilde{b}_j - \tilde{c}_j c_i b_j \tilde{b}_i}{(x_i-x_j)^2} - \frac{g\mu}{\lambda-\mu}\sum_{j\neq i}\frac{c_i \tilde{c}_j \tilde{b}_i b_j - c_j \tilde{c}_i b_i \tilde{b}_j}{(x_i-x_j)^2}.$$

Очевидно, каждая из двух имеющихся здесь сумм равна нулю, т.к. под знаком суммы стоит выражение, антисимметричное по индексам i,j. Тем самым мы доказали, что скобки Пуассона между собственными значениями матрицы Лакса равны нулю, и, следовательно, интегралы движения H_k находятся в инволюции.

Линеаризация динамики КМ в пространстве матриц (метод проектирования). Динамика системы КМ может быть линеаризована в пространстве, большем чем N-мерное конфигурационное пространство системы, а именно в пространстве матриц размера N на N. Оказывается, что если матрица линейно зависит от времени, динамика ее собственных значений совпадает с динамикой частиц в системе КМ. Этот метод неявного решения уравнений движения называется еще методом проектирования, поскольку свободная динамика в пространстве матриц будучи спроектирована на меньшее пространство дает динамику нашей системы с нетривиальным взаимодействием. Простейший пример – проекция свободного движения вдоль прямой на плоскости, не проходящей через начало координат, на радиальное направление.

Более точно, мы покажем, что собственные значения матрицы $X_0 - 2tL_0$ (где $X_0 = \mathrm{diag}(x_1(0),\ldots,x_N(0))$, $L_0 = L(0)$ – матрица Лакса при $t=0$), которые мы обозначим $x_i = x_i(t)$, двигаются как частицы в системе КМ. При $t=0$ эти собственные значения совпадают с начальными координатами частиц $x_i(0)$.

Пусть $V = V(t)$ – матрица, диагонализующая матрицу $X_0 - 2tL_0$:

$$X_0 - 2tL_0 = VXV^{-1},$$

где $X = X(t) = \mathrm{diag}(x_1(t),\ldots,x_N(t))$. Очевидно, $V(0) = I$, где I – единичная матрица. Матрица V определена с точностью до умножения справа на диагональную матрицу. Мы зафиксируем эту свободу, наложив условие

$$V\mathbf{e} = \mathbf{e},$$

где $\mathbf{e}$ – вектор-столбец, у которого все компоненты равны 1: $\mathbf{e} = (1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$.

Покажем, что $L = V^{-1}L_0V$ – матрица Лакса в момент времени t. Для этого заметим, что матрица Лакса характеризуется коммутационным соотношением

$$[X,L] = g(I-E),$$

где $E = \mathbf{e}\,\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$ – матрица ранга 1, все матричные элементы которой равны 1. Проверим, что если это коммутационное соотношение выполняется при $t=0$, оно выполняется и при всех t. Действительно,

$$[X,L] = [V^{-1}X_0V - 2tV^{-1}L_0V,\, V^{-1}L_0V] = V^{-1}[X_0,L_0]V = g(I - V^{-1}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^{\mathrm{T}}V).$$

В силу нашего условия $V^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Заметим, что диагональные элементы матрицы в левой части равны нулю, поэтому $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}V = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}$, и правая часть равна $g(I-E)$.

Теперь продифференцируем равенство $X_0 - 2tL_0 = VXV^{-1}$ по времени. После простых преобразований получим

$$2L = -\dot{X} + [M, X],$$

где $M = -V^{-1}\dot{V}$. Простая проверка показывает, что это соотношение выполняется для $L = -\frac{1}{2}\dot{X} - gA$, $M = 2g(B - D)$. Производная по времени от соотношения $L = V^{-1}L_0V$ дает уравнение Лакса $\dot{L} + [L, M] = 0$, из которого следуют уравнения движения для $x_i(t)$.

Наша следующая цель – обобщить доказанное утверждение о линеаризации на потоки, отвечающие высшим гамильтонианам. Мы покажем, что собственные значения матрицы $X_0 - kt_kL_0^{k-1}$ двигаются во времени t_k как частицы КМ в потоке с гамильтонианом H_k.

Для этого прежде всего выведем гамильтоновы уравнения движения. Имеем:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial p_i}\,\mathrm{tr}L^k = k\,\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial L}{\partial p_i}L^{k-1}\Big) = -k(L^{k-1})_{ii},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{tr}L^k = -k\,\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial L}{\partial x_i}L^{k-1}\Big).$$

Задача. Докажите соотношение

$$2\frac{\partial L}{\partial x_i} = [E_i, M],$$

где E_i – матрица, у которой все матричные элементы равны нулю кроме элемента ii на диагонали.

Пользуясь результатом этой задачи, запишем уравнения движения в виде

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_k} = -k(L^{k-1})_{ii},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_k} = -\frac{k}{2}[M, L^{k-1}]_{ii}.$$

Из них непосредственно следует соотношение

$$\partial_{t_k}L_{ab} = \frac{k}{2}[M, L^{k-1}]_{aa}\delta_{ab} - kg(1-\delta_{ab})\frac{(L^{k-1})_{aa} - (L^{k-1})_{bb}}{(x_a - x_b)^2},$$

которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть V – матрица, диагонализующая матрицу $X_0 - kt_kL_0^{k-1}$:

$$X_0 - kt_kL_0^{k-1} = VXV^{-1},$$

где $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_N)$. Чтобы не загромождать обозначения, мы обозначили ее той же буквой V, что и при $k = 2$ (см. выше), но она вообще говоря зависит от k. Эта матрица определена с точностью до умножения справа на диагональную матрицу. Мы зафиксируем эту свободу, наложив условие нормировки $V\mathbf{e} = \mathbf{e}$, как и выше. Введем матрицы $L = V^{-1}L_0V$, $M_k = -V^{-1}\partial_{t_k}V$. Отметим, что из условия нормировки сразу следует, что $M_k\mathbf{e} = 0$. Как и выше, дифференцированием по t_k получаются соотношения

$$\partial_{t_k}L = [M_k, L],$$

$$\partial_{t_k}X = [M_k, X] - kL^{k-1}.$$

Первое из них – уравнение Лакса для высшего (k-го) потока. Второе позволяет найти матрицу M_k. Для внедиагональных элементов сразу получаем:

$$(M_k)_{ab} = -\frac{k(L^{k-1})_{ab}}{x_a - x_b}, \quad a \neq b.$$

Диагональные элементы находятся из условия $M_k\mathbf{e} = 0$, которое говорит, что

$$(M_k)_{aa} = -\sum_{j\neq a}(M_k)_{aj},$$

так что

$$(M_k)_{ab} = -k(1-\delta_{ab})\,\frac{(L^{k-1})_{ab}}{x_a - x_b} + k\delta_{ab}\sum_{j\neq a}\frac{(L^{k-1})_{aj}}{x_a - x_j}.$$

Наконец, покажем, что уравнение Лакса с этой матрицей M_k совпадает с уравнением для $\partial_{t_k}L_{ab}$, полученным выше с использованием уравнений движения для k-го гамильтонова потока. Пишем:

$$\partial_{t_k}L_{ab} = \sum_j (M_k)_{aj}L_{jb} - \sum_j L_{aj}(M_k)_{jb}$$

$$= \sum_{j\neq a}(M_k)_{aj}L_{jb} - \sum_{j\neq b}L_{aj}(M_k)_{jb} + L_{ab}((M_k)_{aa} - (M_k)_{bb}).$$

При $b = a$ получаем отсюда $\partial_{t_k}L_{aa} = \frac{1}{2}\,k[M, L^{k-1}]_{aa}$, как и должно быть в силу уравнений движения. Рассмотрим теперь более сложный случай $a \neq b$. Подставляя явный вид матриц L, M_k, получим:

$$\partial_{t_k}L_{ab} = kg\sum_{j\neq a,b}\frac{(L^{k-1})_{aj}}{(x_a - x_j)(x_j - x_b)} - kg\sum_{j\neq a,b}\frac{(L^{k-1})_{jb}}{(x_a - x_j)(x_j - x_b)}$$

$$-kg\sum_{j\neq a}\frac{(L^{k-1})_{aj}}{(x_a - x_b)(x_a - x_j)} + kg\sum_{j\neq b}\frac{(L^{k-1})_{bj}}{(x_a - x_b)(x_a - x_j)}$$

$$-\,k(L^{k-1})_{ab}\frac{p_a - p_b}{x_a - x_b}.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{(x_a - x_j)(x_j - x_b)} = \frac{1}{(x_a - x_b)(x_a - x_j)} + \frac{1}{(x_a - x_b)(x_j - x_b)},$$

чтобы преобразовать первые две суммы. После перегруппировки членов получим следующее выражение:

$$\partial_{t_k}L_{ab} = \frac{kg((L^{k-1})_{bb} - (L^{k-1})_{aa})}{(x_a - x_b)^2} + \frac{k}{x_a - x_b}\,Y,$$

где

$$Y = g\sum_{j\neq b}\frac{(L^{k-1})_{aj}-(L^{k-1})_{bj}}{x_j-x_b} - g\sum_{j\neq b}\frac{(L^{k-1})_{jb}}{x_j-x_b} + g\sum_{j\neq a}\frac{(L^{k-1})_{jb}}{x_j-x_a} - (p_a-p_b)(L^{k-1})_{ab}.$$

Задача. Докажите, что $Y = 0$.

Указание: выразите все через матричные элементы матрицы Лакса.

Оставшееся выражение

$$\partial_{t_k}L_{ab} = \frac{kg((L^{k-1})_{bb}-(L^{k-1})_{aa}}{(x_a-x_b)^2}$$

при $a \neq b$ – как раз то, которое мы получили раньше из уравнений движения. Итак, мы линеаризовали высшие гамильтоновы потоки системы КМ и получили представление Лакса для них.

Самодуальность. Рациональная система КМ обладает интересным свойством самодуальности. Преобразование дуальности переводит собственные значения матрицы Лакса (переменные типа действия) в координаты дуальной системы, поэтому это преобразование иногда называется дуальностью действие-координата.

Пусть U – матрица, диагонализующая матрицу Лакса, т.е.

$$L = U\tilde{L}U^{-1}, \quad \tilde{L} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N).$$

Она определена с точностью до умножения справа на диагональную матрицу. Мы зафиксируем эту свободу, наложив условие

$$U\mathbf{e} = \mathbf{e}.$$

Положим теперь

$$\tilde{X} = U^{-1}XU,$$

где теперь $\tilde{X}$ – уже не обязательно диагональная матрица. Нетрудно видеть, что соотношение

$$[X, L] = g(I - E)$$

переходит при этом в $[\tilde{X}, \tilde{L}] = g(I - E)$, из которого следует, что

$$\tilde{X}_{ij} = \xi_i\delta_{ij} + \frac{g(1-\delta_{ij})}{\lambda_i - \lambda_j}$$

с некоторыми ξ_i. Переменные (ξ_i, λ_i) называются дуальными переменными, а преобразование

$$(p_i, x_i) \to (\xi_i, \lambda_i)$$

преобразованием дуальности. Мы видим, что матрица $\tilde{X}$ в дуальных переменных имеет такой же вид, как матрица Лакса в исходных переменных. Про λ_i обычно говорят как про дуальные координаты, а про ξ_i – как про дуальные импульсы. Ниже мы покажем, что преобразование дуальности каноническое[1], так что гамильтонианы $\tilde{H}_k = \mathrm{tr}\tilde{X}^k$ задают динамику в дуальных переменных, которая в силу того, что $\tilde{X}$ имеет тот же вид, что и матрица Лакса в исходной системе, идентична (в дуальных переменных) динамике КМ. Это и означает самодуальность системы.

Приведем доказательство того, что преобразование дуальности каноническое. Симплектическая форма на фазовом пространстве системы КМ имеет вид

$$\Omega = \sum_i dp_i \wedge dx_i = \mathrm{tr}(dX \wedge dL).$$

Рассмотрим форму

$$\tilde{\Omega} = \sum_i d\xi_i \wedge d\lambda_i = \mathrm{tr}(d\tilde{X} \wedge d\tilde{L})$$

и докажем, что $\tilde{\Omega} = \Omega$, что и означает каноничность. Для доказательства нам будет нужна простая техническая лемма, которую мы сформулируем в виде задачи.

Задача. Пусть X, Y – квадратные матрицы одного и того же размера, а $\tilde{X} = UXU^{-1}$, $\tilde{Y} = UYU^{-1}$. Тогда

$$\mathrm{tr}(d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y}) = \mathrm{tr}(dX \wedge dY) - d\mathrm{tr}([X, Y]U^{-1}dU).$$

Это тождество доказывается прямым вычислением, которое мы не будем здесь приводить и оставляем читателю. В нашем случае $\tilde{X} = U^{-1}XU$, $\tilde{L} = U^{-1}LU$ (в условии задачи надо заменить $U \to U^{-1}$), и тождество дает

$$\tilde{\Omega} = \mathrm{tr}(d\tilde{X} \wedge d\tilde{L}) = \mathrm{tr}(dX \wedge dL) - d\mathrm{tr}([X, L]UdU^{-1})$$

$$= \Omega - g\, d\mathrm{tr}((I - E)UdU^{-1})$$

$$= \Omega - g\, d\mathrm{tr}(UdU^{-1}) + \Omega g\, d\mathrm{tr}(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}UdU^{-1}).$$

Второй и третий члены в правой части равны нулю. Действительно, второй член равен $g\mathrm{tr}(dUU^{-1} \wedge dUU^{-1}) = 0$, а третий равен нулю в силу условия $U\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Поэтому $\tilde{\Omega} = \Omega$, и преобразование каноническое.

[1]В литературе преобразование дуальности обычно считается антиканоническим, но наши дуальные импульсы взяты со знаком минус, так что у нас это преобразование будет каноническим.

Список литературы

[1] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419—436.

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[3] А.М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Москва, “Наука”, 1990.

[4] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.

[5] Yu. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG, 2003.

[6] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва, 1970.

[7] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

[8] T. Takebe, *Elliptic integrals and elliptic functions*, Springer, 2023.

[9] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.

[10] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.