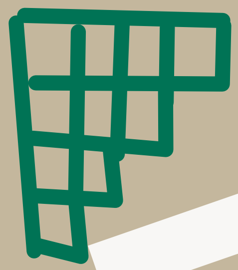
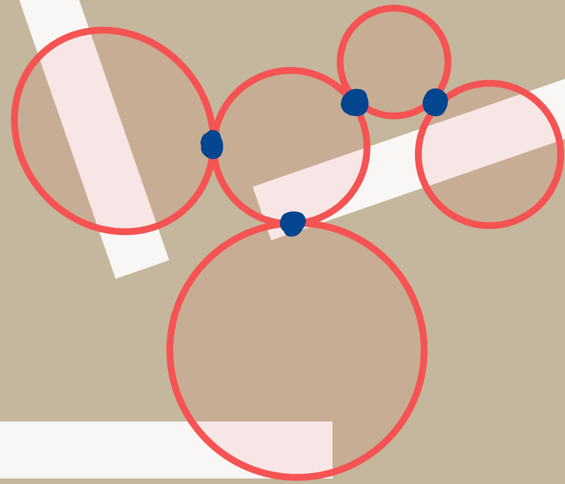
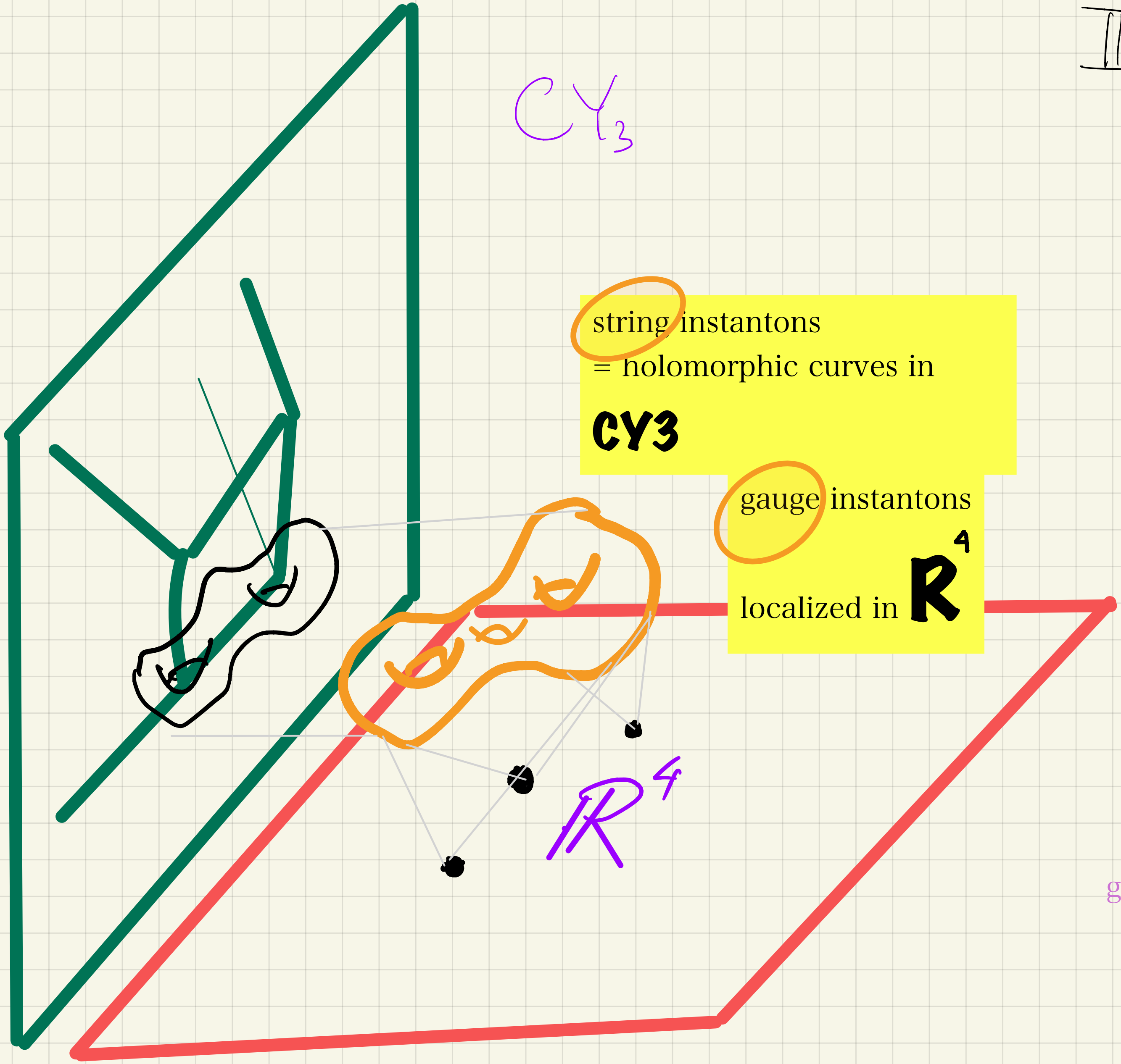




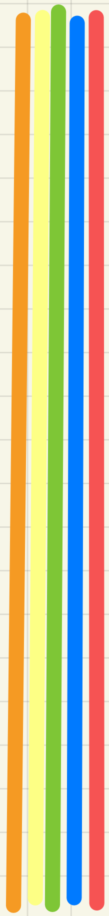
localization in topological strings and gauge instantons

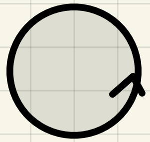
part I



string instantons
= holomorphic curves in
CY3

gauge instantons
localized in $\mathbf{R}^4$

IIA string  **M**- theory

$\times$  S^1

gauge group+ matter representation

<=>

geometry of CY3

supersymmetric quantum mechanics on $\mathcal{M}$

из прошлой лекции.....

связность в главном G-расслоении над 4мерным многообразием X

в 4+1 мерии: $\mathcal{M} = \{ A \mid \mathcal{F}_A^+ = 0 \} / \mathcal{G}$

инстантон

в 2+1 мерии: $\mathcal{M} = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{F}_A = 0 \} / \mathcal{G}$

плоская связность

связность в главном G-расслоении $\mathscr{P}$ над 2мерным многообразием Σ, сечение расслоения, ассоциированного с G-представлением R

в 2+1 мерии: $\mathcal{M} = \{ (A, Z) \mid D^{(0,1)} Z = 0 \mid \mathcal{F}_A + \mu(Z, \bar{Z}) = r \} / \mathcal{G}$

$$\mathcal{Z}_g = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_X}\, (-)^F g\, e^{-\beta \hat{H}}$$

$$g \in \mathrm{Iso}(X) \times G^k$$

$$\Omega_2 = \mathrm{tr}(\phi F + \tfrac{1}{2}\psi\wedge\psi)$$

$$\Omega_4 = \mathrm{tr}(\phi F\wedge F + \psi\wedge\psi\wedge F)$$

$$\mathcal{M} = \{A \mid F_A^+ = 0\} / \mathcal{G}_{x_1,\dots,x_k}$$

в 4+1 мерной теории

$$L = \int g_{ij}(\dot{m}^i \dot{m}^j + \xi^i \nabla_t \xi^j) + \sqrt{-1}\oint A_i \dot{m}^i + \tfrac{1}{2} F_{ij}\xi^i\xi^j$$

Черн-Саймоновские члены

в 2+1: $\mathrm{Tr}(A\,dA + \tfrac{2}{3}A^3) + i\,\Omega_2\wedge dt$

в 4+1: $\omega\wedge(\text{—//—})$

либо $\mathrm{Tr}(A(dA)^2 + \dots + \tfrac{3}{5}A^5)$

$+\,i\,\Omega_4\wedge dt$

super

$$\mathrm{Tr}(F\wedge *F + D\varphi\wedge * D\varphi)$$

$+$ материя+фермионы

супер-Янг-Миллс

$$Z_g = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_X} (-)^F g\, e^{-\beta \hat{H}}$$

$$g \in \mathrm{Iso}(X) \times G^k$$

эквивариантный

$\mathcal{M}$ framed at $x_1, \dots, x_k$

$$\mathcal{M} = \{ A \mid F_A^+ = 0 \} / \mathcal{G}_{x_1, \dots, x_k}$$

в 4+1 мерной теории

$$Z_g = \int \mathrm{Td}(\mathcal{M})\, e^{c_1(L)}$$

$$c_1(L) + \tfrac{1}{2} c_1(T\mathcal{M}) = \left[\tfrac{F}{2\pi i}\right]$$

$$L = \int g_{ij}\left(\dot{m}^i \dot{m}^j + \zeta^i \nabla_t \zeta^j\right) + \sqrt{-1} \oint A_i \dot{m}^i + \tfrac{1}{2} F_{ij} \zeta^i \zeta^j$$

Геометрическое квантование vs relativistic Landau problen with supersymmetry

$$\mathcal{H} = H^0(\mathcal{M}, L)$$

prequantization line bundle

$c_1(L) = [\omega]$

phase space

$$\mathcal{H} \ni \psi \iff \bar{\partial}_A \psi = 0$$

equivariant Riemann-Roch-Grothendieck

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\, g \sim \sum_i (-)^i \,\mathrm{Tr}_{H^i}\, g = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{Td}_{\mathcal{M}}\, e^{c_1(L)}$$

$$\sum_i (-)^i = \mathrm{Index}\, \not{D}_{\tilde{A}}$$

в 2+1 мерии: $\mathscr{M} = \{ A \mid F_A = 0 \}/\mathscr{G}$

$\|$

$Bun_{G_{\mathbb{C}}}(\Sigma)^{ss} = \left\{ \begin{array}{c} P \leftarrow G_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \\ \Sigma \end{array} \right\}$

ss: $\exists\, h : \Sigma \to G_{\mathbb{C}}$

$h^{-1}(d + \bar{A})h$

гладкие локальные функции

$\bar{A} = \bar{\partial} h_\alpha h_\alpha^{-1} \quad \forall \alpha$

$h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$

holomorphic bundle

плоская G связность

U_α

$\Sigma = \bigcup_\alpha U_\alpha$

$(g_{\alpha\beta})$

$h_\alpha^{-1} h_\beta = g_{\alpha\beta}$

$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G_{\mathbb{C}}$

$\bar{\partial} g_{\alpha\beta} = 0$

в 2+1 мерии: $\mathscr{M} = \{ A \mid F_A = 0 \} / \mathscr{G}$

$$\| $$

$$\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{C}}}(\Sigma)^{ss} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P} \leftarrow G_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \\ \Sigma \end{array} \right\}$$

holomorphic bundle

$$_R L$$

determinant line bundle

Пусть R представление G

$$H^0(\Sigma, \mathcal{P}_R) = \{ (s_\alpha) \mid s_\alpha : U_\alpha \to R \}$$

$$\bar{\partial} s_\alpha = 0$$

$$T_R(g_{\alpha\beta}) s_\beta = s_\alpha$$

$$\Sigma = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

$$\bar{\partial} g_{\alpha\beta} = 0$$

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G_{\mathbb{C}}$$

в 2+1 мерии: $\mathscr{M} = \{ A \mid F_A = 0 \} / \mathscr{G}$

$$\| $$

$$\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{C}}}(\Sigma)^{ss} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P} \leftarrow G_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \\ \Sigma \end{array} \right\}$$

holomorphic bundle

$_R\mathcal{L}$ determinant line bundle

Пусть R представление G

$$H^1(\Sigma, \mathcal{P}_R) = \{ (s_{\alpha\beta}) \mid s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to R \}$$

$$\bar\partial s_{\alpha\beta} = 0$$

$$s_{\alpha\beta} \sim s_{\alpha\beta} + T_R(g_{\alpha\beta}) s_\beta - s_\alpha$$

$$\Sigma = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

$$\bar\partial g_{\alpha\beta} = 0$$

$$s_{\alpha\beta} + s_{\beta\gamma} + s_{\gamma\alpha} = 0$$

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G_{\mathbb{C}}$$

в 2+1 мерии: $\mathscr{M} = \{ A \mid F_A = 0 \}/\mathscr{G}$

$$\| $$

$$\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{C}}}(\Sigma)^{ss} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P} \leftarrow G_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \\ \Sigma \end{array} \right\}$$

holomorphic bundle

$${}_R\mathcal{L}$$

Пусть R представление G

$${}_R\mathcal{L}\Big|_{\mathcal{P}} = \mathrm{Det}\, H^0 \otimes (\mathrm{Det}\, H^1)^* = \mathcal{L}^{c_2(R)}$$

the determinant line bundle

for SU(N) take $R = \mathbb{C}^N$

Dirac operator

$$\not{D} = \Gamma^m \partial_m$$

$$g_{mn}\psi^m \frac{\partial}{\partial t}\psi^n$$

quantization of $\psi^m \to \Gamma^m : \{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2g^{mn}$

$$S^{\pm} \approx K^{\frac{1}{2}} \otimes \Omega^{0,\text{ even/odd}}$$

on Kähler manifold we can represent

$$\Gamma^{2a-1} + i\Gamma^{2a} = d\bar{z}^a$$

$$\Gamma^{2a-1} - i\Gamma^{2a} = g^{a\bar{b}}\,\iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^b}}$$

acting on (0,p)-forms

$a = 1, \dots, d/2$

Dirac operator in magnetic field

$$\not{D} = \Gamma^m(\partial_m + A_m)$$

$$g_{mn}\psi^m \frac{\partial}{\partial t}\psi^n$$

quantization of $\psi^m \to \Gamma^m : \{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2g^{mn}$

on Kähler manifold we can represent

$$S^{\pm} \otimes L \approx \left[K^{\frac{1}{2}} \otimes L\right] \otimes \Omega^{0,\,\text{even/odd}}$$

could be defined even when neither $K^{\frac{1}{2}}$ nor L exist: $\text{Spin}_{\mathbb{C}}$ structure

acting on (0,p)-forms

$$c_1(K) = \partial\bar{\partial} \log\det(g_{a\bar{b}})$$

$$W_2 = c_1 \mod 2$$

препятствие к существованию спиноров

$$\hat{R} = \left(R_{ab\,mn}\, dx^m \wedge dx^n \right) \sim \begin{pmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & R_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{d/2} \end{pmatrix}$$

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & \xi_i \\ -\xi_i & 0 \end{pmatrix}$$

формальные корни Черна

$$Td_{\mathcal{M}} = \prod_{i=1}^{d/2} \frac{\xi_i}{1 - e^{-\xi_i}}$$

$$\hat{R} = \left(R_{ab\,mn}\, dx^m \wedge dx^n \right) \sim \begin{pmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & R_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_{d/2} \end{pmatrix}$$

формальные корни Черна

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & \xi_i \\ -\xi_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_M = \prod_{i=1}^{d/2} \frac{\xi_i/2}{\sinh(\xi_i/2)}$$

из предыдущей лекции

$$\left(\frac{\partial}{\partial m^i}\varepsilon_j - \frac{\partial}{\partial m^j}\varepsilon_i + [\varepsilon_i, \varepsilon_j]\right) dm^i \wedge dm^j = f_{ij}\, dm^i \wedge dm^j$$

$$D^*_{A(m)} D_{A(m)} f_{ij} = [\psi_i, *\psi_j]$$

$$\Phi = a + f_{ij}\, dm^i \wedge dm^j$$

$$\psi_i = \frac{\partial A}{\partial m^i} - D_A \varepsilon_i$$

$$\Psi = \psi_i\, dm^i$$

связность в универсальном расслоении P_u над $X \times \mathcal{M}$

$$\mathcal{A} = A(m) + \varepsilon_i\, dm^i$$

$$F_{\mathcal{A}} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \Phi + \Psi + F_A$$

из предыдущей лекции

касательное пространство к слою

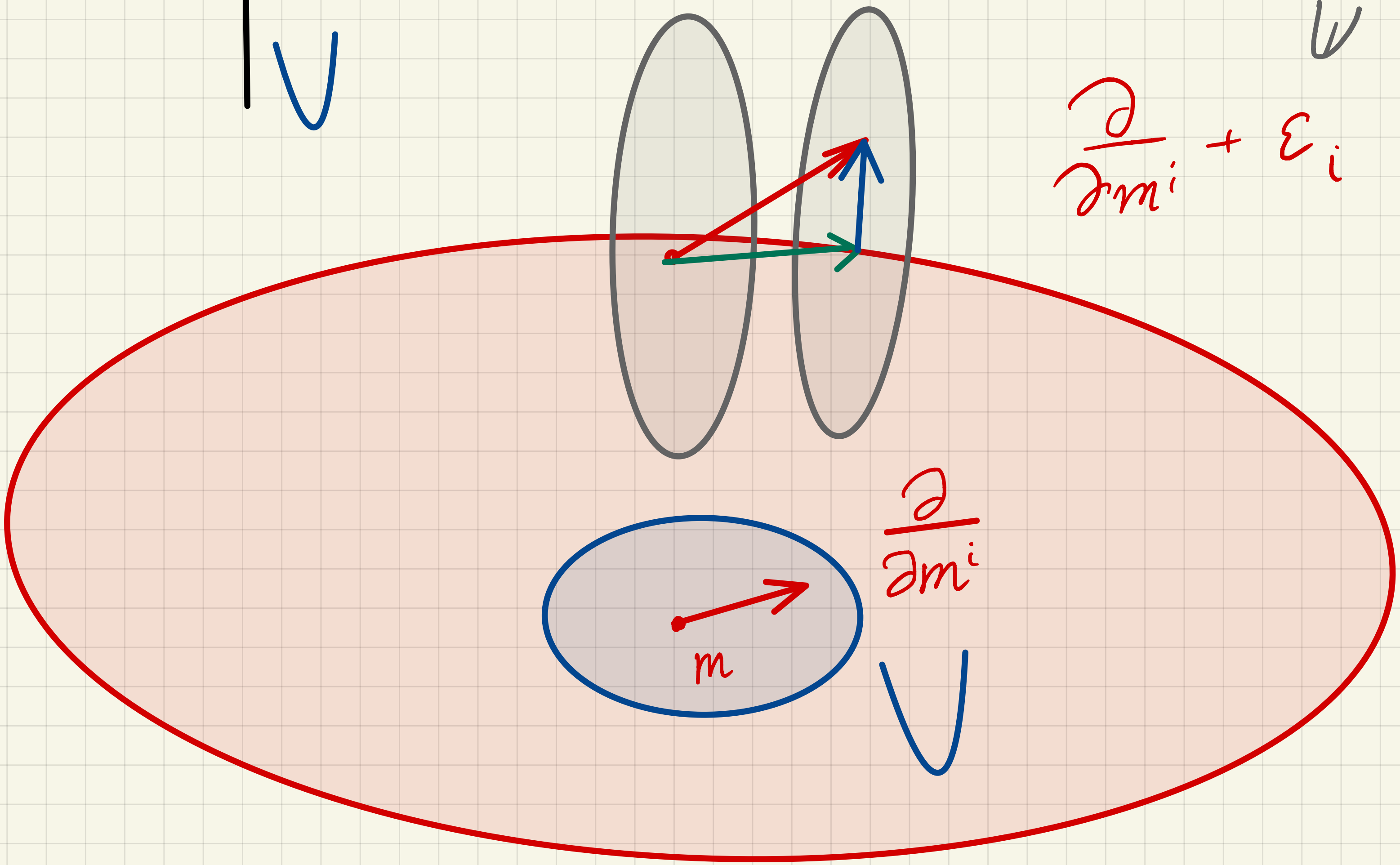
$\|$

$\mathrm{Lie}\, G$

$\cup$

$$\frac{\partial}{\partial m^i} + \varepsilon_i = \mathcal{D}_i$$

$$P\big|_V \approx V \times G$$



Наша задача: отобразить $\hat{A}$-род в набор калибровочно инвариантных операторов: $\mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$, etc

$$\hat{A}_{\mathcal{M}} = \prod_{i=1}^{d/2} \frac{\xi_i/2}{\sinh(\xi_i/2)} = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k} \sum_{i=1}^{d/2} \xi_i^{2k}$$

universal coefficients, related to Bernoulli numbers

$$\mathrm{Ch}(T\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{d/2} e^{\xi_i}$$

вычисляем из формулы Римана-Роха-Гротендика

$$\Bigg(= \int_X \mathrm{Td}_X \left[\mathrm{Ch}(\mathrm{ad} P_u) = \mathrm{Tr}_{adj}\, e^{\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}{2\pi i}} \right]$$

откуда РРГ и почему

$$\mathrm{Tr}_{adj}\, e^{\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}{2\pi i}}$$

напомним, что

$$T_m \mathcal{M} = \left\{ \delta A \;\middle|\; D^{+}_{A(m)} \delta A = 0,\; D^{*}_{A(m)} \delta A = 0 \right\}$$

1-формы со значениями в adP-расслоении алгебр Ли

= cohomology of a complex (Atiyah-Hitchin-Singer)

$$H^1\left(0 \longrightarrow \Omega^0_X \otimes \mathrm{ad}P_m \xrightarrow{D_{A(m)}} \Omega^1_X \otimes \mathrm{ad}P_m \xrightarrow{D^{+}_{A(m)}} \Omega^{2,+}_X \otimes \mathrm{ad}P_m \longrightarrow 0 \right)$$

точка m гладкая, если и только если $H^0 = H^2 = 0$

$$P_m = P_{\mathcal{U}}\big|_{X \times m}$$

$T\mathscr{M}$ = послойные когомологии семейства комплексов

$$\bigcup_{m \in \mathcal{M}} H^1\left(0 \longrightarrow \Omega^0_X \otimes adP_m \xrightarrow{D_{A(m)}} \Omega^1_X \otimes adP_m \xrightarrow{D^+_{A(m)}} \Omega^{2,+}_X \otimes adP_m \longrightarrow 0 \right)$$

РРГ:

$$Ch\left(H^0 - H^1 + H^2\right) = \int_X Tr_{adj}\, e^{\frac{\mathcal{F}_A}{2\pi i}}\, Td_X$$

знак минус

$$-\mathrm{Ch}(TM)$$

$$\parallel$$

$$\sum (-)^i \, \mathrm{Ch}\, H^i = \int_{X^d} \mathrm{Td}_X \, \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{2\pi i}\mathbb{F}}$$

$$\phi + \psi + F_A$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{F}$$

кривизна универсального расслоения

$$\parallel$$

$$-\sum_k e^{\xi_k}$$

неоднородная дифференциальная форма на $\mathcal{M}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\ell!}\sum_k \xi_k^{\ell} = \int_{X^d} \left(\text{2l+d-форма} \right)$$

$$\mathcal{F}(\phi) = \sum_{\text{корни } \alpha} \mathrm{Li}_3\left(e^{\langle \alpha, \phi \rangle}\right)$$

оставляем только четные ℓ =>

$$\hat{A}(TM) = \exp \int_X \mathcal{O}^{(d)}_{\mathcal{F}} + \mathcal{O}^{(0)}_{G}\, p_g(x)$$