Enters string theory

via **higher dimensions**

калибровочная теория
в размерностях 2 4

$\downarrow$ $\searrow$

3 5, 6

ф и к с и р о в а н н а я

г е о м е т р и я

п р о с т р а н с т в а $\quad X = \mathbb{R}^d$

в р е м е н и $\quad S^1$

$$Z = \mathrm{Tr}\,(-)^F e^{-\beta \hat{H}} g$$

деформируя теорию,
сохраняя часть суперсимметрии,
мы сведём вычисление

$$\mathcal{Z}^{\text{QFT}}_{d=4+1} \quad \text{к} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}_n^{\text{SQM}}$$

twisted Witten of supersymmetric quantum mechanics on the moduli space $\mathcal{M}_n^{+}$ of instantons

$$\int DA\, D\varphi\, D\Psi\, D\chi\, D\eta\, DH \ldots \exp\left[-S_{\text{SYM}} \supset \int \vartheta \wedge \mathrm{Tr}\, F \wedge F\right]$$

2+1 мерная теория

$j_T = *\mathrm{Tr}F \longleftrightarrow \vartheta$

ток топологической U(1) симметрии

внешнее (фоновое) калибровочное поле, по суперсимметрии связано с вещественным скаляром = r

частицы с зарядом по U(1)

vortices

Fayet-Iliopoulos

$$\int \vartheta \wedge \mathrm{Tr}F + r\,\mathrm{Tr}D$$

$$D\left(-\sum |z|^2\right) + \ldots$$

4+1 мерная теория

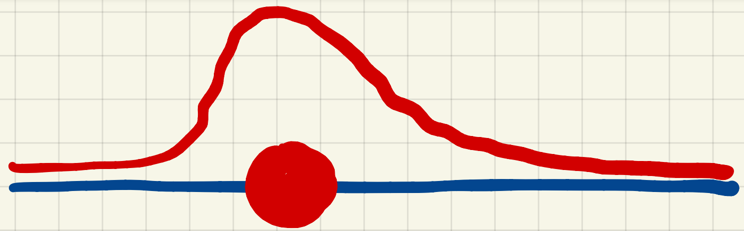
$$j_T = *\,\mathrm{Tr}\, F\wedge F \longleftrightarrow \vartheta$$

ток топологической U(1) симметрии

внешнее (фоновое) калибровочное поле, по суперсимметрии связано с вещественным скаляром $= \frac{1}{g^2_{YM}}$

частицы с зарядом по $U(1)_T$

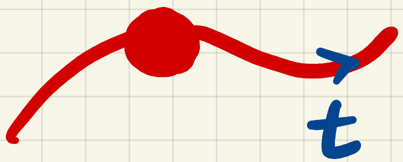
солитоны, квантованные модули инстантонов

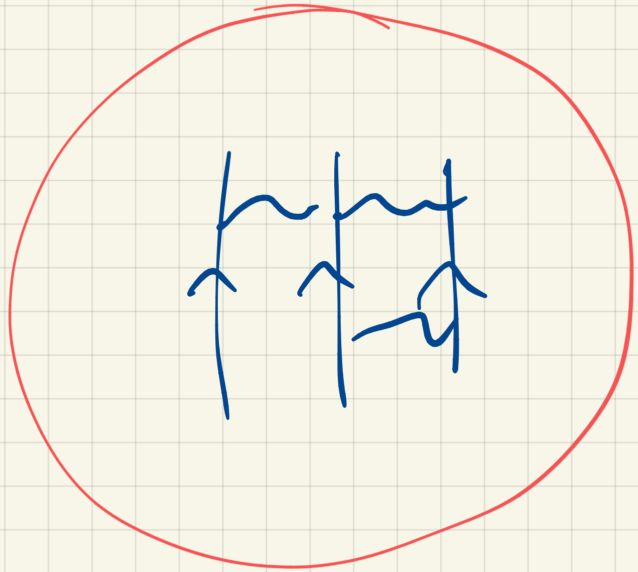


$\mathbb{R}^4$

$$e^{i\int \vartheta\, \mathrm{Tr}\, F\wedge F} \times e^{\int \frac{1}{g^2_{YM}} \mathrm{Tr}\, F\wedge * F} \rightsquigarrow e^{\int i\vartheta + M_1 ds}$$

траектория инстантона





$$M_n < n M_1$$

в суперсимметричных теориях встречаются

пороговые связанные состояния
threshold bound states
нулевая энергия связи

$$M_n = n M_1$$

укорочённый супермультиплет

$$Q|\psi\rangle = 0$$

$$\boxed{\mathbb{R}^4_x \times \mathbb{R}^1_t}$$

$$S_{SYM} = \int \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F_{\mu t}F_{\mu t} + D_\mu\varphi D_\mu\varphi + D_t\varphi D_t\varphi + \text{фермионы} \right)$$

$\mu, \nu = 1,2,3,4$

$$+ \int \vartheta \wedge \mathrm{Tr}\, F\wedge F \cong \int \vartheta_t\, dt \wedge \mathrm{Tr}\, F\wedge F$$

$$Q(A_t + i\varphi) = 0$$

$$Q A_\mu = \psi$$

$$Q(A_t - i\varphi) = \eta$$

$$Q\chi^+ = H^+$$

$$Q\eta = D_t\varphi$$

$$QH^+ = D_t\chi^+ + i[\varphi, \chi^+]$$

суперзаряд пятимерный аналог

дифференциала

в теории Дональдсона-Виттена

Q

самодуальная

0	1	2^+
c, η	ψ_μ	$\chi^+_{\mu\nu}$
A_t, φ	A_μ	$H^+_{\mu\nu}$

формы на $\mathbb{R}^4$

фермионы

бозоны

$$S_{4+1} = \int \tau \wedge \mathrm{Tr}\, F\wedge F \; + \qquad i\int \tau \wedge \mathrm{Tr}\, F\wedge F$$

$$+ \, Q \int \mathrm{Tr}\left\{ \chi^{+}_{mn}\left(F^{+}_{mn} - g^2 H^{+}_{mn}\right) + \psi_m \left(F_{mt} - i D_m \varphi\right) + \eta D_t \varphi \right\}$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(H^{+}\left(F^{+} - g^2 H^{+}\right) + D\varphi \wedge *_4 D\varphi + \left(D_t \varphi\right)^2 + L_{\partial_t} F \wedge *_4 L_{\partial_t} F \Big)$$

$$\left\langle \mathcal{O}_{R_1}(x_1) \ldots \mathcal{O}_{R_k}(x_k) \right\rangle$$

не зависит от

H^{+} · out thus, effectively $F^{+} \sim g \longrightarrow 0$

$$i\tau - \frac{dt}{g^2} = i\vartheta$$

1-форма в пятимерии

$$\left\langle \operatorname{Pexp} \oint \left(A_t + i\varphi\right) dt \right\rangle \sim e^{a}$$

$a \in \mathrm{Lie}\, G \otimes \mathbb{C}$

$$S_{4+1} = \int \tau \wedge \mathrm{Tr}\, F\wedge F \; +$$

$$+\, Q \int \mathrm{Tr} \Big\{ \chi^{+}_{mn} \left(F^{+}_{mn} - g^{2} H^{+}_{mn} \right) + \psi_m \left(F_{mt} - i D_m \varphi \right) + \eta D_t \varphi \Big\}$$

$$i \int \tau \wedge \mathrm{Tr}\, F \wedge F$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(H^{+} \left(F^{+} - g^{2} H^{+} \right) + D\varphi \wedge *_4 D\varphi + \left(D_t \varphi \right)^{2} + L_{\partial_t} F \wedge *_4 L_{\partial_t} F \Big)$$

не зависит от

Q-точных членов

$$\left\langle \mathcal{O}_{R_1}(x_1) \ldots \mathcal{O}_{R_k}(x_k) \right\rangle$$

$$H^{+}$$ · out thus, effectively $F^{+} \sim g \longrightarrow 0$

$$\mathcal{O}_R(x) = \mathrm{Tr}_R\, P\exp \oint_{\{x\}\times S^1} (A_t + i\varphi)\, dt$$

хорошая наблюдаемая

$$i\tau - \frac{dt}{g^2} = i\vartheta$$

1-форма в пятимерии

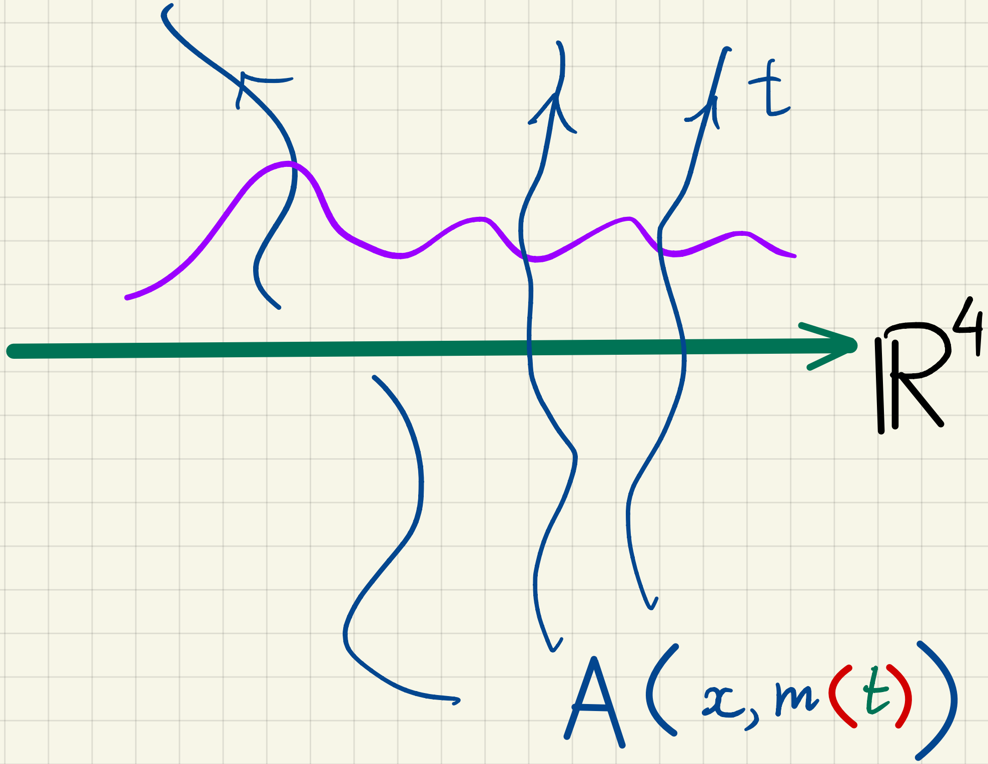
$$\left\langle P\exp \oint (A_t + i\varphi)\, dt \right\rangle \sim e^{a}$$

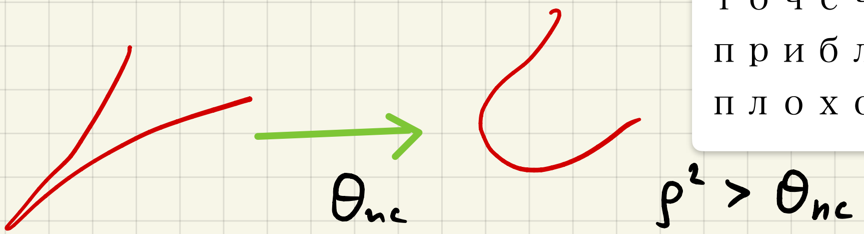
$a \in \mathrm{Lie}\, G \otimes \mathbb{C}$

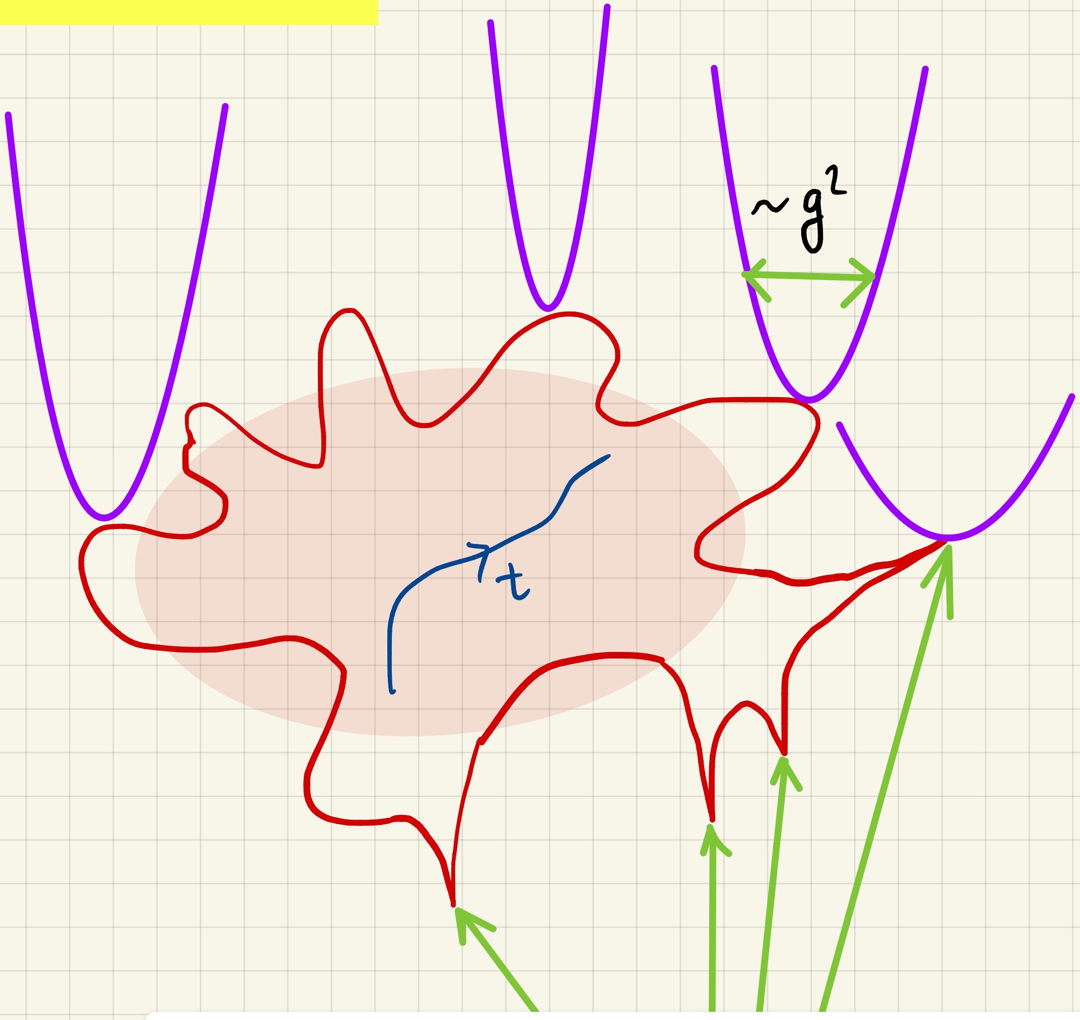
Удобный для вычислений предел $g^2 \longrightarrow 0$

конечное τ

$$\Longrightarrow \quad F_A^+ = 0$$







сингулярность
точечных инстантонов
приближение слабой связи
плохое $\Rightarrow$

некоммутативность

$$\int \mathrm{Tr}\, F_{\mu t}^2 + \mathrm{Tr}\, H^+ F^+ + \mathrm{Tr}(D_\mu \varphi)^2 + \cancel{\mathrm{Tr}(D_t \varphi)^2}$$

Q-точен

$$+ \mathrm{Tr}\, \chi^+ D_A^+ \psi + \eta D_A^* \psi$$

4d смысл

$$+ \mathrm{Tr}\, \chi^+ D_t \chi^+ + \eta D_t \eta$$

$$+ \mathrm{Tr}\left(*\psi, D_t \psi - i[\varphi, \psi]\right)$$

решим все связи

$$\Rightarrow \int dt\, g_{ij}\left(\dot m^i \dot m^j + \xi^i \nabla_t \xi^j\right)$$

$\mu=1,2,3,4$

$$\delta_i A = \frac{\partial}{\partial m^i} A(m) + D_{A(m)} \varepsilon_i$$

компенсатор

$$D^*_{A(m)} \delta_i A = 0$$

$$\varepsilon_i(x) \in \mathrm{Lie}\, G$$

$$g_{ij} = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\, \delta_i A \wedge * \delta_j A$$

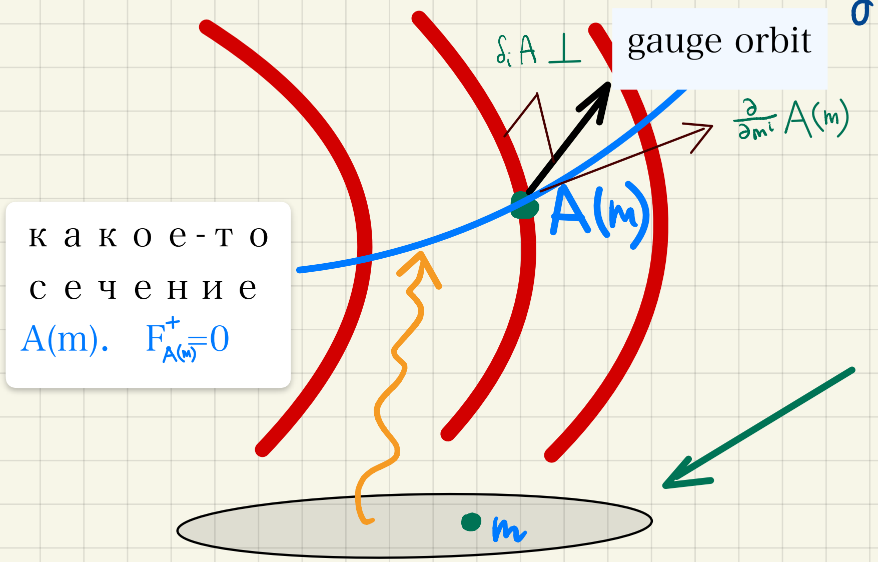
метрика на пространстве модулей

$$D_A^+ \psi = 0$$

$$D_A^* \psi = 0$$

$$\psi = \sum_i \xi^i \delta_i A$$

$$\mathcal{M}_n^+$$



$$\underset{\overset{\shortparallel}{\Delta_A}}{D_\mu^2}\, \underset{\overset{\shortparallel}{\sigma}}{(A_t + i\varphi)} = [\psi, *\psi]$$

$$\delta_i A = \frac{\partial}{\partial m^i} A(m) - D_{A(m)} \varepsilon_i$$

компенсатор

$$D^*_{A(m)} \delta_i A = 0$$

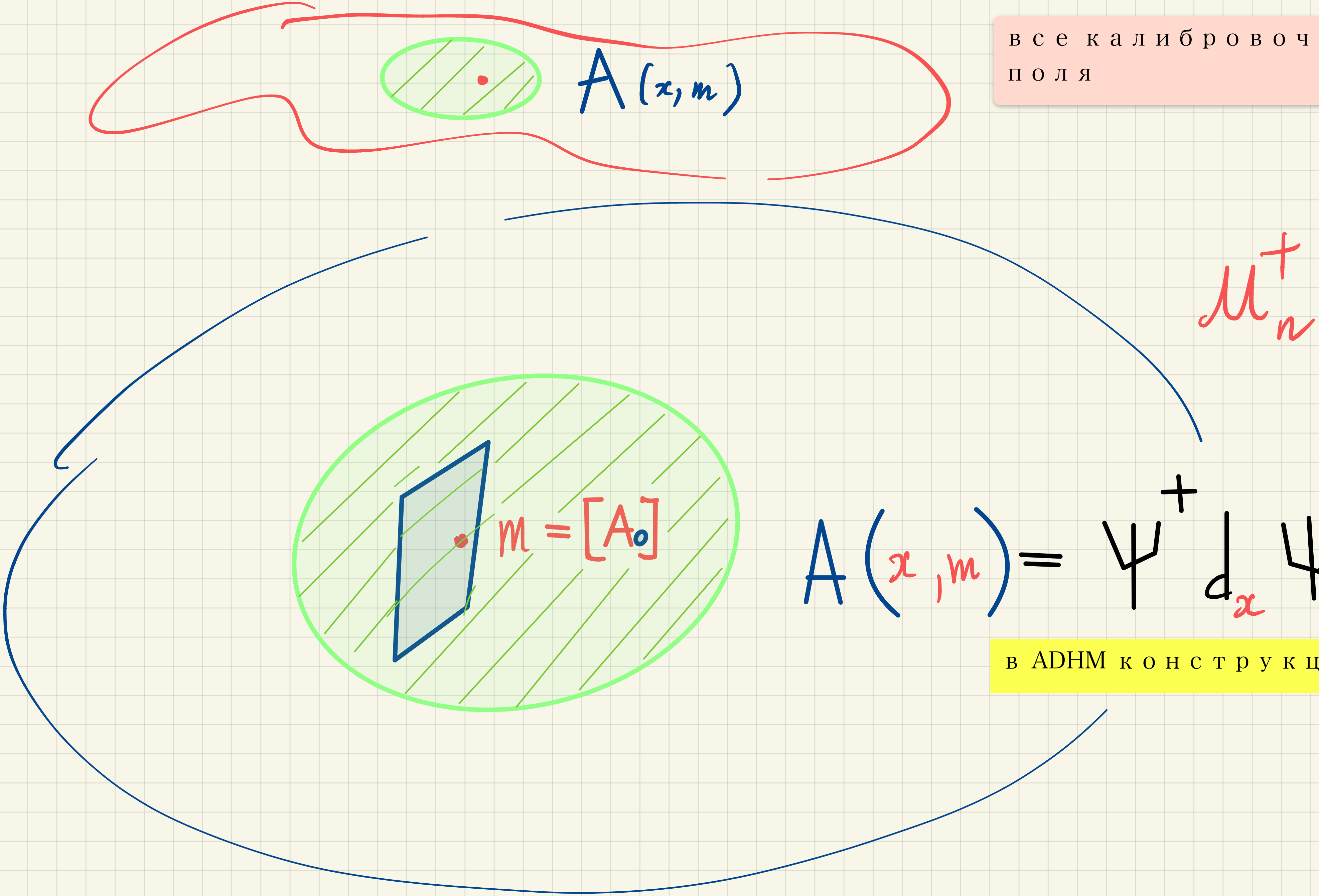
$\varepsilon_i(x) \in \mathrm{Lie}\,G$

$$g_{ij} = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\, \delta_i A \wedge * \delta_j A$$

метрика
на
пространстве
модулей $\mathcal{M}^+_n$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\Delta_{A(m)}} D^*_{A(m)} \left(\frac{\partial}{\partial m^i} A(m) \right)$$

все калибровочные поля



$$A(x,m) = \Psi^+ d_x \Psi$$

в ADHM конструкции

$$Z_n = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_n} (-)^F e^{-\beta\hat{H}} g$$

глобальные
калибровочные
преобразования

$$\mathcal{H}_n = \Gamma\left(\left(\mathcal{M}_n^+\right)^{\text{framed}},\ \text{Spinors} \right)$$

G

$$\int_{\mathcal{M}_n^+}^{G\text{-equiv}} \hat{A}\left(\mathcal{M}_n^+\right)$$

$$\delta_i A = \frac{\partial}{\partial m^i} A(m) - D_{A(m)} \varepsilon_i$$

компенсатор

$$D^*_{A(m)} \delta_i A = 0$$

$$\varepsilon_i(x) \in \mathrm{Lie}\, G$$

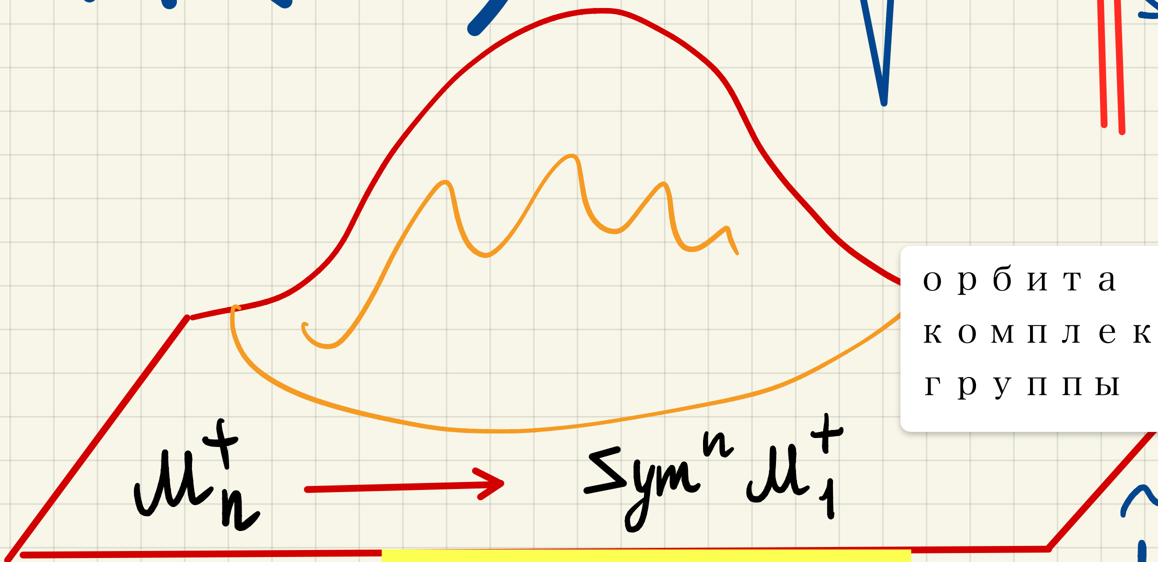
$$g_{ij} = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\, \delta_i A \wedge * \delta_j A$$

метрика на пространстве модулей $\mathcal{M}_n^+$

$$g_{ij} \longrightarrow R_{ABij}\, dm^i \wedge dm^j$$

2 форма кривизны

$$\hat{A}(\mathcal{M}_n^+) = \sqrt{\mathrm{Det} \left\| \frac{\hat{R}/2}{\sinh(\hat{R}/2)} \right\|^{\dim \mathcal{M}_n^+}_{A,B=1}}$$



$$\hat{R} = $$ эквивариантная кривизна = $R + (\sigma = A + i\phi)$ поправки

$$\tilde{\mathcal{M}}_1^+ = \mathbb{R}^4 \times HK$$

$$\int \hat{A}(\mathcal{M}_n^+)$$

выразить через 4-,0- наблюдаемые 4мерной теории

эффект КК мод 5мерной теории компактифицированной на окружность

$\mathcal{M}_n^+$

коррелятор в 4мерной теории типа Дональдсона

$$\hat{A}(\mathcal{M}_n^+) = \exp\int \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \sigma^2} F^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \sigma^3} F\wedge\psi\wedge\psi + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \sigma^4}\psi^4 + A(\sigma)\,\mathrm{Tr}\,R^2 + B(\sigma)\,\mathrm{Tr}\,R\tilde{R}$$

In 4d

$\mathrm{Tr}\,\sigma^k_{(x)}$

характеристический класс универсального расслоения, ограниченного на $\mathcal{M}^+_n \times \{x\}$

$\sigma(x)$ ~ кривизна универсальной связности

$\mathcal{A}^+_n = (F^+)^{-1}(0) \subset \mathcal{A}$

(m^i) координаты на $\mathcal{M}^+_n$

$A(m)$ сечение: $\mathcal{M}^+_n$

$$\delta_i A = \frac{\partial}{\partial m^i} A(m) - D_{A(m)}\varepsilon_i$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i\, dm^i$$

1-форма связности на $\mathcal{M}^+_n$

компенсатор

$$D^*_{A(m)}\delta_i A = 0$$

$$\varepsilon_i(x) \in \mathrm{Lie}\,G$$

$$g_{ij} = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\,\delta_i A \wedge * \delta_j A$$

метрика
на
пространстве
модулей $\mathcal{M}^+_n$

In 4d

$\mathrm{Tr}\,\sigma^k_{(x)}$

характеристический класс универсального расслоения, ограниченного на $\mathcal{M}^+_n \times \{x\}$

$\sigma(x)$

G - эквивариантная

~ кривизна универсальной связности

$\mathcal{A}^+_n = (F^+)^{-1}(0) \subset \mathcal{A}$

$\mathcal{M}^+_n$

(m^i)

координаты на $\mathcal{M}^+_n$

$A(m)$ сечение: $\mathcal{M}^+_n$

$$\delta_i A = \frac{\partial}{\partial m^i} A(m) - D_{A(m)} \varepsilon_i = [\mathcal{D}_i, D_{A(m)}]$$

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial m^i} + [\varepsilon_i, \cdot\,]$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i\, dm^i$$

1-форма связности на $\mathcal{M}^+_n$

$$D^*_{A(m)} \delta_i A = 0$$

$$\mathcal{D}_j \delta_i A - \mathcal{D}_i \delta_j A = D_{A(m)} f_{ij}$$

$$f = f_{ij}\, dm^i \wedge dm^j$$

$$f_{ij} = \partial_{m^i} \varepsilon_j - \partial_{m^j} \varepsilon_i + [\varepsilon_i, \varepsilon_j]$$

$$= [\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j]$$

$$D^*_{A(m)} D_{A(m)} f_{ij} = [\delta_i A, *\delta_j A]$$

к а л и б р о в о ч н ы е п р е о б р а з о в а н и я, framed at x, т о е с т ь $g(x)=1$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}/\mathcal{G}_x \arrow[dl, "G"] \\
\mathcal{A}/\mathcal{G} &
\end{tikzcd}$$

$x \in M^4$

$$\mathcal{G} \approx \bigtimes_{x \in M^4} G$$

$$\begin{tikzcd}
P_x \arrow[d] & \mathcal{G}/\mathcal{G}_x \approx G \arrow[l] \\
\mathcal{M}_n^+ &
\end{tikzcd}$$