# Lecture #6

December 2020

# Теория представлений алгебры $\mathfrak{gl}_N$

и ее проявления в решениях инстантонных исчислительных задач

$$\Psi(\vec{q}) = \sum_{\vec{k}} \vec{q}^{\,\vec{k}} \int_{\mathcal{M}_{\vec{k}}}$$

универсальные классы эквивариантных когомологически

волновая функция
сферическая функция
конформный блок

$\vec{k}$ — топ заряды

$\vec{q}$ — хим. активности (Fugacity)

$$\mathcal{M} = \bigsqcup_{\vec{k}} \mathcal{M}_{\vec{k}}$$

Примеры универсальных классов

1) $1$

2) полином Черна касательного расслоения $c_m(T\mathcal{M})$

3) А-род $(TM)$

4) elliptic genus $(TM)$

5) exp $\sum t_k \, ch_k(\mathcal{E}_x) \Big|_{\mathbb{Q}}$

$$\mathcal{E}_x = \frac{S^{-1}(0) \times \pi}{\mathcal{G}}$$

6) GW

$\phi : C \to X$

$$M_{\vec{k}} = \left[ S^{-1}(0) / \mathcal{G} \right]_{\vec{k}}$$

$x \in X$

$\mathcal{E}_x$ = расслоение, ассоциированное с evaluation map

$\mathcal{G} = \mathrm{Maps}(X, G)$

$\mathcal{G} \to G_x$

$\pi \in \mathrm{Rep}(G)$

из инстантонов $\longrightarrow$ $k \in \mathbb{C}$, $R_i \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ ∞-dim

$\lambda \in \mathbb{C}^r$

...

$R_i \in \mathrm{Rep}(G)$

$v_i \in R_i$

$$\langle V_1(z_1) \ldots V_n(z_n) \rangle$$

$R_1 \ni v_1$ $\qquad$ $R_n \ni v_n$

конформный блок $(\widehat{gl}_N)_k$

$$\left[ \int_{g:\Sigma \to G} \mathcal{D}g \; e^{k S_{WZW}(g, \bar{A})} \right]_{g \to gh} = \Psi(\bar{A})$$

$$S_{WZW}(g, \bar{A}) = S_{WZW}(g) + \int_\Sigma \mathrm{Tr}\, g^{-1}\partial g \wedge \bar{A}$$

$$\int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}dg \wedge * g^{-1}dg) + \int_\Sigma d^{-1}\,\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3$$

риманова поверхность


$\partial M^3 = \Sigma$

$$\Psi(\bar{A}) = e^{k\, S_{WZW}(h, \bar{A})}\, \Psi(h^{-1}\bar{A}h + h^{-1}\bar{\partial}h)$$

коцикл

$h_1, h_2$

$\Psi$ как про (мероморфное) сечение

$\mathcal{L}^{\otimes k}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{M}^{flat}(\Sigma, G) \subset Bun_{G^{\mathbb{C}}}(\Sigma) = \{\bar{A} \mid \bar{A} \sim h^{-1}\bar{A}h + h^{-1}\bar{\partial}h\}$$

# Базовый пример

## Инстантонная задача

$N_f = 2N_c$

$SU(N_c)$

$N_c = N$

калибровочная теория

$\vec{q} = (q_0, \dots, q_{N-1}) \in (\mathbb{C}^\times)^N_{|q|<1}$

$\mathcal{M}_{\vec{k}}$ — инстантоны в присутствии поверхностного дефекта

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$\Omega$-деф $\vec{k} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$

"$\prod_{f=1}^{2N} c_{m_f}(\mathcal{E})$" Унив. класс

Экв. параметры

$(m_1, \dots, m_{2N}) \to (m_1^+ \dots m_N^+)$, $\to (m_1^- \dots m_N^-)$

$(a_1, \dots a_N)$ $\sum_i a_i = 0$

$\langle V_1(0) V_2(q) V_3(1) V_4(\infty) \rangle$

$(\widehat{sl}_N)_k$

$k = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

$q = q_0 \dots q_{N-1}$

остальные активности (параметры 2мерной теории на дефекте) → "спиновые переменные"

# 4 представление

$\mathfrak{sl}_2$ $\qquad L_+, L_-, L_0$

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm$$
$$[L_+, L_-] = 2L_0$$

$\mu \in \mathbb{C}$

дифферен. операторы

$$L_- = -\partial_z$$
$$L_0 = -z\partial_z + \mu$$
$$L_+ = -z^2\partial_z + 2z\mu$$

$$\left(f(z)(dz)^{-\mu}\right) \mapsto f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\cdot (dz)^{-\mu}(cz+d)^{2\mu}$$

как алгебра ок

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Verma $\quad V_\mu = \{f(z) \in \mathbb{C}[z]\} = \bigoplus_{n\geq 0} z^n (dz)^{-\mu} =$

$$V_\mu = \mathbb{C}[L_+]\cdot 1$$

$$\tilde{V}_{\tilde{\mu}} = \left\{ f(z)(dz)^{-\tilde{\mu}} \;\middle|\; f(z) \in z^{2\tilde{\mu}}\mathbb{C}[z^{-1}] \right\}$$

$$= \mathbb{C}[L_-] \quad z^{2\tilde{\mu}}$$

$V_\mu \to \tilde{V}_\mu$

$z \to -z^{-1}$

$$L_+ = -z^2\partial_z + 2\tilde{\mu}z$$

$$H_{\alpha,\mu} = \{ f(z)(dz)^{-\mu} \mid f(z) \in z^{\alpha+\mu}\mathbb{C}[z, z^{-1}] \}$$

$\alpha, \mu \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Spec} L_0 = \alpha + \mathbb{Z}$$

$$L_+L_- + L_-L_+ - 2L_0^2 = 2\mu(\mu+1)$$

$$z \longmapsto -z^{-1} \qquad \alpha \longmapsto -\alpha$$

$\left( V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \right)^{sl_2}$

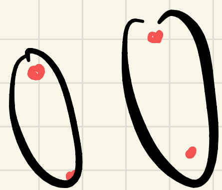
spins $\mu_1$ $\mu_2$ $\mu_3$

$$sl_2 \cdot \left[ f(z_1, z_2, z_3)(dz_1)^{-\mu_1}(dz_2)^{-\mu_2}(dz_3)^{-\mu_3} \right] = 0$$

?

$$z_i \mapsto \frac{az_i+b}{cz_i+d}$$

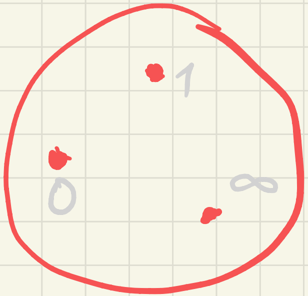
$i=1,\dots,4$



$\frac{z_{12}}{z_{13}} \frac{z_{43}}{z_{42}}$ - invariant

$$\frac{dz_1\,dz_2}{(z_1-z_2)^2}$$

invariant $SL_2$




$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_2+\alpha_3 = -\mu_1 \\ \alpha_1+\alpha_2 = -\mu_3 \\ \alpha_1+\alpha_3 = -\mu_2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{dz_1\,dz_2}{(z_1-z_2)^2}\right)^{\alpha_3}\left(\frac{dz_1\,dz_3}{z_{13}^2}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{dz_2\,dz_3}{z_{23}^2}\right)^{\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1-\mu_2-\mu_3}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{\mu_2-\mu_1-\mu_3}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\mu_3-\mu_1-\mu_2}{2}$$

$$f = z_{12}^{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\, z_{13}^{\mu_1+\mu_3-\mu_2}\, z_{23}^{\mu_2+\mu_3-\mu_1} \in V_1\otimes V_2\otimes V_3$$

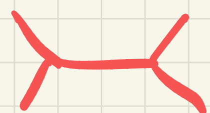
$$f = z_{12}^{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\, z_{13}^{\mu_1+\mu_3-\mu_2}\, z_{23}^{\mu_2+\mu_3-\mu_1} \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

Пусть

$$|z_1| \ll |z_2| \ll |z_3| \qquad V_{\mu_1} \otimes H_{\mu_1-\mu_3,\mu_2} \otimes \tilde{V}_{\mu_3}$$

$$f = z_3^{\underline{2\mu_3}} \left(1 - z_2/z_3\right)^{\mu_2+\mu_3-\mu_1} \left(1 - z_1/z_2\right)^{\mu_1+\mu_2-\mu_3} \cdot$$

$$z_2^{\underline{(\mu_1-\mu_3)}+\mu_2} \left(1 - z_1/z_3\right)^{\mu_1+\mu_3-\mu_2}$$

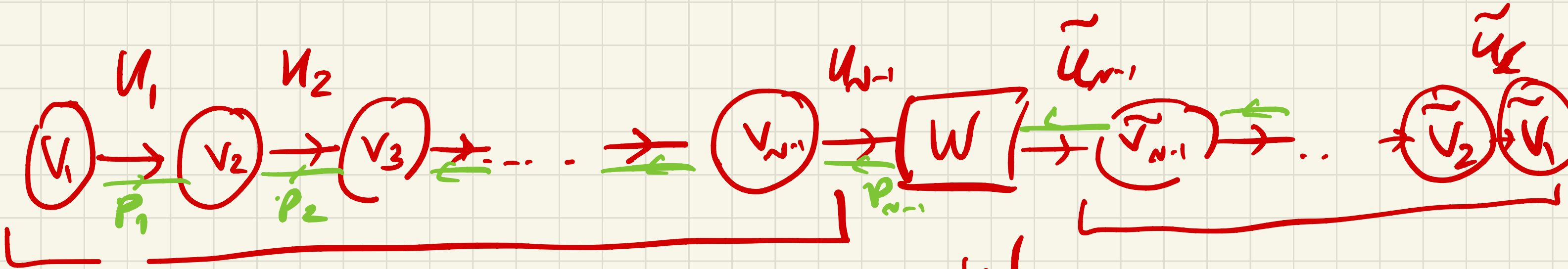


$\mathfrak{sl}_2$

где 4 точки

$$|z_1| \ll |z_2| \ll |z_3| \ll |z_4| \qquad \left(V_{\mu_1} \otimes H_{\mu_1-\mu_3+a,\mu_2} \otimes H_{\mu_3-\mu_4-a,\mu_3} \otimes \tilde{V}_{\mu_4}\right)$$

квантование колчанов




$F(W)$ многообразие полных флагов в $W$

$F(W^*)$ многообразие полных флагов в $W^*$

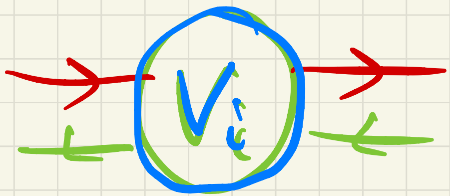
$\dim_{\mathbb{C}} V_i = i \qquad i = 1, \dots, N-1$

$U_i : V_i \to V_{i+1}, \qquad V_N = W = \tilde V_N \qquad \tilde U_i : \tilde V_{i+1} \to \tilde V_i$

$p_i : V_{i+1} \to V_i \qquad \tilde p_i : \tilde V_i \to \tilde V_{i+1}$

$F(W) \subset \mathcal{M}^{A_{N-1}}_{\vec\zeta} \qquad \vec\zeta \in \mathbb{C}^{N-1}$

$F(W^*) \subset \mathcal{M}^{A_{N-1}}_{\vec\zeta} \qquad \vec\zeta \in \mathbb{C}^{N-1}$




$\zeta_i \in \mathbb{C}$

$i=1,\dots,N-1$

$$\mu_i = P_i U_i - U_{i-1} P_{i-1} = \zeta_i \cdot 1_{V_i}$$

квантуем...

$$P_i \sim \frac{\delta}{\delta U_i}$$

$$G_N = \underset{g_1}{GL(V_1)} \times \dots \times \underset{g_{N-1}}{GL(V_{N-1})}$$

$$\hat{\mu}_i \cdot \Psi[U_i] = 0 \iff \boxed{\begin{array}{l} \Psi[g_{i+1} U_i g_i^{-1}] \prod_i (\det g_i)^{\zeta_i} \\ \Psi[U_i] = \end{array}}$$

$g_i = \exp(\xi_i)$ $\quad \forall (g_i) \in G_N^{inf}$

$$\tilde{\Psi}[\vec{u}_i] = \tilde{\Psi}(g_i \vec{u}_i g_{i+1}^{-1}) \prod_i (\det g_i)^{s_i}$$

$$\mathfrak{gl}_N = \mathrm{Lie}\, GL(W)$$

$$J^a{}_b = \sum_{m=1}^{N-1} u^a_{N-1|m} \frac{\partial}{\partial u^b_{N-1|m}} - \delta^a_b \cdot \nu(J)$$

$$u_i : V_i \to V_{i+1} \qquad u_i = \| u^A_{i|n} \|^{A=1,\dots,i+1}_{n=1\dots i}$$

Потребуем голоморфность $\psi$ на $F(W)^0$

в окрестности точки

~~выбора базиса~~ $e_1, \dots, e_N$ в $W$ пространстве

$$\varepsilon_1 = \mathbb{C}e_1$$

$$\varepsilon_2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_i = \mathbb{C}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_i$$

$$U^A_{i|a} = \delta^A_a \iff W_i = \varepsilon_i$$

$$(W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \dots \subset W_{N-1} \subset W)$$

$$W_i = \operatorname{im}(U_{N-1} \dots U_i) \subset W$$

$$W_i = U_{N-1} \dots U_i (V_i)$$

стабильность $\iff$

$\dim W_i = i$

$$F(W)^0 \subset \{U_i \mid (U_i) \sim (g_{i+1} U_i g_i^{-1})\}^{stab} = F(W)$$

Базис в $W$ $\quad e_1, \dots, e_N$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\tilde{e}^a(e_b) = \delta^a_b$

в $W^*$ $\quad \tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^N$

$$\Pi_i : \Lambda^i V_i \longrightarrow \Lambda^i W$$

$$\begin{array}{c} \cong \\ \mathbb{C} \end{array} \qquad \Pi_i = \Lambda^i (U_{N-1} U_{N-2} \dots U_i)$$

$\Pi_i$ — $i$-вектор в $W$, определенный с точностью до скалярного множителя

$$\Pi_i = \sum_{1 \le a_1 < \dots < a_i \le N} \det \left\| (U_{N-1} \dots U_i)^{a_k}_{e} \right\|^{i}_{k,l=1} \quad e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_k}$$

$$F(W)^0 = \{ u \mid \tilde{\Pi}_0^i(\Pi_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \}$$

$$\tilde{\Pi}_0^i = \tilde{e}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}^i \in \Lambda^i W^*$$

$$\Pi_i = \lambda^i (u_{N-1} \dots u_i) \in \Lambda^i W \otimes (\Lambda^i V_i)^{-1}$$

$$\Omega = \prod_{i=1}^{N-1} \left( \tilde{\Pi}_0^i(\Pi_i) \right)^{-\xi_i}$$

берём такие, что где $\Pi_i = \Pi_i^0 =$

$= e_1 \wedge \dots \wedge e_i$

$u_i \to g_{i+1} u_i g_i^{-1} \qquad \Pi_i \to \Pi_i (\det g_i)^{-1}$

$\Omega = 1$

$$J^a{}_b\,\Omega = \sum_{i=1}^{N-1} -\xi_i \,\frac{\vec{\Pi}^i_0\left(e_b \wedge \tilde{e}^a \Pi_i\right)}{\vec{\Pi}^i_0(\Pi_i)} \cdot \Omega$$

$$b<a \Rightarrow J^a{}_b\,\Omega = 0$$

$$a=b \Rightarrow J^a{}_a\,\Omega = \overbrace{\left(\sum_{i=a}^{N-1}(-i\,\xi_i)\right)}^{=\mu_a}\Omega$$

$$V_{\vec{\mu}} = \mathbb{C}\left[J^a{}_b\right]_{a<b} \cdot \Omega$$

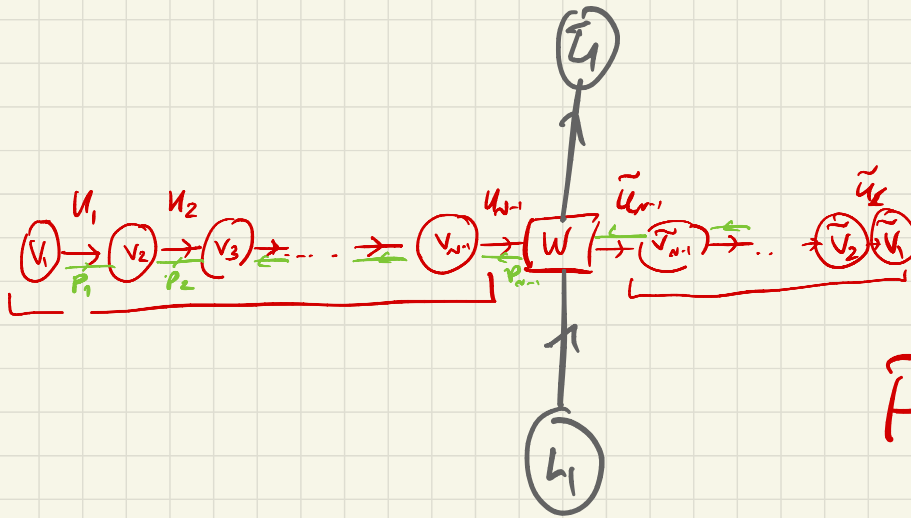
→ Verma модуль веса

Аналогично

$$\prod_{i=1}^{N-1}\left(\tilde{\pi}^{i}(\pi_i^{0})\right)^{\tilde{\xi}_i} = \tilde{\Omega}$$

$$\mathbb{C}[J^a_+]_{a>1}\,\tilde{\Omega} = \tilde{V}_{\vec{\mu}}$$

модуль Верма
старшего веса




$$J^a_b = -\tilde{z}_b \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_a}$$

$$\vec{H}_{\vec{\mu}} = \prod \tilde{z}_a^{\tilde{\mu}_a} \mathbb{C}[\tilde{z}, \tilde{z}^{-1}]$$

$$H_{\vec{\mu}} = \prod_{a=1}^{N} z^{a\,\mu_a} \mathbb{C}[z^a, z^{a\,-1}]^{\mathbb{C}^\times}$$

$$J^a_b = z^a \frac{\partial}{\partial z^b}$$

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{a=1}^{N} z^{a\,\mu_a} \cdot f(z^1 : \dots : z^N)$$

полином степени 0 Лорана