quantizing equations

localizing constraints

Квантовомех. происхождение

- FIELDS
- EQUATIONS
- SYMMETRIES

$\int_{M} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ — корреляторы в 1) когомологической теории поля
2) иногда в физической SUSY

Геометрическое квантование

(X, ω) — симплектическое многообразие

$d\omega = 0$ $\qquad$ $\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ $\qquad$ $\mathrm{Vect}(X)$

$$f \mapsto H_f = \omega^{ij}\partial_i f \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] & L \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

, assoc.

$$\begin{tikzcd} U(1) \arrow[r] & P \arrow[d] \\ & X \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

$\exists ?\, \sigma$

$$P\big|_{U_\alpha} \cong U(1) \times U_\alpha$$

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = X$$

$$U_\alpha \cap U_\beta$$

$$c_1(L) = \frac{\omega}{2\pi}$$

препятствие окажется на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \to n_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$

L — расслоение предквантование
$U(1)$

(L, ∇) со связностью

$$[\nabla_v, \nabla_u] = \nabla_{[v,u]} + F(v,u)$$

$$\nabla^2 = F_\nabla = -i\omega$$

$$x = (p, q)$$

$$X = \mathbb{R}^{2n}$$

$$\omega = \sum_{a=1}^{n} dp_a \wedge dq^a = \frac{1}{2}\omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$$

$$i = 1, \dots, 2n$$

$$L = X \times \mathbb{C}$$

линейное расслоение

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\omega_{ij} x^j$$

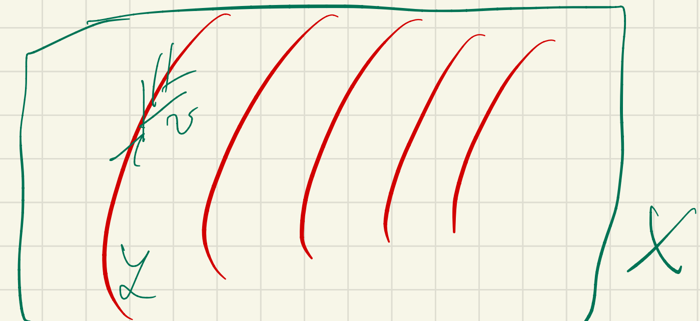
$$f \in \mathrm{Fun}(X) \qquad f \to \hat{f} \in \mathrm{End}(C^\infty(L))$$

$$\hat{f}s = fs + \nabla_{H_f} s \qquad [\hat{f}, \hat{g}] \sim \widehat{\{f, g\}}$$

Если $X = T^*M$

$\mathcal{H}_X = L^2(M)$

$\mathcal{A}(X) \rightsquigarrow D(M)$



Нужно как-то уменьшить $C^\infty(L)$, примерно в 2 раза

$\psi(p,q) \to \psi(q)$

$F_\nabla = \omega$

$\psi \in \mathcal{H}$

$\nabla_u \psi = \nabla_v \psi = 0$

$u, v \in TL$

$0 = [\nabla_v, \nabla_u]\psi = \nabla_{[v,u]}\psi$ — Фробениус

$L \subset X$ лагранжево, т.е. $\omega|_L = 0$, L - max.

Deformation quantization

$A(X)$ — функции на X, $\{\,,\,\}$

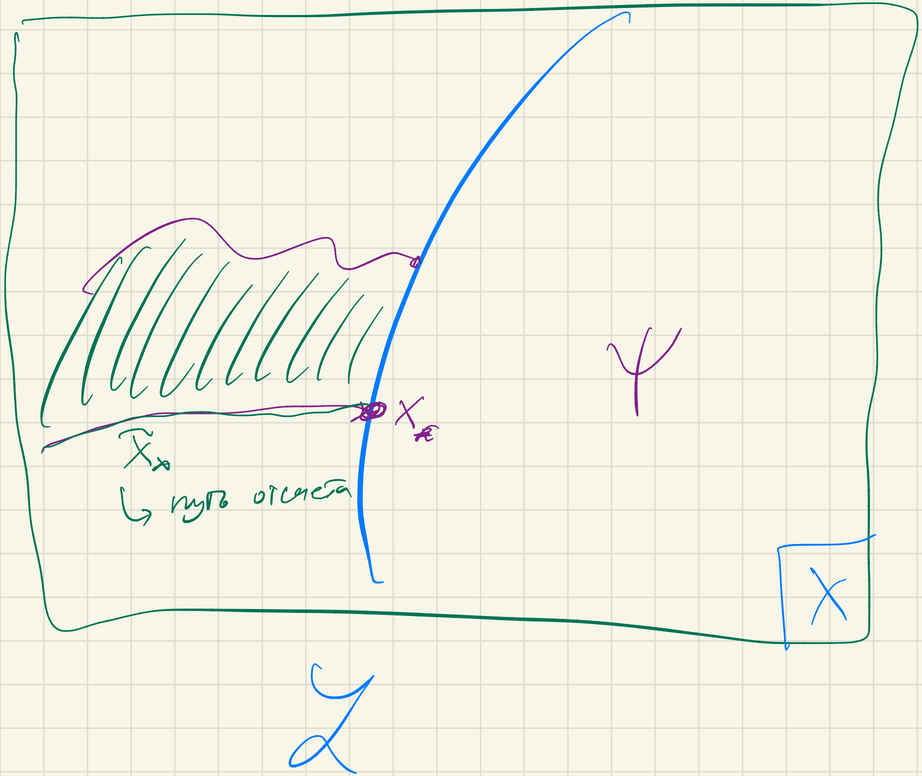
коммутативные

$A_\hbar(X)$ — ассоциативные алгебры над $\mathbb{R}[\hbar]$

$\hbar \to 0 \qquad A_\hbar \to A$

$$[f_\hbar, g_\hbar] = \hbar\{f_0, g_0\} + O(\hbar^2)$$

Вообще говоря, нет представлений



$$\int [\mathcal{D}x]\, e^{\underbrace{i\int_x d^{-1}\omega - \int H\,dt}}$$

Контур интеграла

по путям

$x : \mathbb{R}_{<0} \to X$

$x(0) \in \mathcal{L}$

можно сдвинуть

$$e^{i\int_x^{x(0)} d^{-1}\omega^{\mathbb{C}}} = e^{i\int_{\text{пленке}} \omega^{\mathbb{C}}}$$

$$\int f(x)dx \to \int f(z)dz$$

$$dp \wedge dq = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i}$$

$i\int_{\text{замкнутой 2-цикл}} \omega \in 2\pi i\mathbb{Z} \iff \left[\frac{\omega}{2\pi}\right] \in H^2(X, \mathbb{Z})$

Контур континуального интегрирования в комплексную область

$$x : \mathbb{R}_{<0} \longrightarrow X^{\mathbb{C}}$$

$$x(0) \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}} \subset X^{\mathbb{C}}$$

лагранж. по отношен. к $\omega^{\mathbb{C}}$ – $(2,0)$ голоморфная форма на $X^{\mathbb{C}}$

$X = \mathbb{R}^{2n}$, $X^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{2n}$

Лагранжево слоение $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_a}$

p, q

$z_{\dot{a}} = p_{\dot{a}} + \sqrt{-1}\, q^{\dot{a}}$

$\bar{z}_a = p_{\dot{a}} - \sqrt{-1}\, q^{\dot{a}}$

$z_{\dot{a}}, \bar{z}_{\dot{a}}$ независимые

голоморфные функции на $X^{\mathbb{C}}$

$z^* = \bar{z}$ на X

$\nabla_{z_a} = \frac{\partial}{\partial z_a} - \frac{1}{2} \bar{z}_a$

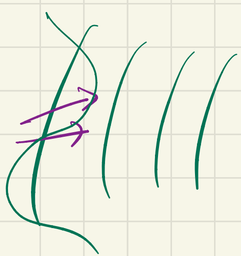
$\nabla_{\bar{z}_a} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a} + \frac{1}{2} z_a$

Голоморфные поляризации

$$\nabla_{\bar z_a}\psi = 0$$

$$\iff \psi = \underline{\chi(z_1,\dots,z_n)\, e}^{-\frac{1}{2}(z_1\bar z_1 + z_2\bar z_2 + \dots + z_n\bar z_n)}$$

$\hat f = f\cdot + \nabla_{H_f}$ не работает, потому что



H_f сбивают лагр. поляризацию

Нужно строить идентификации разных поляризаций

КЗБ

~ квантование

$A_z, A_{\bar z}$

параметр деформации

$\psi(\bar A, \mu)$

результат квантования

$(\Sigma, \mu) \to$ компл.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mu}\psi \sim \frac{\partial}{\partial \bar A}\frac{\partial}{\partial \bar A}\psi}$$

$$\int \mathcal{D}g \, e^{k S_{WZW}(g) + k\int \mathrm{Tr}\, \bar A g^{-1}\partial g}$$

$(\bar A \to A)$

$$T = \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial g)^2 \qquad \frac{\partial}{\partial \mu} = \langle T \rangle$$

Квантование приводит к голоморфным сечениям линейных расслоений над фазовым пространством X

$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\, g =$

$g \in$ группа симметрий

$= \sum$

fixed points of g action on X

gewichtet $U(N)$ $\circlearrowleft$ $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$

$U(N)$-invariant

$$\mathcal{H} = \{ \underbrace{\chi(z_1, \dots, z_N)\, e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2}}_{\psi_\chi} \}$$

$$(\psi_{\chi_1}, \psi_{\chi_2}) = \int_{\mathbb{C}^N} \psi^*_{\chi_1} \psi_{\chi_2} < \infty \quad \text{ecm } \chi_1, \chi_2 \in \mathbb{C}[z]$$

$$a_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \qquad (\psi_{\chi_1}, a_i^\dagger \psi_{\chi_2}) = (a_i \psi_{\chi_1}, \psi_{\chi_2})$$

$$a_i^\dagger = z_i$$

$$g \in U(N) \qquad g = \mathrm{diag}\left(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_N}\right)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(g\, e^{-\beta \hat{H}}\right) \qquad \hat{H} = \sum_{i=1}^{N} a_i^+ a_i = \widehat{\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2}$$

$$[\hat{H}, U(N)] = 0$$

$$\parallel$$

$$\left(g e^{-\beta \hat{H}}\right) z_1^{n_1} \cdots z_N^{n_N} e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2} = \sum_{\vec{n}} e^{i(n_1\varphi_1 + \ldots + n_N\varphi_N) - \beta \sum_i n_i} = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(1 - e^{-\beta} e^{i\varphi_i}\right)}$$

$$= e^{i(n_1\varphi_1 + \ldots + n_N\varphi_N) - \beta \sum_i n_i} z_1^{n_1} \cdots z_N^{n_N} e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2}$$

можно откалибровать

$U(1) \subset U(N)$

$$X \to X /\!/ U(1) \simeq \mathbb{CP}^{N-1} \qquad \mathcal{H} \to \mathcal{H}_k$$

Связи второго рода: новый тип ограничений

полином

$$F(z) = 0 \quad , \quad F^*(\bar{z}) = 0$$

$$(X, \omega) \supset Y$$

$$\omega^{(1,1)}\big|_Y$$

снова симплектическая структура

$$\mathcal{H}_Y = \mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]/J_F = \{ f \sim g \mid f - g = F\cdot h,\ h \in \mathbb{C}[z_1,\dots] \}$$

Допустим F — моном $z^{\vec d}$

$$F(e^{i\varphi_1} z_1, e^{i\varphi_2} z_2, \dots, e^{i\varphi_N} z_N) = e^{i\vec\varphi\cdot\vec d}\, F(z_1,\dots,z_N)$$

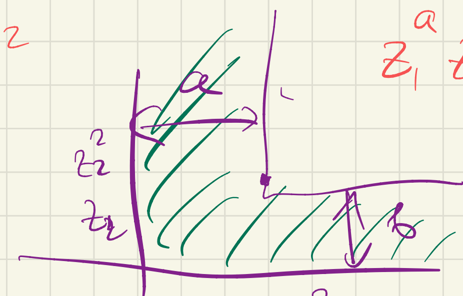
$$e^{i\vec\varphi\cdot\vec d} = \chi_F(g)$$

$$\boxed{\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_Y + F\cdot\mathcal{H}_X}$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_Y}\, g = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_X}\, g\cdot(1-\chi_F(g))$$

z_1, z_2

$$z_1^a z_2^b = 0$$



Y — утолщение коорд. креста

✓ $z_1 = 0$ с кратн. a

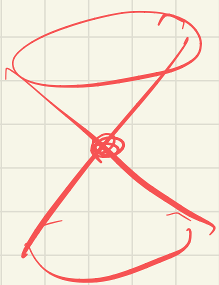
$z_2 = 0$ с кратн. b

$T \subset \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \subset GL(2)$

$$\boxed{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2} = \{(z_1, z_2) \sim (-z_1, -z_2)\}$$

$X = z_1^2, \quad Y = z_2^2$

$Z = z_1 z_2$



$\subset \mathbb{C}^3$

$$= \mathbb{C}[X, Y, Z] \,/\, \underline{(Z^2 = XY)} \qquad e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$X \quad e^{2i\varphi_1}$

$Y \quad e^{2i\varphi_2}$

$Z \quad e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$U(1)^2 \hookrightarrow U(1)^3$

$\mathcal{H}_X = \mathbb{C}^3$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_X}\, g = \frac{1 - e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)}}{(1-e^{2i\varphi_1})(1-e^{2i\varphi_2})(1-e^{i(\varphi_1+\varphi_2)})}$$

$$g = \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}\, g$$

откалибровать $\mathbb{Z}_2$

$$\downarrow$$

$$p : (z_1, z_2) = (-z_1, -z_2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}\, g + \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}\, pg\right)$$

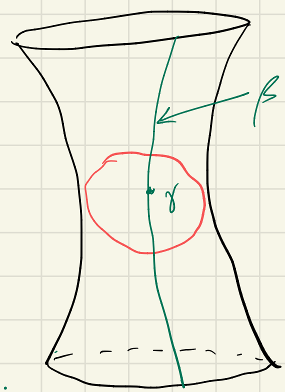
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-e^{i\varphi_1})(1-e^{i\varphi_2})} + \frac{1}{(1+e^{i\varphi_1})(1+e^{i\varphi_2})}\right] = \frac{1+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}{(1-e^{2i\varphi_1})(1-e^{2i\varphi_2})}$$

$\widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2}$ — разрешение особенностей

$\simeq T^*\mathbb{CP}^1$

$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$

$(z_1, z_2) \sim (-z_1, -z_2)$



координата в слое $T^*_\gamma \mathbb{CP}^1$

$\mathbb{CP}^1 = U_+ \cup U_-$

$T^*\mathbb{CP}^1 = U_+ \cup U_-$

$(\beta, \gamma) \qquad (\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$

$$U_+ \begin{cases} \gamma = z_2/z_1 \\ \beta = z_1^2 \end{cases} \qquad \begin{rcases} \tilde{\gamma} = -z_1/z_2 \\ \tilde{\beta} = z_2^2 \end{rcases} U_-$$

координаты Дарбу на $T^*\mathbb{C}P^1$

$$T^*\mathbb{C}P^1 = \underset{\mathbb{C}^2}{\overset{\beta,\gamma}{U_+}} \cup \underset{\mathbb{C}^2}{\overset{\tilde\beta,\tilde\gamma}{U_-}}$$

$$\omega^{\mathbb{C}} = d\beta\wedge d\gamma = d\tilde\beta\wedge d\tilde\gamma$$

$$z_1^2 = X = e^{2i\varphi_1}\beta = +\tilde\beta\tilde\gamma^2$$

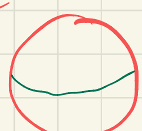
$$z_1 z_2 = Z = \beta\gamma = -\tilde\beta\tilde\gamma$$

$$z_2^2 = Y = \beta\gamma^2 = +\tilde\beta$$

гамильтонианы действия SL(2,C) на $T^*\mathbb{C}P^1$

$$\gamma = z_2/z_1 = e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tilde\gamma = -z_1/z_2$$



$$T = (e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \subset \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^*\times SL(2,\mathbb{C})$$

растягивает слои $T^*\mathbb{C}P^1$, не сохраняет голоморфную симплектическую форму $\omega^{\mathbb{C}}$

$$U_+\cap U_- = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$$

$$\chi_+ = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}[\beta,\gamma]}\, q = \frac{1}{\left(1-e^{2i\varphi_1}\right)\left(1-e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\right)}$$

$$\chi_- = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}[\tilde\beta,\tilde\gamma]}\, q = \frac{1}{\left(1-e^{2i\varphi_2}\right)\left(1-e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)}$$

$$\mathrm{Tr}_{\substack{\mathrm{Fun}(T^*\mathbb{CP}^1) \\ \wr\wr\wr \\ H^0(T^*\mathbb{CP}^1,\, \mathcal{O})}}\, q = \chi_+ + \chi_- = \frac{1+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}{\left(1-e^{2i\varphi_1}\right)\left(1-e^{2i\varphi_2}\right)}$$

тот же ответ!

$T: \quad (z_1 : z_2) \mapsto (e^{i\varphi_1} z_1 : e^{i\varphi_2} z_2)$

неподвижная точка 0

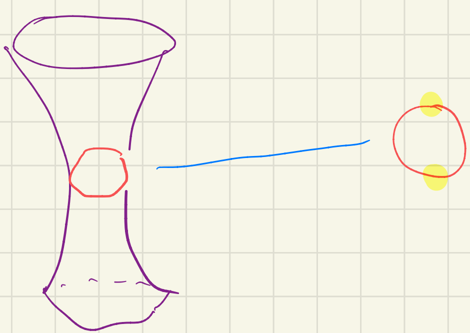
на $\mathbb{C}^2$, или $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$

$$\widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2} \supset \mathbb{CP}^1 = \{(z_1 : z_2)\}$$

действие тора продолжается до

$(z_1 : z_2) \mapsto (e^{i\varphi_1} z_1 : e^{i\varphi_2} z_2)$

с двумя неподвижными точками



$(1:0)$ N

$(0:1)$ S

Полное пересечение $\subset \mathbb{C}^N$

$z_1, \ldots, z_N$

уравнения $F_i(z) = 0$ $i = 1, \ldots, M$

эквивариантные уравнения $F_i(gz) = \chi_i(g) F_i(z)$

$F_i \cdot F_j \quad h_{ij}(z)$

$F_i F_j F_k$

$$f(z) \sim g(z) + F_i(z) h_i(z)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}[z]/\mathcal{I}} = \frac{1}{\prod_a (1 - e^{i\varphi_a})} \times \left(1 - \sum_i \chi_i + \sum_{i<j} \chi_i \chi_j - \sum_{i<j<k} \chi_i \chi_j \chi_k\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{M} (1 - \chi_i)$$

equations

$$\oint \frac{dg}{\mathrm{vol}(G)} \frac{\prod_i (1 - x_i)}{\prod_a (1 - x_a)} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}_Y^G}\, g$$

fields

symmetry

прототип 3,5,7,9 - мерной инстантонной статсуммы