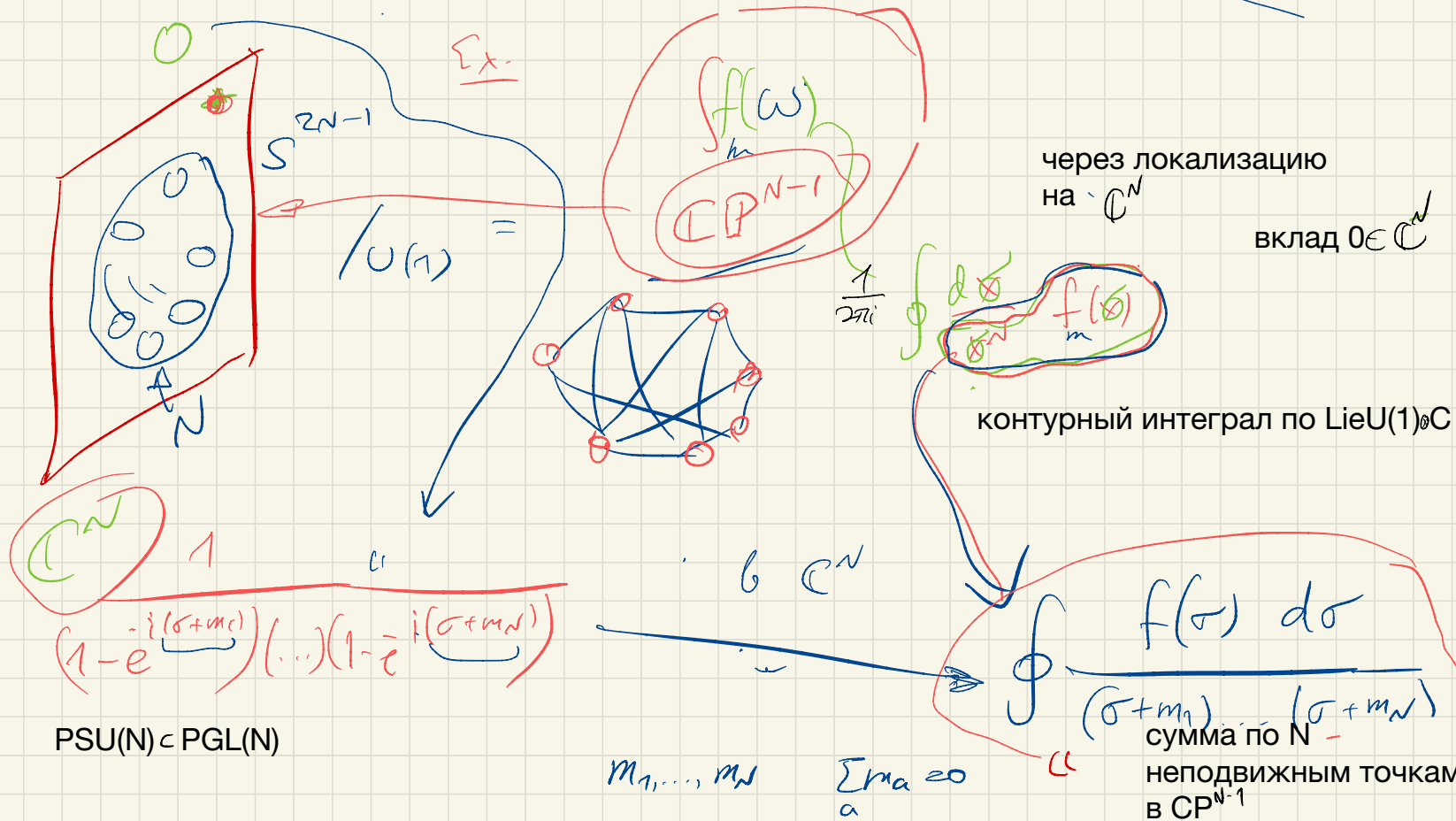



Fixed points and their contributions

$$X = \mathbb{C}^N$$



Atiyah
Bott
Duistermaat
Heckmann

$$\int_X \alpha(\sigma) =$$

$$\sum_{x \in X^G}$$

$$(d + 2\nu(\sigma))\alpha(\sigma) = 0$$

$$\alpha \in \Omega_G^*(X)$$

$$\alpha \circ g \rightarrow \Omega^*(X)$$

$$\alpha(\text{Ad}_g \sigma) = g^* \alpha(\sigma)$$

$$\forall \sigma \in \mathfrak{g}$$

$$X = \mathbb{C}^N, \quad G = U(1) = T$$

$$X^G = 0 \in \mathbb{C}^N$$

$$\frac{\alpha^{(0)}(\sigma)}{\prod_{i=1}^{\dim X/2} w_i(\sigma)}$$

предполагая
изолированность

веса действия
T на касательном
пространстве

$$\alpha(\sigma) = \sum_{p=0}^{\dim X} \alpha^{(p)}(\sigma)$$

$$\alpha^{(p)}(\sigma) \in \Omega^p(X)$$

$T_x X$

$$\text{Trace}(g) = \sum_{\substack{\text{fixed} \\ \text{points of } g}} \text{"local"} g$$



$g \in \text{SU}(2)$

gerade
6. case
 $\downarrow O(2j)$

$$\frac{e^{ij\theta}}{1 - e^{-i\theta}}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{V_j}(g) &= \frac{\sin((j+\frac{1}{2})\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{e^{i(j+\frac{1}{2})\theta}}{2i \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{e^{-i(j+\frac{1}{2})\theta}}{2i \sin \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \sum_{\text{fixed points}} g = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & \\ & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \otimes S^2 \end{aligned}$$

$\leftarrow N$

$\leftarrow S$

G - конечная группа

R - модуль H

$G \curvearrowright X$ - finite set
 $H \rightarrow$ commuting actions

$$\mathcal{H}_H^R = \text{Fun}(X, R)^H$$

$$v = \sum_{x \in X} v_x e_x$$

$$g \cdot v = \sum v_{g \cdot x} e_x$$

$$\forall h \in H \quad \boxed{v_{x \cdot h} = \mathbb{F}(h) \cdot v_x}$$

$$v_x \in R$$

$$g \in G$$

$$\mathcal{H}_H^R \simeq R^{X/H}$$

$$\alpha \in (X/H)^g, \text{ ecm} \quad \boxed{\text{Trace } g = \sum \text{Trace}_R \text{Tr}(\phi_x(g))}$$

мыслим H действующим
 свободно

$$x \in X/H$$

$$e_{x,i} \quad i=1, \dots, \dim R$$

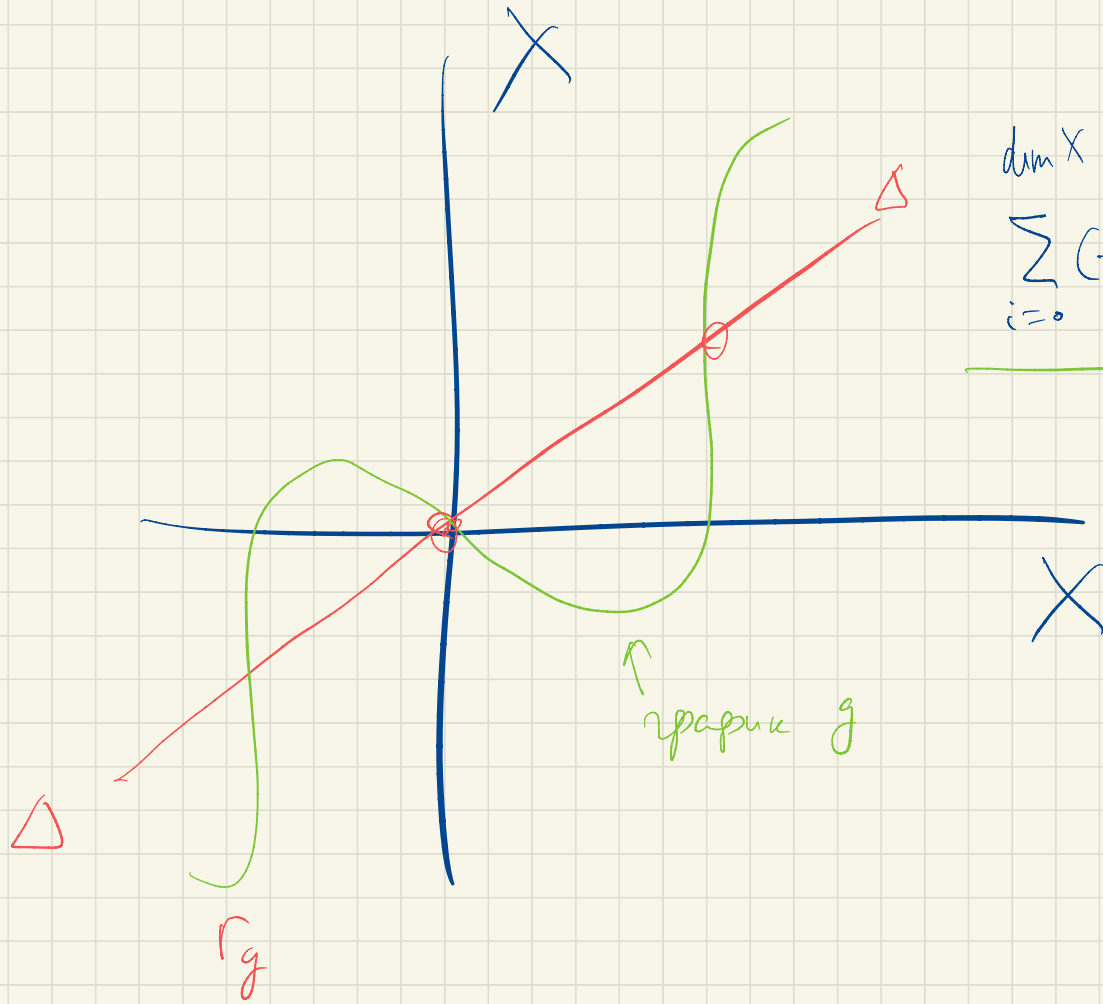
$$g \cdot x = x \cdot h_g$$

$$h_g \in H$$

$$h_g = \phi_x(g)$$

$$x \in (X/H)^g$$

$$x \text{ определяет гомоморфизм } G \rightarrow H$$



$$g: X \rightarrow X$$

Лифшец

$$\sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \operatorname{Tr}_{H_i} g_* = \sum_{x \in X^g} \pm 1$$

$$\frac{1}{\det_{T_x X} (1 - g)}$$

$$\Delta \subset X \times X$$

$$\Gamma_g \subset$$

G

конечная группа

R = представление G

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}_R g$$

$$= \dim(R^G)$$

компактная группа Ли

$$\int \frac{dg}{\text{vol}(G)} \text{Tr}_R g$$

$$= \sum_{g \text{ -fixed points on some space } X}$$

пространство физических состояний в теории с калибровочной группой G

local expressions

$$\int_G \frac{dg}{\text{Vol}(G)}$$

$$F(g)$$

$$F(h^{-1}gh) = F(g)$$

вычеты соответствуют неподвижным точкам на факторе

$$G \xrightarrow{\pi} G / \text{Ad}(G) = T/W$$

$$\frac{1}{|W|} \int$$

$d \cdot h \Delta(h)$

Vol (τ)

$F(h)$

$$\text{Vol}(\pi^k(h))$$

9
Folman
proband

$$\oint d\sigma_1 \dots d\sigma_r \vec{F}(\vec{e}^{\text{lok}})$$

$$h = e^{\sigma}$$

$$dh = d\sigma$$

$\sigma \in t$

Необходимое
только

$$\Delta(h) = \pi (h^{d/2} - h^{-d/2})$$

$\alpha \in \Delta_G$
корни

trigonometric
Vandermonde

вклад
духов
Фадеева-
Попова

$\mathcal{H} =$ пространство состояний N гармонических осцилляторов

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

$$i, j = 1, \dots, N$$

генераторы $\text{Lie } \text{SU}(N)$

$$a_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \sim \hbar \bar{z}_i$$

реализация в $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$

$$a_i^\dagger = z_i \cdot$$

$$T_{ij} = a_i a_j^\dagger$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ij} + T_{ji}, \quad i \leq j \\ T_{ij} - T_{ji}, \quad i < j \end{array} \right.$$

$$U(1): \hbar \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_i = iJ$$

калибрование симметрии

$$J = k$$

квантовый аналог

$$\sum_{i=1}^N |z_i|^2 = r, \quad r = \hbar \cdot k$$

эквивариантное обобщение

$$\dim H_k = \text{Tr}_{H_k} 1 \longrightarrow \text{Tr}_{H_k} g$$

$$g \in \text{SU}(N)$$

$$H_k \subset H$$

= представление SU(N)

$$\ker(J - k)$$

закон Гаусса = квантовая редукция

$$u = e^{i\varphi} \\ t_k(u) = e^{i\varphi J}$$

$$\dim H_k = \text{Tr}_{H_k} \delta(J - k)$$

$$\int_{|u|=1} \frac{1}{2\pi i} \frac{du}{u} \left(\text{Tr}_{H_k} T(u) \right) \left(\frac{1}{1 - e^{i\varphi}} \right)^N e^{i\varphi k}$$

Fourier

$$\text{Tr}_{H_k} e^{i\varphi J}$$

$$\text{Tr}_{H_k} \delta(J - k)$$

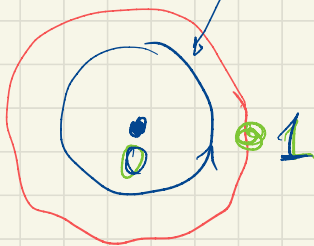
$\dim H_k$

$$= \oint \frac{du}{2\pi i u}$$

$$\frac{u^{-k}}{(1-u)^N}$$

$$= \int_{X=\mathbb{CP}^{n-1}} e^{c_1(Z)} Td_X$$

$$|u|=1$$



∞

разложить в ряд по u в 0

«КВАНТОВАНИЕ»

$$k = \frac{r}{h}$$

$$u = e^{i\sigma \cdot h}$$

$$\left(\frac{1}{h^N} \right)$$

$$\oint \frac{d\sigma}{2\pi}$$

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma^N} (e.s. e^{-i\sigma \cdot r})$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_k} g = \text{Tr}_x \frac{f(J-k)}{z_k} g =$$

$$g \approx \text{diag}(e^{i\mu_1}, \dots, e^{i\mu_N})$$

$$\text{Tr}_k(g) = \prod_{\alpha=1}^N e^{i\mu_\alpha} a_\alpha^\dagger a_\alpha$$

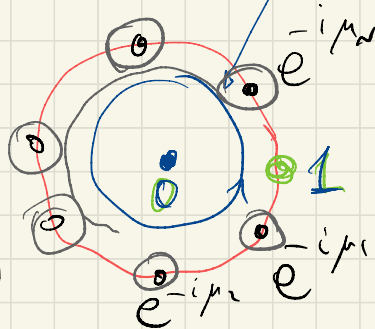
$$\exp i \sum_{\alpha=1}^N \mu_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha$$

$$g(u) \cdot f(z_1, z_N) = f(u e^{i\mu_1} z_1, \dots, u e^{i\mu_N} z_N)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{du}{u} \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{(1 - e^{i\mu_\alpha} u)} u^{-k}$$

$$\sum_{\alpha} \mu_\alpha = 0$$

$$|u| = 1$$



$$\mathcal{H}_k = \text{Sym}^k \mathbb{C}^N$$

2 группы симметрий

G

калибровочная

$(\sim U(1))$

$M_0 \subset M$ - G - калибровочная

$$X = M_0 / G$$

интеграл формулы

соединяет
 $e(M)$

$(-)$ в $\text{Lie } G$
 $\oint \text{do } (-)$
 $\text{Lie } G$

H

глобальная

$(\sim PSU(N))$

помогает получить простую формулу для интеграла по

$X \hookrightarrow H$
показывает H