Примеры

Поля, Ур-я, Симметрии

калибр.

глоб.

$$\mathbb{CP}^{N-1} = S^{2N-1}/U(1)$$

$\mathcal{M}$

$G = PSU(N)$

глобальная

пространство нелинейных полей

калибр. симметрия

$$= \mu^{-1}(r)/U(1)$$

$s \equiv \mu : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$

пр-во

линейных полей

$z^a, \quad \bar{z}^a \qquad a = 1, \ldots, N$

$\parallel$

$x^{2a-1} + i x^{2a}$

$\Longleftarrow$ поля

$x^m \qquad m = 1, \ldots, 2N$

$\delta x^m = \psi^m \Longleftrightarrow \delta z^a = \theta^a, \quad \delta \bar{z}^a = \bar{\theta}^a$

$\psi^{2a-1} + i \psi^{2a} = \theta^a, \quad \psi^{2a-1} - i \psi^{2a} = \bar{\theta}^a \quad U(N)$

$U(N)$ - эквив диффер форм на $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$

$$\left(\Omega^{\bullet}_{U(N)} (\mathbb{R}^{2N}), \delta \right)$$

$$\underline{\sigma \in \mathrm{Lie}\, U(N) \otimes \mathbb{C}}$$

$(\sigma_a{}^b)_{a,b=1,\ldots,N}$

$$\delta z^a = \theta^a, \quad \delta \bar z_a = \bar\theta_a$$

$$\delta \theta^a = \sigma^a{}_b z^b$$

$$\delta \bar\theta_a = - \sigma^b{}_a \bar z_b$$

$$\delta\sigma = 0$$

спускается до Фубини–Штуди ω_{FS} на $\mathbb{CP}^{N-1}$

$$\frac{1}{(N-1)!}\int_{\mathbb{CP}^{N-1}} \omega_{FS}^{N-1} = ?$$

$$\underline{\omega = \frac{1}{2i}\sum_{a=1}^{N} dz^a \wedge d\bar z_a} \longrightarrow \Omega = \sum_{a=1}^{N} \underset{\deg=1}{\theta^a}\,\underset{\deg=1}{\bar\theta_a} - \sum_{a,b=1}^{N} \underset{\deg=2}{\sigma^a{}_b}\, z^b \bar z_a + \underline{r\,\mathrm{Tr}\,\sigma}$$

$$\delta\Omega = 0$$

Ω – замкнутая эквивар. 2-форма на $\mathbb{C}^N$

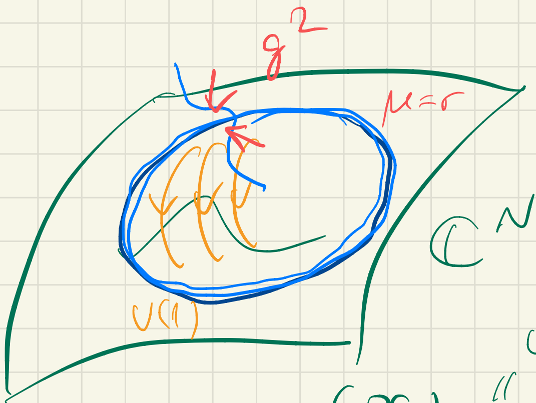
$$\Omega_0 = \delta(-\bar z\theta + \bar\theta z) = \theta\bar\theta - \bar z\sigma z$$

$\mathbb{C}P^{N-1}$

наложить уравнение $\mu = \sum_a z^a \bar{z}_a = r$

поделить по $U(1)$ симметрии

$$\boxed{\begin{aligned} z^a &\mapsto e^{i\varphi} z^a \\ \bar{z}_a &\mapsto e^{-i\varphi} \bar{z}_a \end{aligned}}$$



$\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}(x)\, dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_k}$

$\psi^{\mu_1} \quad \psi^{\mu_k}$

ноль вдоль $U(1)$ -орбит

Нужно избавиться от ψ вдоль $U(1)$ орбиты

Для уравнения нужен (X, h) – мультиплет

$$\delta X = h$$
$$\delta h = 0$$

уравнение $U(N)$-invariant

$$e^{\,i h(\mu - r) - \frac{1}{4} g^2 h^2 - i X \frac{\partial \mu}{\partial x} \varphi}$$

$$/\!/ \quad \delta\left(g_{mn} V_{\varphi}^{m} \varphi^{n}\right) \quad d\Phi\, d\eta$$

$$\int_{\mathbb{C}^N} \exp\, i\,\delta\left(X(\mu - r) - \frac{1}{4} g^2 X \cdot h \right) dX\, dh$$

$$dx\, d\varphi \underbrace{\Theta(x, \varphi, \sigma)}_{\mathrm{Lie}\,U(N) \otimes \mathbb{C}}$$

$$/\!/ \quad \exp(\Omega)$$

ограничит в когомологическом смысле на S^{2N-1} $(r > 0)$

$$\int_{d\phi/\mathrm{vol}\,U(1)} dz\,d\bar z\,d\theta\,d\bar\theta\; d\chi\, dh\; d\bar\phi\, d\eta\; e^{t(\theta\bar\theta - \bar z\sigma z) + i g_3 h(\mu - r) - \frac{g_1^2}{4}h^2} e^{-i g_3\chi(\bar z\theta + \bar\theta z)} e^{-(2i\bar\phi\theta\bar\theta - \phi\bar\phi\,\bar z z)} e^{-i\eta(\bar z\theta - \bar\theta z)) g_2} = 0$$

$$\neq e^{-S}$$

$(-1)^F$

$\bar\theta \to -\bar\theta$

$\theta \to -\theta$

$\chi \to -\chi$

$\eta \to -\eta$

$g^2 \to 0$

← неправильно интегрируем вдоль орбит $U(1)$

$$\int e^{\omega_{FS} - \mu(\tilde\sigma)}$$

$\mathbb{CP}^{N-1}$

$$V(\bar\phi) = i\bar\phi\left(z^a\frac{\partial}{\partial z^a} - \bar z_a\frac{\partial}{\partial \bar z_a}\right)$$

g - связка

$$\int d\chi\,\chi = 1$$

$\mu : \mathbb{CP}^{N-1} \to \mathrm{Lie}\,SU(N)^*$

$$\boxed{\tilde\sigma = \sigma - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,\sigma\cdot 1}$$

$$(\bar z\theta + \bar\theta z)$$

$$\int d\theta^1 \ldots d\theta^N\, d\bar\theta_1 \ldots d\bar\theta_N \quad \theta^N \ldots \bar\theta_1 \ldots \bar\theta_N$$

Еще один мультиплет

$(\bar{\phi}, \eta)$

фермион

$\bar{\phi} \in \mathrm{Lie}\, U(1) \otimes \mathbb{C}$

$\phi = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, \sigma$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta \bar{\phi} &= \eta \\ \delta \eta &= [\phi, \bar{\phi}] \end{aligned}}$$

дух Фаддеева-Попова для фермионной части калибр. групп

абелева симметрия

$$d c\, d\phi \to \frac{d\phi}{\mathrm{Vol}\, G}$$

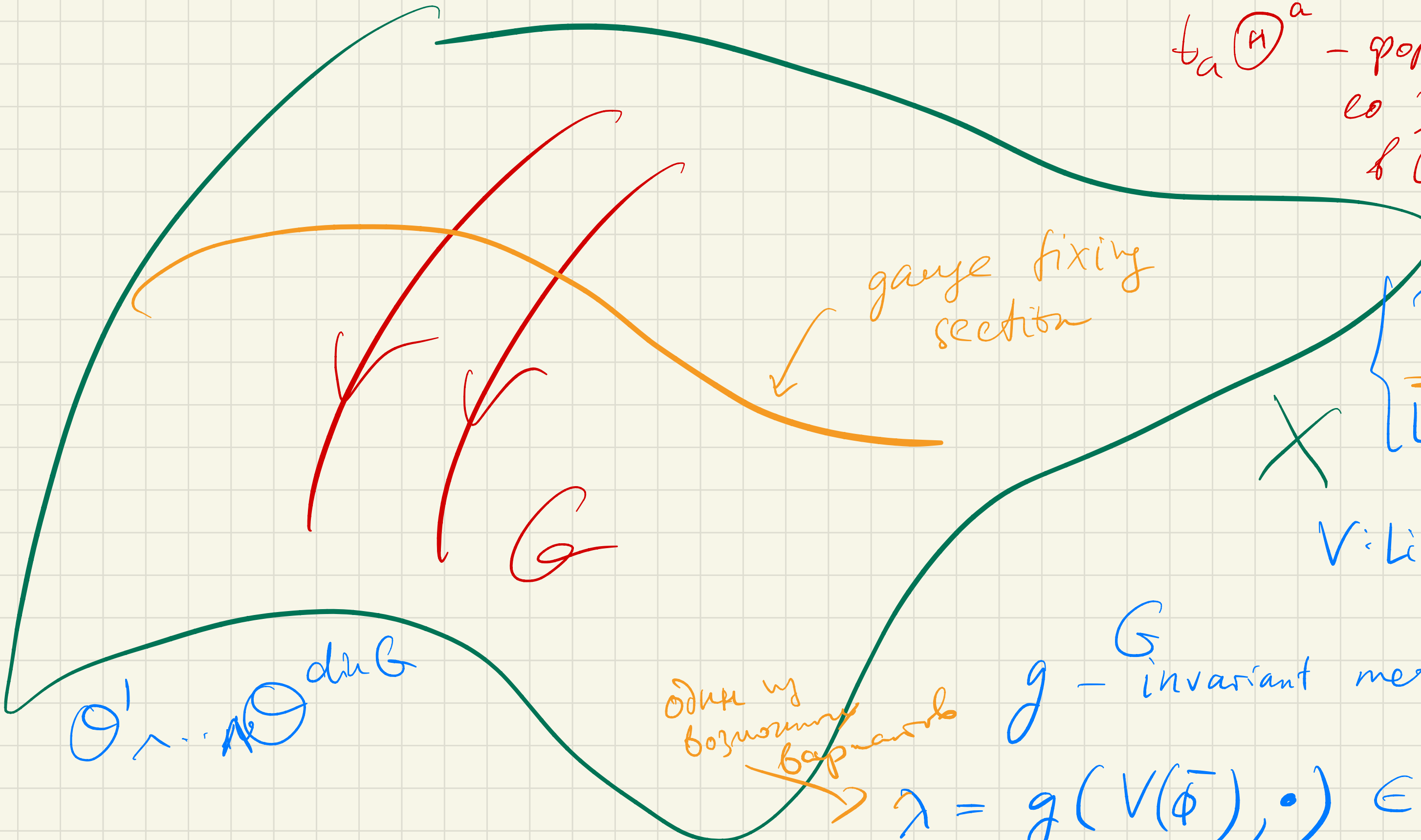
$$d\bar{c}\, d\lambda\, e^{i\delta(\ldots)_{BRST}}$$

$$\begin{cases} \delta c = 0 \\ \delta \bar{c} = \lambda \end{cases}$$

обычное семейство духов

Лагр. множитель для бозонной фиксации калибр.

$t_a \Theta^a$ — форма на X со значением в Lie G



$$\begin{cases} \iota_{v_b}\Theta^a = \delta^a_b \\ \mathrm{Lie}_{v_b}\Theta^a = 0 \end{cases}$$

$V: \mathrm{Lie}\,G \to \mathrm{Vect}(X)$

$\Theta^1 \wedge \dots \wedge \Theta^{\dim G}$

g — G-invariant metric on X

один из возможных вариантов $\to$ $\lambda = g(V(\bar\phi), \cdot) \in \Omega^1(X)$

$$\delta\lambda = g(\underbrace{V(\eta)}_{\eta_a \Theta^a}, \psi) + \underline{g(V(\bar\Phi), V(\Phi))} + dg(V(\bar\Phi), \psi)\psi$$

Интеграл сложный

$$\int dz\,d\bar z\,d\theta\,d\bar\theta\;\exp\left(\theta\bar\theta-\bar z\tilde{\theta} z\right)\;\to\;\phi\,\bar z z$$

$d\theta\,d\bar\theta\,\cancel{d\eta}\,\cancel{d\chi}\,dh$ $\quad e^{ih(\mu-r)}$ $\quad(\bar z\theta+\bar\theta z)'\cdot(\bar z\theta-\bar\theta z)$

$$\boxed{(\bar z_a\theta^a)''(\bar\theta_b z^b)}$$

$g_1\to 0$ $\quad e^{\bar\phi\,\theta^a\bar\theta_a}$

$e^{-\phi\bar\phi}$

случайно

$g_{mn}V^m(\phi)V^n(\bar\phi)$

вообще

Трюк Можно отинтегрировать квартет $(\chi, h, \bar\phi, \eta)$

$$S \longrightarrow S + i g_4 \delta(\bar\phi \chi) \qquad \bar\phi^a \chi^a$$

$$= S + i g_4 (\bar\phi h + \eta \chi)$$

либо $\bar\phi^* = h$.

$g_4 \to \infty$ $\quad \bar\phi = h = 0, \ \eta = \chi = 0$ (при аккуратной деформации контура ϕ)

$$-S \to -S_0 = \theta\bar\theta - \bar z(\tilde\sigma + \phi \cdot 1) z - \phi r$$

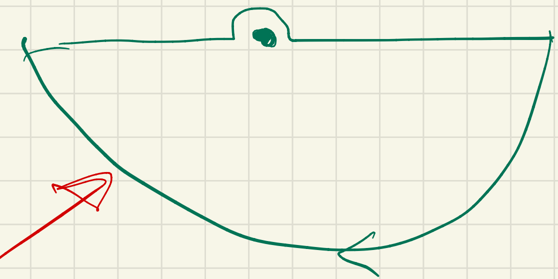
$$\int d\theta d\bar\theta dz d\bar z \, d\phi \; e^{-S_0} = \int \frac{d\phi}{\det(\tilde\sigma + \phi \cdot 1_N)} e^{+ir\phi}$$

$\mathbb{R} \to$ обходить полюса знаменателя

$$\tilde{\sigma} = 0$$

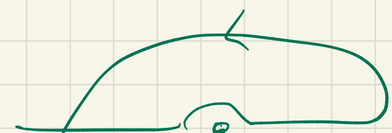
$r > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi \, e^{-ir\phi}}{(\phi + i0)^N}$$



$$\frac{r^{N-1}}{(N-1)!}$$

$r < 0$



$\bar{z} z = r$

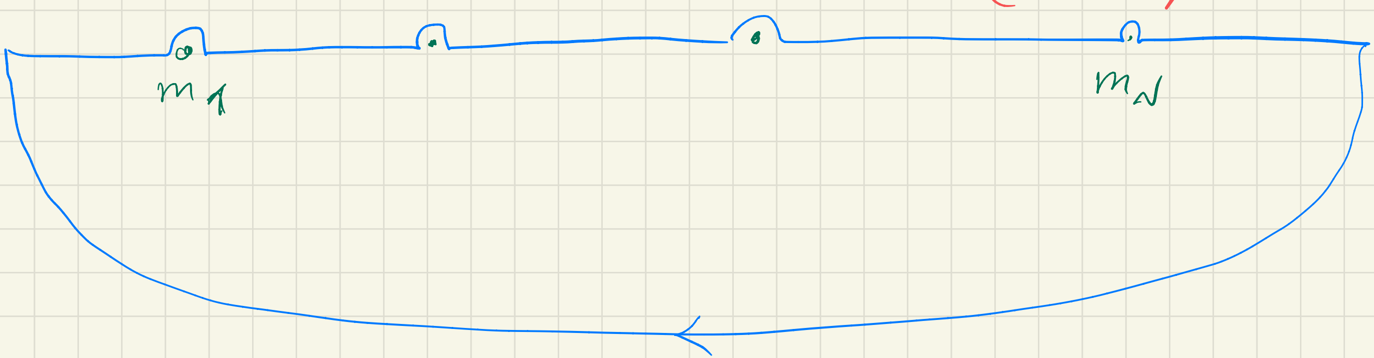
не имеет решений $= 0$

$$\tilde{\sigma} = \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_N) \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i = 0$$

$$\int \frac{d\phi \quad e^{-ir\phi}}{\prod_{i=1}^{N} (m_i + \phi_{+i0})} = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{+irm_k}}{\prod_{i \neq k} (m_i - m_k)} \qquad r>0$$

$$= \int_{\mathbb{CP}^{N-1}} \exp(\omega_{FS} - \mu(\tilde{\sigma}))$$

Gaussian in "z" $(z=0)$



$$\mathbb{CP}^{N-1} = \{ (z_1 : z_2 : \dots : z_N) \mid z_i \in \mathbb{C},\ \text{одновр.}\ \neq 0 \}$$

Fixed points

$$(0:0:\dots:1:0:\dots:0)$$

k

$k=1,\dots,N$

$$PGL(N) \qquad z^a \longrightarrow g^a{}_b z^b$$

$$\cup \qquad \text{Тор}\quad g = \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_N})$$

$$PSU(N) \qquad g g^\dagger = 1 \qquad g \sim g e^{i\varphi}$$

$$\parallel$$

$$SU(N)/\mathbb{Z}_N$$

$$\mu : \mathbb{CP}^{N-1} \longrightarrow \mathrm{Lie}\,SU(N)^*$$

сохраняет ω_{FS}

$$\mu(z_1 : \dots : z_N) = \left\| z^a \bar z_b - \frac{1}{N} r \cdot \delta^a{}_b \right\|_{a,b=1}^{N}$$

$$\longrightarrow \sum_{a=1}^{N} z^a \bar z_a = r$$

$$\omega_{FS} + \mu(\tilde\sigma) =$$

$$= \omega_{FS} + \sum_{a,b} \underline{z^a \bar z_b \tilde\sigma^b{}_a}$$

$\sum z^a \bar z_a = r$

$z^1 = \dots = z^{k-1} = z^{k+1} = \dots = z^r = 0$

$|z^k|^2 = r$

$\tilde\sigma^a{}_a = 0$

$$Z(\tilde\sigma) = \int_{\mathbb{CP}^{r-1}} e^{\omega_{FS} + \mu(\tilde\sigma) + \delta\left(g_{FS}\left(\underline{V(\tilde\sigma^*), \cdot}\right)\right)}$$

деформирует

параметр, как g_i

vector field, generating PSU(N) действие на $\mathbb{CP}^{r-1}$

$\tilde\sigma^* \in \mathrm{Lie}\, PSU(N)$

$[\tilde\sigma, \tilde\sigma^*] = 0$

$$\tilde\sigma^* \to g_5 \tilde\sigma^* \qquad g_5 \to \infty$$

$$\int e^{\omega_{FS} + i\mu(\tilde\sigma)} \; \underbrace{e^{-g_5 \| V(\tilde\sigma^*)\|^2}}_{} + 2\text{-form}$$

Концентрирует меру около $V(\tilde\sigma^*) = 0$

т.е. неподвижных точек действия макс. тора глобальной симметрии

$$// \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{irm_k}}{\prod_{i\neq k}(m_i - m_k)}$$

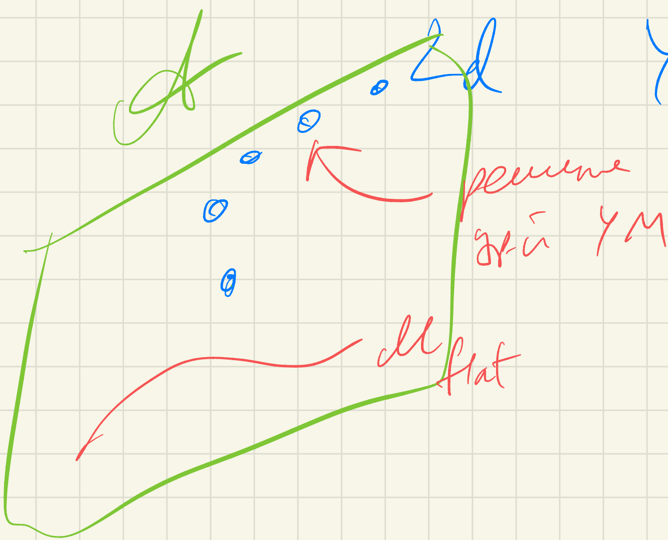
откуда это?

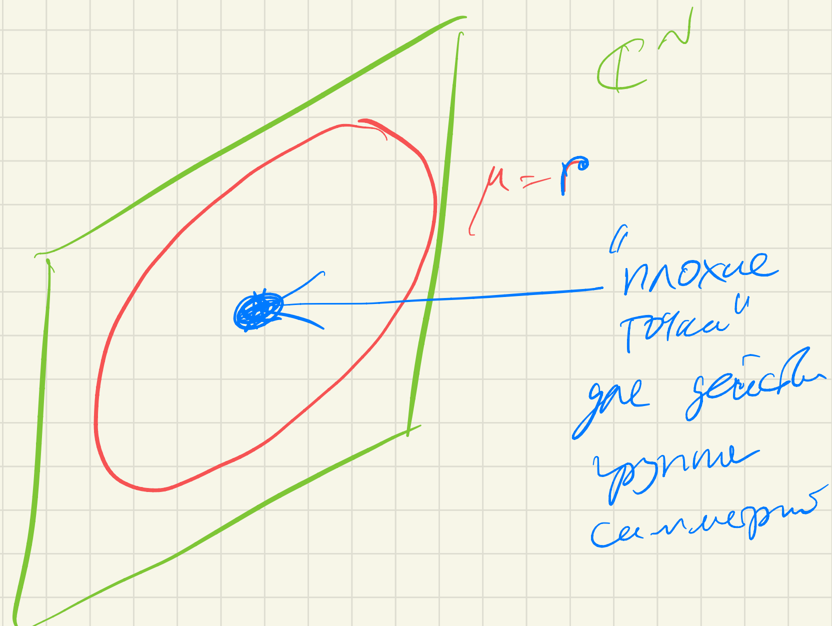
$$[\tilde\sigma, \tilde\sigma^*] = 0$$

$$\mu(\tilde\sigma)\big|_k = r \cdot \tilde\sigma^k{}_k \qquad \tilde\sigma^k{}_k = m_k$$

Кватерный трюк (есть поправка)

$\mathcal{N}=2$ $d=2$ super Yang-Mills $\longleftrightarrow$





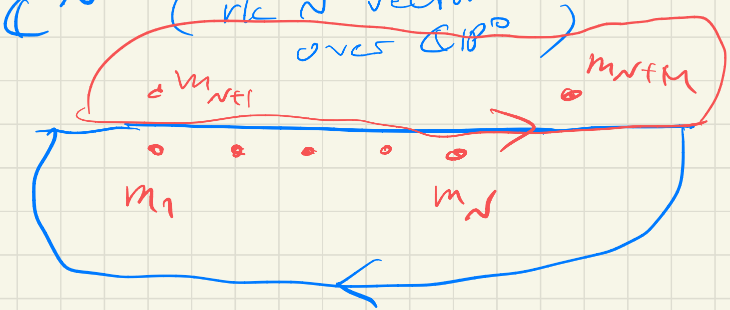
Более интересный пример

$\mathbb{C}^{N+M}$ $\qquad$ $G = \dfrac{U(N)\times U(1)}{U(1)}$

$U(1)$ $\qquad$ $\overbrace{+\,+\,+}^{N}$ $\quad$ $\overbrace{-1\ -1\ \dots}^{M}$

$$\sum_{a=1}^{N} z^a \bar z_a - \sum_{b=1}^{M} z^{N+b} \bar z_{N+b} = r$$

$r<0$ $\quad \simeq \mathbb{C}^N$ (r/c N vector bundle over $\mathbb{CP}^0$)



$\mathcal{M} = \oplus\, \mathcal{O}(-1)$ над $\mathbb{CP}^{N-1}$

$r>0$

$\mathcal{M}'$ — нулевое сечение $\mathcal{M}$