Задачи по курсу "Колчанные многообразия в математической физике"

Пусть $V = \mathbb{C}^k$ и $W = \mathbb{C}^n$.

Задача 1. Рассмотрим множество матриц пар матриц $I\colon W \to V$ и $J\colon V \to W$, удовлетворяющие условию $IJ = 0$ (*зануление отображения моментов* $\mu(I,J) = IJ$). Более того потребуем, чтобы $\operatorname{Im} I = V$ (*условие стабильности*), обозначим получившееся множество за $\mu^{-1}(0)^{ss}$. Наконец, рассмотрим фактор $X(k,n) = \mu^{-1}(0)^{ss}/GL(V)$. Докажите, что мы получили кокасательное расслоение к грассманиану $T^*Gr(n-k,n)$.

Задача 2 (*)**.** Пусть $n = \dim W = 1$. Рассмотрим множество матриц (B_1, B_2, I, J)

$$I\colon W \to V \quad J\colon V \to W \quad B_1, B_2\colon V \to V \tag{1}$$

удовлетворяющих условию $[B_1, B_2] + IJ = 0$. Более того, потребуем, чтобы всевозможные вектора $B_{\alpha_1} \dots B_{\alpha_k} I(1)$ порождали всё V. Докажите, что $J = 0$.

Указание. Достаточно доказать, что $JB_{\alpha_1} \dots B_{\alpha_k} I = 0$. Это можно сделать индукцией по k. Вычисление довольно техническое... можно пропустить или подсмотреть в книге Накаджимы ‘Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces’, Lemma 2.8.

Напомним, что *схема Гильберта k точек на $\mathbb{C}^2$* $Hilb_k(\mathbb{C}^2)$ есть множество всевозможным идеалов $\mathfrak{J} \subset \mathbb{C}[x,y]$ таких, что $\dim \mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{J} = k$.

Задача 3. Рассмотрим описанное в задаче 2 множество, обозначим его за $\mu^{-1}(0)^{ss}$. Покажите, что соответствующее многообразие Накаджимы $\mu^{-1}(0)^{ss}/GL(V)$ изморфно $Hilb_k(\mathbb{C}^2)$.

Напомним, что в лекциях рассматривалось действие тора $\mathbf{A} = (\mathbb{C}^*)^n$ приходящее из тавтологического действия $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright \mathbb{C}^n = W$. Также на $Hilb_k(\mathbb{C}^2)$ есть действие $(\mathbb{C}^*)^2$ индуцированное с действия на плоскости $\mathbb{C}^2$.

Задача 4. Найдите неподвижные в терминах матриц и в инвариатных терминах для **a)** $\mathbf{A} \curvearrowright T^*Gr(k,n)$ **b)** $(\mathbb{C}^*)^2 \curvearrowright Hilb_k(\mathbb{C}^2)$

Задача 5. Рассмотрим подтор $\mathbb{C}^* \subset (\mathbb{C}^*)^2 \curvearrowright Hilb_k(\mathbb{C}^2)$ заданный формулой (q, q^{-1}). Докажите, что неподвижные точки этого подтора и всего тора $(\mathbb{C}^*)^2$ совпадают.

Перед решением следующей задачи советуем освежить определение колчанного многообразия из лекции.

Задача 6. Выберем некоторое разложение $W_i = W_i^{(1)} \oplus W_i^{(2)}$ для всех i. Рассмотрим $\mathbb{C}^* \subset \mathbf{A}$, которое однородно растягивает $W_i^{(1)}$ и действует тождественно на $W_i^{(2)}$. Покажите, что неподвижные точки этого $\mathbb{C}^*$ это $\coprod_{\mathbf{v}=\mathbf{v}^{(1)}+\mathbf{v}^{(2)}} X(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}) \times X(\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)})$. Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)}$ — вектора размерностей пространств V_i, $W_i^{(1)}$, $W_i^{(2)}$.

Линейный колчан (или колчан A_n) состоит из вершин $\{a_1, \dots a_n\}$ с рёбрами $a_i \to a_{i+1}$.

Задача 7. Вычислите размерность колчанного многообразия для колчана A_n с векторами размерностей $(v_1, \dots, v_n)$ и $(w_1, \dots, w_n)$.

Указание. Условие стабильности гарантирует, что действие группы $\prod_i GL(V_i)$ свободно. Благодаря этому мы легко можем вычислить размерность фактора.

Задача 8. Пусть $w_i = 1$ и $w_j = 0$ для всех $j \neq i$. Докажите, что соответвующее многообразие Накаждимы непусто тогда и только тогда, 'когда v_i образуют диаграмму Юнга, повёрнутую на 45 градусов' (см. лекцию). Также покажите, что если многообразие соответствующее многообразие Накаджимы непусто, то оно нульмерно.

Указание. Вычислите соответствующие размерности по формуле из задачи

Задача 9. Вычислите размерность многообразия Накаджимы для линейного колчана с v_i равными $\{1, \dots, k-1, k, k, \dots, k, k, k-1, k-2, \dots, 1\}$ и $w_k = w_{n-k+1} = 1$ и прочие $w_j = 0$.

Задача 10. Докажите, что количество неподвиных точек в объединении A_n многообразий Накаджимы $\coprod_{\mathbf{v}} X(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ равно размнерности вектрного пространства

$$\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)^{w_1} \otimes \left(\Lambda^2 \mathbb{C}^{n+1}\right)^{w_2} \otimes \dots \otimes \left(\Lambda^n \mathbb{C}^{n+1}\right)^{w_n} \tag{2}$$