Семинар по лекциям А. Смирнова

Задача 1 $\quad \ker I \hookrightarrow W \xrightarrow{I} V$

$\ker I = \mathcal{U}$

$IJ = 0 \qquad J \in \mathrm{Hom}(V, \mathcal{U}) = \mathrm{Hom}(W/\mathcal{U}, \mathcal{U}) = T^* Gr(n-k, n)$

Утв $\quad T_{\mathcal{U}} Gr(n-k, n) = \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, W/\mathcal{U})$ -

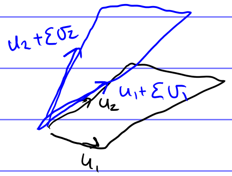
Пояснение $\quad \mathcal{U} = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_{n-k})$

(Деформация $\mathcal{U}) = \mathrm{span}(u_1 + \varepsilon v_1, \dots, u_{n-k} + \varepsilon v_{n-k})$

$v_i \in W$; деф. зависит только от

$[v_i] \in W/\mathcal{U} \qquad (u_i + \varepsilon v_i) + \sum c_k \varepsilon (u_k + \varepsilon v_k)$

$\simeq u_i + \varepsilon (v_i + \sum c_k u_k)$



$A : \mathcal{U} \to W/\mathcal{U}$

$A(u_i) = [v_i]$

Задача 3 $\quad \mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\varphi} V = \mathbb{C}^k$

$\varphi(f(x,y)) = f(B_1, B_2)\, I(1)$

$J = \ker \varphi$

$(B_1, B_2, I, J=0) \longmapsto J \subset \mathbb{C}[x,y]$

$I(1) \in V = \mathbb{C}[x,y]/J \ni 1$

$B_1 \circlearrowright V \circlearrowleft B_2$, $\quad x \circlearrowright,\ y \circlearrowright$

Задача 4 б) найти неп. точки $(\mathbb{C}^*)^2 \curvearrowright \mathrm{Hilb}_k(\mathbb{C}^2)$

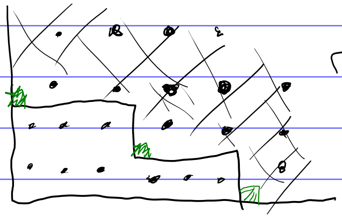
$J \subset \mathbb{C}[x,y]$

$f(x,y) = \sum f_{ij} x^i y^j \in J$

Все мономы $x^i y^j$ для $f_{ij} \neq 0$ лежат в J

$f(x,y) \mapsto f(q_1 x, q_2 y) \in J$

$x^i y^j = \sum c_i f(q_1^{(i)} x, q_2^{(i)} y)$



$\exists$ натянут на $x^i y^j$ для (i,j) вне диаграммы Юнга

Второй способ: опр. действ. $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$

$$(q_1, q_2)(\underset{\mu^{-1}(0)^{ss}}{B_1, B_2, I, J}) = (q_1 B_1, q_2 B_2, I, q_1 q_2 J) \in \mu^{-1}(0)^{ss}$$

$\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ найдётся $\varphi \in GL(V)$

$$(B_1, B_2, I, J) = (q_1 \varphi B_1 \varphi^{-1}, q_2 \varphi B_2 \varphi^{-1}, \varphi I, q_1 q_2 J \varphi^{-1})$$

Нап. $X(V,1) = \mu^{-1}(0)^{ss} / GL(V)$

$$B_1 \circlearrowright V \circlearrowleft B_2, \quad I: W \to V, \quad J: V \to W$$

Утв Условие стабильности $\Rightarrow$ $GL(V)$ – свобод. умор на $\mu^{-1}(0)^{ss}$

$\varphi = \varphi(q_1, q_2)$ – однозначно определён

Утв $\varphi: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to GL(V)$ гомом. групп Ли

$$(q_1, q_2) \mapsto \varphi(q_1, q_2)$$

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \circlearrowright V = \bigoplus \mathbb{C} e_{ij}$$

$$(q_1, q_2) e_{ij} = q_1^i q_2^j e_{ij}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 \; I(1) & \longrightarrow & q_1 B_1 I(1) & \longrightarrow & q_1^2 B_1^2 I(1) \\ \downarrow & & & & \\ q_2 B_2 I(1) & & & & \end{array}$$

На вектор $B_1^i B_2^j I(1)$ тор дейст. с весом $q_1^i q_2^j$

Поэтому если вектора $B_1^i B_2^j I(1) \neq 0$, то они линейно независимы

Задача 5

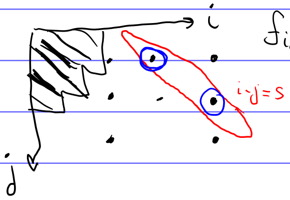
$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathrm{Hilb}_n(\mathbb{C}^2)$$

$$q \longmapsto (q, q^{-1})$$

инв. идеал

$$f(x,y) \in \mathcal{J} \qquad f(x,y) = \sum f_{ij}\, x^i y^j$$

$$\Rightarrow \sum_{i-j=s} f_{ij}\, x^i y^j \in \mathcal{J}$$



$$f_{i_0 j_0}\, x^{i_0} y^{j_0} (1 + c_1 xy + c_2 x^2y^2 + \dots) \in \mathcal{J}$$

$$B_1^{i_0} B_2^{j_0} \underbrace{(1 + c_1 B_1 B_2 + c_2 (B_1 B_2)^2 + \dots)}_{\text{обратимая матрица}} I(1)$$

$$\overset{(1)}{\Downarrow}$$

$$B_1^{i_0} B_2^{j_0} I(1) = 0$$

Задача 6

$$W_i = W_i^{(1)} \oplus W_i^{(2)}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & & & & & \\ & a & & & & \\ & & \ddots\, a & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

$W_i^{(1)}$ $\qquad$ $W_i^{(2)}$

Факт усл. стабильн. $\Rightarrow$ $GL(V)$ действ. свободн.

$$\varphi: \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(V)$$

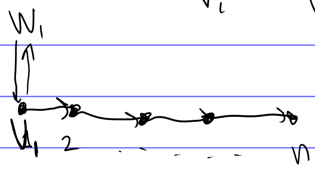
$$\varphi(a).\ a(B_\bullet, I_\bullet, J_\bullet) = (B_\bullet, I_\bullet, J_\bullet)$$

$$\varphi(a)\, I_\bullet\, A^{-1} = I_\bullet \qquad \varphi(a)\, B_\bullet\, \varphi(a)^{-1} = B_\bullet$$

$$A\, J_\bullet\, \varphi(a)^{-1} = J_\bullet$$

$$\varphi(a) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & & & & & \\ & a & & & & \\ & & a\ \ddots & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

$V_i^{(1)}$ $\qquad$ $V_i^{(2)}$

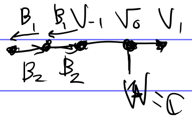


Задача 7 $\mathrm{Hom}(V_i, V_{i+1}) \oplus \mathrm{Hom}(V_{i+1}, V_i) \oplus$

$$\oplus \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \oplus \mathrm{Hom}(W_i, V_i)$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1} + 2\sum v_i w_i - 2\sum v_i^2$$

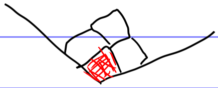
Задача 8 $\mathrm{Hilb}_k(\mathbb{C}^2)^{\mathbb{C}^*}_{\ni [\lambda]} = \bigsqcup$ мн-зия мак. типа A_n



$\varphi : \mathbb{C}^* \to GL(V)$

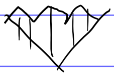
$V = \oplus V_i \leftarrow$ колич. данные для A_n

$M(v, \delta_i)$ — одна точка



1 2 1

$\left\{ \begin{array}{c} \text{Диагр. Юнга} \\ \text{из } k \text{ клеточах} \end{array} \right\} = \bigsqcup$ мн-зия мак. типа A_∞ т.ч. $\sum v_i = k$

 $\longleftrightarrow \{\dots v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\}$