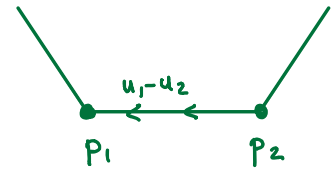
Лекция 5:

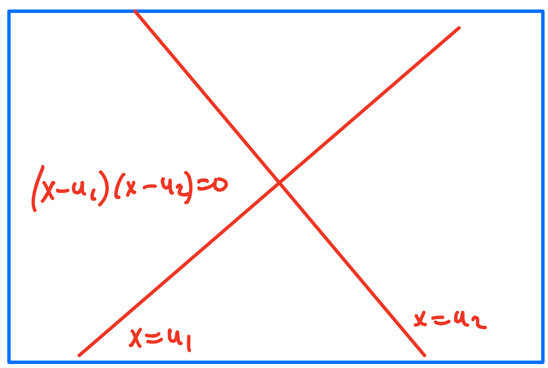
- Эквивар. эллиптические когомологии
- Эллиптические стабильные оболочки
- 3D-зеркальная симметрия
- K-теорные пределы элл. оболочек
- Предел в стенку и следствия
- Гипотеза Горского–Негута.

Напомним что для $T^*\mathbb{P}^1 =$ 

$\simeq$ 

$H_T(T^*\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}[x, u_1, u_2, \hbar] / (x-u_1)(x-u_2)$

$H_T(T^*\mathbb{P}^1) =$ функции на $\mathrm{Spec}\left(H_T(T^*\mathbb{P}^1)\right)$



$\mathbb{C}^4$ – четырехмерное пространство с координатами $x, u_1, u_2\ \hbar$

Пусть $O_{p_1} = O_{p_2} = \mathbb{C}^3$ с координатами $u_1\ u_2\ \hbar$

Тогда $\mathrm{Spec}\left(H_T(T^*\mathbb{P}^1)\right) = O_{p_1} \cup O_{p_2}$

склейка по гиперплоскости $u_1 = u_2$

Функция на $O_{p_1} \cup O_{p_2} \iff f = (f_1, f_2)$

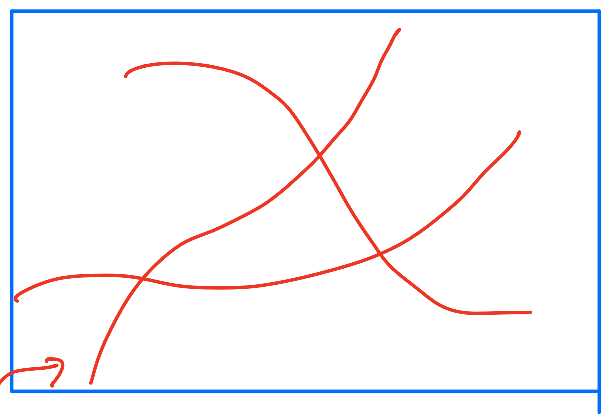
такие что $f_1\big|_{O_{p_1} \cap O_{p_2}} = f_2\big|_{O_{p_1} \cap O_{p_2}}$

Пример:

$\mathrm{Stab}_{C_1}(p_2) = (x-u_2+\hbar) \rightsquigarrow \left[(u_1-u_2+\hbar),\ \hbar\right]$

В общей ситуации: $H_T(X) = \dfrac{\mathbb{C}[x_1, \dots a_i \dots t_n]^{sym}}{I}$

Spec:



пространство всех $x_1 \dots X,\ a_i \dots t_n$

для каждой неподвижной точки

$O_p = \mathbb{C}_{a_1} \times \mathbb{C}_{a_2} \times \dots \mathbb{C}_{a_n} \times \mathbb{C}_{t_n}$ заданный уравнениями

$$x_i = x_i|_p$$

$$\mathrm{Spec}(H_T(X)) = \bigcup_{p \in X^T} O_p \Big/ \Delta$$

условия склейки из топологии X.

Классы из $H_T(X) = (f_1 \dots f_{|X^T|})$

согласованы на $O_{p_i} \cap O_{p_j}$

Эквивариантные эллиптические когомологии:

Зафиксируем $q \in \mathbb{C}^\times$ и эллипт. кривую $E = \mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}$;

Определим:

$$Ell_T(pt) = T / q^{\mathrm{cochar}(T)} \simeq E^{\dim(T)}$$

т.е. $Ell_T(pt) = E_{a_1} \times E_{a_2} \times \dots \times E_{a_n}$

теперь эквивариантные параметры будут координатами на элл. кривых.

Определение:

Эллиптические эквивариантные когомологии X (в предположении что X^T - конечно) есть схема

$$Ell_T(X) = \coprod_{p \in X^T} \mathcal{O}_p \Big/ \Delta$$

склейка такая-же как для $\mathrm{Spec}(H_T(X))$

$\mathcal{O}_p \simeq Ell_T(pt)$

" $Ell_T(X) =$  "

Определение: Эллиптический класс

$$f = (f_{p_1}, f_{p_2}, \ldots\ldots)$$

f_{p_i} = сечение линейного расслоения над O_{p_i}. которые согласованы на склейках

$$f_{p_i}\big|_{O_{p_i}\cap O_{p_j}} = f_{p_j}\big|_{O_{p_i}\cap O_{p_j}}$$

Определение:

Расширение элл. когомологии

$$E_T(X) = Ell_T(X) \times E^{\mathrm{rank}(Pic)}$$

для конечных многообразий

$$E^{\mathrm{rank}(Pic)} = E_{z_1} \times \ldots \times E_{z_m}$$

для каждой вершины в

Иными словами

$$E_T(X) = \coprod_{p\in X^T} \widehat{O}_p \,/\, \Delta$$

$$O_p = E_{a_1} \times E_{a_2} \times \ldots E_{a_l} \times E_{\hbar} \times E_{z_1} \ldots \times E_{z_m}.$$

Теор: Для общего $\sigma \in \mathrm{cochar}(A)$ и $p \in X^T$ существует единственный класс $\mathrm{Stab}_\sigma(p)$ в эллипт. когомологиях удовлетворяющий условиям:

(1) $\mathrm{Supp}\left(\mathrm{Stab}_\sigma(p)\right) \subset \mathrm{Attr}_\sigma^{+}(p)$

(2)

$$\mathrm{Stab}_\sigma(p)\big|_p = (-1)^{\varepsilon_-} e(N_p^-) = \prod_{w \in N_p^+} \theta(w)$$

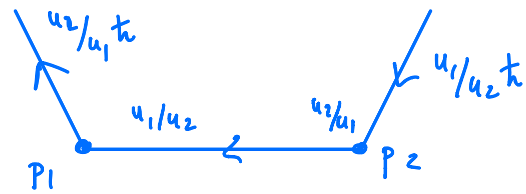
$$\theta(x) = \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right) \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i x)(1-q^i/x)$$

(3) Квазипериодн $f(\dots u q \dots) = ?\, f(\dots u \dots)$

для $\mathrm{Stab}_\sigma(p)\big|_{\hat{O}_q}$

по всем переменным.

Пример:



$$T_{ij} = \mathrm{Stab}(p_i)\big|_{q_j} = \begin{pmatrix} \theta(u)\,\theta(z\hbar), & 0 \\ \theta(\hbar)\,\theta(uz), & \theta(u\hbar)\,\theta(z) \end{pmatrix}$$

$$u = u_2/u_1 = 1$$

заметим что columns согласовашп на $u=1$

Трехмерная зеркальная симметрия для Stab:

Заметим что строки матрицу T_{ij} тоже согласовашп в $z=1$:

$$\begin{pmatrix} \theta(u)\,\theta(z\hbar), & 0 \\ \theta(\hbar)\,\theta(uz), & \theta(u\hbar)\,\theta(z) \end{pmatrix}$$

равны при $z=1$

Более того есть симметрия $z \leftrightarrow u$:

$$\begin{pmatrix} \theta(u)\,\theta(z\hbar), & 0 \\ \theta(\hbar)\,\theta(uz), & \theta(u\hbar)\,\theta(z) \end{pmatrix}$$

и $z \to u$, $u \to z$.

Хотим про это думать так:

$X \simeq T^*\mathbb{P}^1$; $X^! \simeq T^*\mathbb{P}^1$

u = экв. парам A

z = келерь параметр на $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{C}^\times = K$

z = эквивар. парам на торе $A^!$

u = келерь парам на $\mathrm{Pic}(X^!) \otimes \mathbb{C}^\times = K^!$

$$T^X_{ij} = T^{X^!}_{ij}$$

после некоторого отождествления непобв. точек.

"Определение:"

Мы скажем что $X^!$ есть "3D-mirror" X если:

(1) Существует изом:

$$\varkappa : A \to K^! \ ; \ K \to A^!$$

(2) Существует биекция

$$b : X^A \xrightarrow{\sim} (X^!)^{A^!}$$

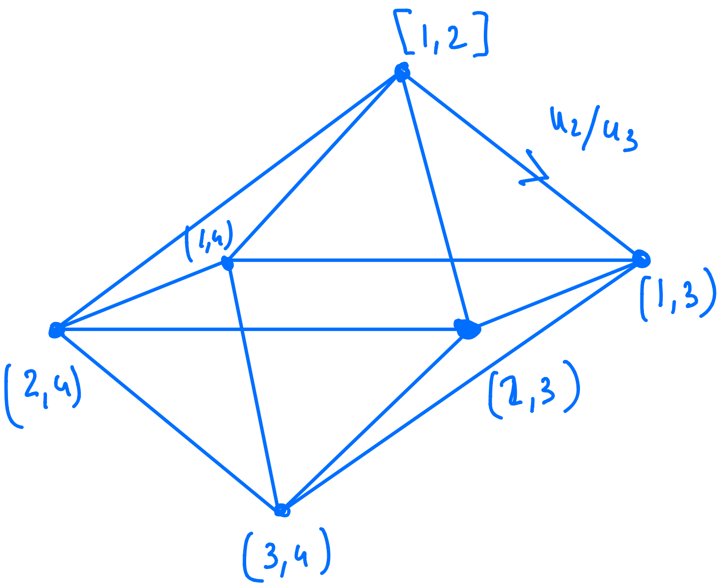
(3) $$T_{ij} = \varkappa^*\left(T_{b(j)\,b(i)}\right)$$

Пример:

$$X = \underset{\square\ 4}{\overset{\bigcirc\ 2}{|}} = T^*Gr(2,4) \qquad X^A = \{(i,j) \subset (1,2,3,4)\}$$

$$A = (u_1/u_2,\ u_2/u_3,\ u_3/u_4)$$

$$K = (\mathbb{Z})$$



$$T_{ij} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * \\ & 0 & & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

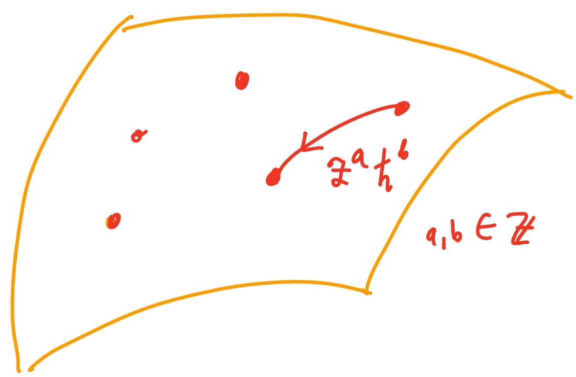
$u_i/u_j = 1$

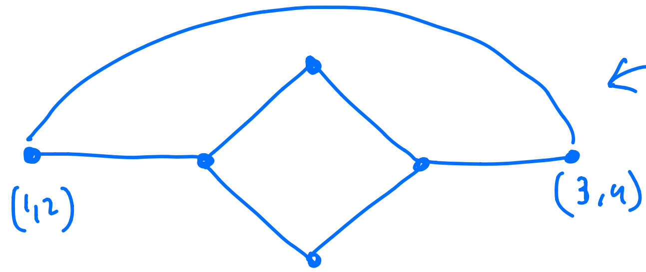
На дуальной стороне $X^!$
мы ожидаем

$$Pic(X^!) \otimes \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^3$$

$$A^! \simeq \mathbb{C}^\times \ni z$$

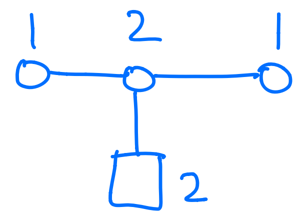
$$|(X^!)^{A^!}| = 6$$





из эк-параметра получим такую картинку

Эквивар. структура колчанного многообразия

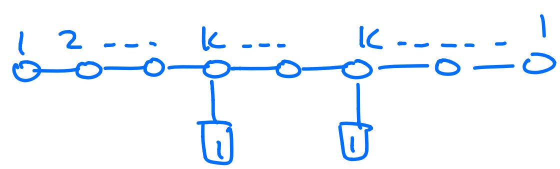


$= X^!$

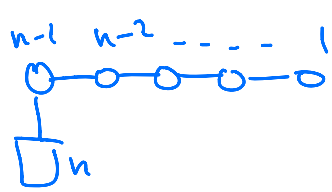
В каких случаях мы знаем $X^!$?

(1) RSVZ 1:

$X =$ 

$\rightsquigarrow X^! =$ 

(2) RSVZ2:

$X =$ 

$= T^*(\text{Full Flags})$

$$X^! \simeq X \quad \text{- self-dual.}$$

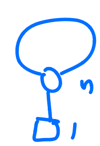
(3) RW: $T^*(G/B) = T^*(G^L/B^L)$

Langlands dual group.

(3) Hypertoric varieties SZ.

(4) Для конечного многообразия X мы имеем предсказание для $X^!$ (Ханани-Виттен)

но доказать $T^X_{ij} = T^{X^!}_{ij}$ обычно сложно даже если мы знаем формулы для стаб. оболочек.

Пример: Явные формулы для $\mathrm{Stab}(\lambda)$ в случае $X =$  $= \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ известны (S. "Elliptic stab. env. Hilb")

$$T_{ij} = f(a = t_1/t_2,\ \hbar = t_1 \cdot t_2,\ z).$$

На компьютере можно проверить что

$$``T_{ij} = T_{ij}(z \leftrightarrow a)"$$

но док.-во пока не получено.

Предел в K-теорию:

Теор. (Aganagic-Okounkov)

$$\mathrm{Stab}^{\mathrm{Ell}}(p)\Big|_{z=q^s} \xrightarrow{q\to 0} \mathrm{Stab}^{K\text{-th},(s)}(p)$$

$s \in H^2(X,\mathbb{R})$ — "наклон" K-теорной стаб. оболочки.

K-теорный предел. $q \to 0$

$$\theta(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$$

Для общего $s \in \mathbb{R}$ $(s \notin \mathbb{Z})$

$$\lim_{q\to 0} \frac{\theta(az)}{\theta(z)}\Big|_{z=q^s} = \lim_{q\to 0}\frac{\theta(aq^s)}{\theta(q^s)} = a^{-\lfloor s\rfloor - 1/2}$$

$$-\tfrac{3}{2} \qquad -1 \qquad -\tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad 1/2 \qquad 1 \qquad 3/2 \qquad 2$$

Эллипт стабильные оболочки зависят только от таких комбинаций

Пример: $\quad X = Hilb^{n=2}(\mathbb{C}^2)$

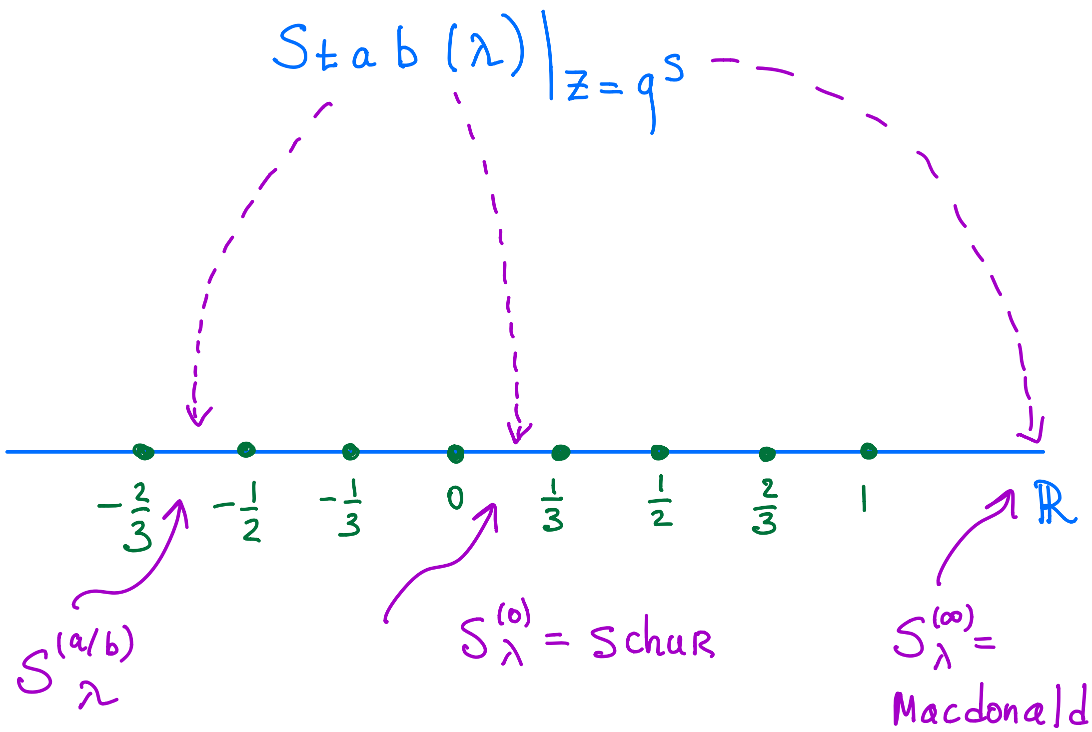
$$\left\{ \square\square \,,\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square} \right\} = X^T$$

$\mathfrak{f} = Stab\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}\right)$; Then, the components are:

$$\mathfrak{f}\Big|_{\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}} = \vartheta(t_2)\,\vartheta(t_2^2);$$

$$\mathfrak{f}_{\square\square} = \frac{\vartheta(t_2)^2\,\vartheta(t_1 t_2)\,\vartheta\left(\frac{t_2}{t_1} z\right)}{\vartheta(t_1)\,\vartheta(z)} + \frac{\vartheta(t_2)\,\vartheta(t_1/t_2)\,\vartheta(t_1 t_2)\,\vartheta(z^2 t_2)\,\vartheta(t_1 t_2 z)}{\vartheta(t_1)\,\vartheta(z^2 t_1 t_2)\,\vartheta(z)};$$

K-теорный предел для $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$



$$\text{Walls} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ : \ 1 \leq |b| \leq n \right\}$$

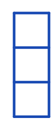
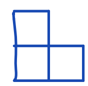
"Farey sequence of level n".

Change of stable basis

In "Infinitesimalgechan of stable basis" E. Gorsky, A. Negut studied transition matrices

$$S_\lambda^{(a/b+\epsilon)} = \sum_\mu T_{\lambda,\mu}^{(a/b)} \, S_\mu^{(a/b-\epsilon)}$$

for "infinitely" small ϵ.

Example: $n=3$, in basis , , ,

$$T^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -\frac{t_1}{t_2^2}(t_1 t_2 - 1) \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 0, & -a^3 \hbar^{-1} (\hbar^2 - 1) \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

- $\exists$ diagonal γ_s so that

$\tilde{T}^{(s)} = \gamma_s^{-1} \, T^{(s)} \, \gamma_s$ — Laurant polynomial in $\hbar$.

- Let $s = \frac{a}{b}$, then $\widetilde{T}^{(\frac{a}{b})}$ coincides with the Leclerc – Thibon involution of $U_\hbar(\widehat{gl_b})$:

By Leclerc – Thibon there is a unique involution of $U_\hbar(\widehat{gl_b})$ - module Fock such that:

(1) $\overline{a(\hbar)\,x + b(\hbar)\,y} = a(\hbar^{-1})\,\overline{x} + b(\hbar^{-1})\,\overline{y}$

(2) $\overline{|\emptyset\rangle} = |\emptyset\rangle$

(3) $\overline{f_i v} = f_i \overline{v}$

$T^{L-T}_{gl_b}$ = transition matrix from $|\lambda\rangle$ to $\overline{|\lambda\rangle}$

Conjectures:

- $\widetilde{T}^{(a/b)} = T^{L-T}_{gl_b}$

- the action of $\mathrm{Ha}/_b$ extends to action of $U_\hbar(\widehat{gl_b})$ (which commites with $\mathrm{Ha}/_b$)

K-theory limit to a wall (Y. Kononov – S.)

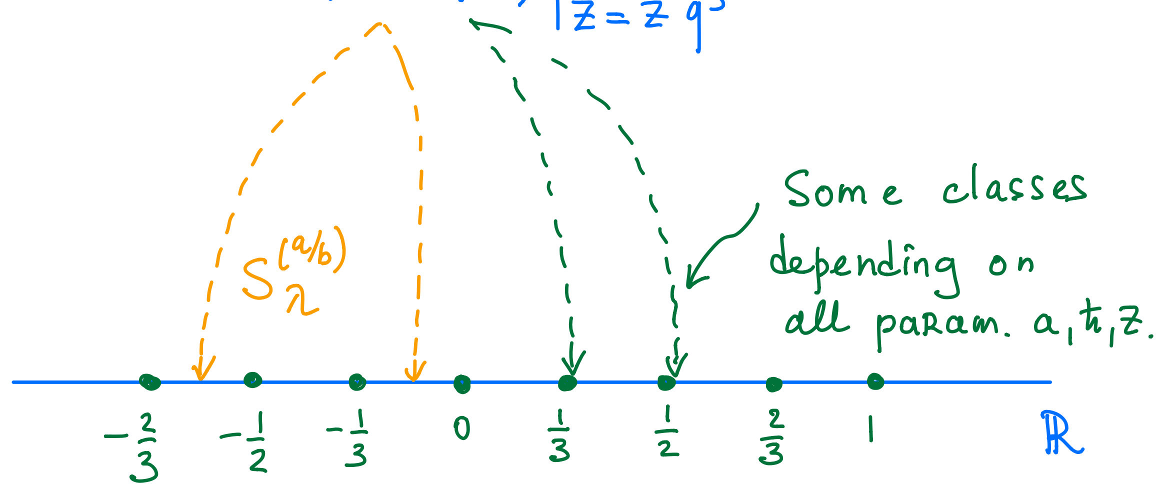
Instead the limit $\lim\limits_{q\to 0} \mathrm{Stab}\big|_{z=q^s}$

we can consider $\lim\limits_{q\to 0} \mathrm{Stab}\big|_{z=z\cdot q^s}$

This limit exists for all values of s!

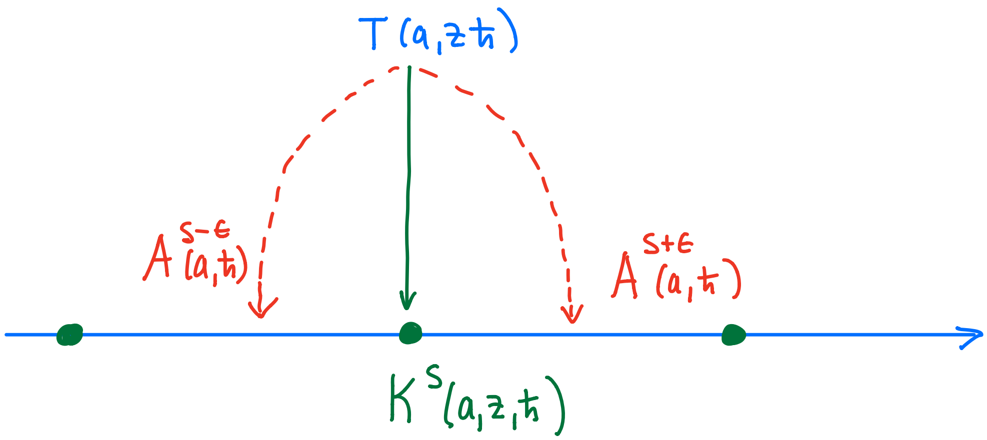
$$\lim_{q\to 0} \frac{\theta(az q^s)}{\theta(z q^s)} = \begin{cases} a^{-\lfloor s \rfloor - 1/2}, & s \notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{1-az}{1-z}\, a^{-s-1/2}, & s \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathrm{Stab}(\lambda)\big|_{z=z\,q^s}$



K-theory limit to a wall

Let $s = a/b$ be a wall for X.



Key observation:

$$K^{s}(a,z,\hbar)\cdot A^{s\pm\epsilon}(a,\hbar)^{-1} = \gamma_s \, Z^{\pm}(z,\hbar)\, \gamma_s^{-1}$$

diagonal matrix as in Negut-Gorsky.

Theorem (Y. Kononov – S.)

Let $s = a/b$ be a wall for X

$$K^s(a,\hbar,z) = \lim_{q\to 0} T(a,\hbar,z q^s)$$

Then:

$$K^s = \gamma_s\, Z^+(z,\hbar)\,\gamma_s^{-1} A^{s+\epsilon}(a,\hbar) = \gamma_s\, Z^-(z,\hbar)\,\gamma_s^{-1} A^{s-\epsilon}(a,\hbar)$$

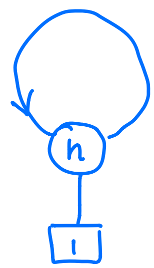
- $A^{s\pm\epsilon}(a,\hbar)$ – K-theoretic stable envelope of Hilbert scheme X with slope $s\pm\epsilon$
- $Z^{\pm}(z,\hbar)$ – K-theoretic stable envelope of $Y_s \subset X^!$ with slope $\pm\epsilon$.
- $$Y_s = (X^!)^{\mu_s} \subset X^!$$

$$\mu_s = \langle e^{2\pi i\cdot s}\rangle \simeq \mathbb{Z}_b \; ; \quad z \to z\cdot e^{2\pi i s}$$

Proof of Gorsky-Negut conjectures

For a wall $s=\frac{a}{b}$ where the action of $U_\hbar(\widehat{\mathfrak{gl}}_b)$ comes from?

$X^!$ $\circlearrowleft$ $\mu_s = \langle e^{2\pi i s}\rangle$ $\Longleftrightarrow$



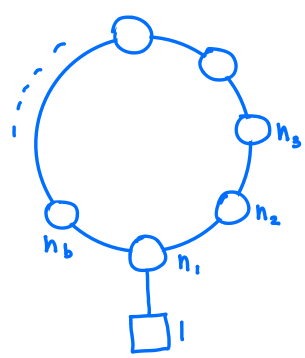
$\ell \to \ell \cdot e^{2\pi i s}$

μ_s - Rotates the loop

Then Y_s is a union of quiver varieties

$$Y_s = (X^!)^{\mu_s} = \coprod_{n_1+\dots+n_b=n} X(n_1, n_2 \dots n_b)$$

$$X(n_1, n_2 \dots n_b) =$$



By Maulik-Okounkov-Nakajima ....

$$\bigoplus_n K_T(Y_s) - \text{module of } U_\hbar(\widehat{\mathfrak{gl}}_n).$$

Proof of Gorsky-Negut conjectures

Why the Leclerc-Thibon matrices

= transition matrices across a wall $s = a/b$

Factorization at walls s gives:

$$\gamma_s Z^{+}(z,\hbar)\gamma_s^{-1} A^{s+\epsilon}(a,\hbar) = \gamma_s Z^{-}(z,\hbar)\gamma_s^{-1} A^{s-\epsilon}(a,\hbar)$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{A^{s+\epsilon}(a,\hbar)\, A^{s-\epsilon}(a,\hbar)^{-1}}_{\text{Exactly the matrices } T^{(a/b)} \text{ studied by Gorsky-Negut}} = \gamma_s \underbrace{Z^{+}(z,\hbar)^{-1}\, Z^{-}(z,\hbar)}_{\text{Transition matrix from basis } |\lambda\rangle \text{ to basis } \overline{|\lambda\rangle} \text{ in Fock module of } U_\hbar(\widehat{\mathfrak{gl}}_b)}\gamma_s^{-1}$$

Exactly the matrices $T^{(a/b)}$ studied by Gorsky-Negut

Transition matrix from basis $|\lambda\rangle$ to basis $\overline{|\lambda\rangle}$ in Fock module of $U_\hbar(\widehat{\mathfrak{gl}}_b)$

$$T^{L\text{-}T}_{\mathfrak{gl}_b}$$