

Лекция 4

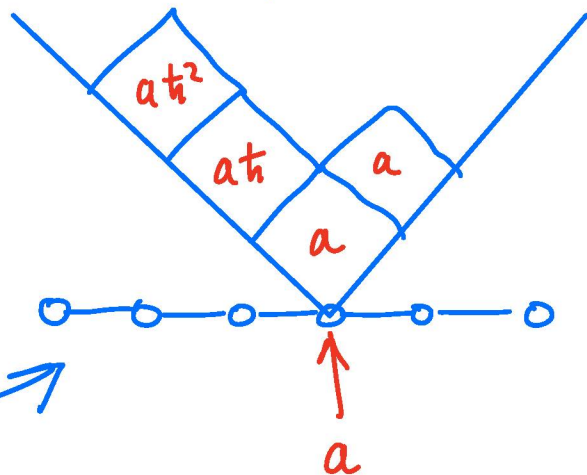
- Стабильный базис в $H^1(X)$
- Переход от стабильного базиса к базису неподв. точек.
- R -матрица
- Гамильтонианы сплюснутых цепочек из Геометрии.
- Циклические кольца.

Эквивариантная K-теория VS Когомология

$$K_T(X(V, W)) = \mathbb{Z}[x_1^\pm, x_2^\pm, \dots, a_1^\pm, \dots, a_\ell^\pm, \hbar^\pm] / I$$

$I =$ идеал полиномов
которые закруляются
при ограничении в
неподвижные точки

$$\mathcal{F}(x_i = a_i, \dots)$$

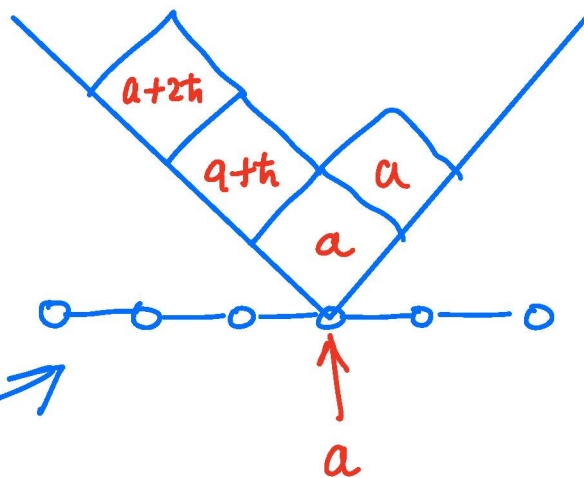


Эквивариантные когомологии

$$H_T(X(V, W)) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, a_1, \dots, a_\ell, \hbar] / I$$

$I =$ идеал полиномов
которые закруляются
при ограничении в
неподвижные точки

$$\mathcal{F}(x_i = a_i, \dots)$$



"Т.е. K-теория $X = e^X$ от когом. X -об."

Терминология:

Если \mathcal{V} - расслоение ранга ν над $X(\nu, w)$

то x_1, x_2, \dots, x_ν - называются в кочом.

"Корнями Черна"

$$x_1 + \dots + x_\nu = c_1(\nu) \in H_T(X(\nu, w))$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{\nu-1} x_\nu = c_2(\nu) \in H_T(X(\nu, w))$$

$$\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k} = c_k(\nu) \in H_T(X(\nu, w))$$

"Класс Черна расслоения \mathcal{V} ".

Элем. симметр. функций порождают $\mathbb{Z}^{\text{Sym}}[x_1, \dots, x_\nu]$

\Leftrightarrow Классы Черна тавтологических расслоений порождают $H_T(X(\nu, w))$.

$$c_{\text{top}}(\nu) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_\nu = e(\nu)$$

"Класс Эйлера расслоения \mathcal{V} ".

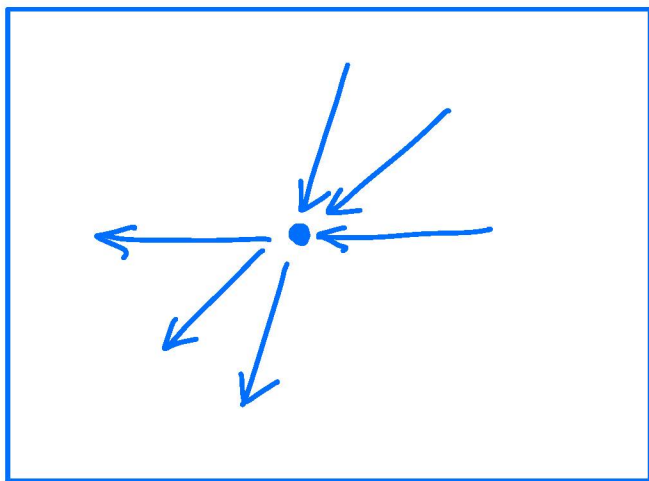
Стабильный базис в $H_T(X)$:

Хотим описать новый базис

$$\text{Stab}_{\sigma}(p), \quad p \in X^T$$

зависящий от выбора $\sigma: \mathbb{C}^X \rightarrow A$.

(1) Выбор кохарактера: $\sigma: \mathbb{C}^X \rightarrow A$



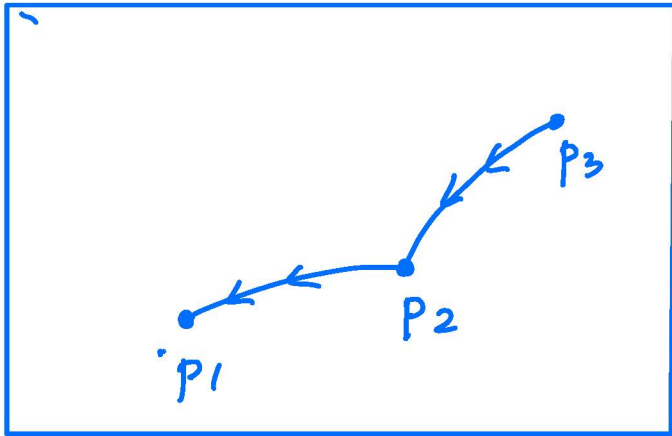
X Кохарактер определяет разложение кас. пространства:

$$T_p X = N_p^+ \oplus N_p^-$$

Характери N_p^+ - полож. на σ

Характери N_p^- - отр. на σ .

$$\text{Attr}_\sigma(p) = \left\{ x \in X : \lim_{z \rightarrow 0} \sigma(z) \cdot x = p \right\}$$



$$\begin{aligned} \text{Attr}_\sigma^f(p) = \\ \text{Attr}_\sigma(p) + \\ + \text{Attr}_\sigma \left(\begin{array}{l} \text{всех точек} \\ \text{в замкнутом} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Теор: Для общего $\sigma \in \text{cochar}(A)$ и $p \in X^T$ существует единственный класс

$$\text{Stab}_\sigma(p) \in \text{HT}(X)$$

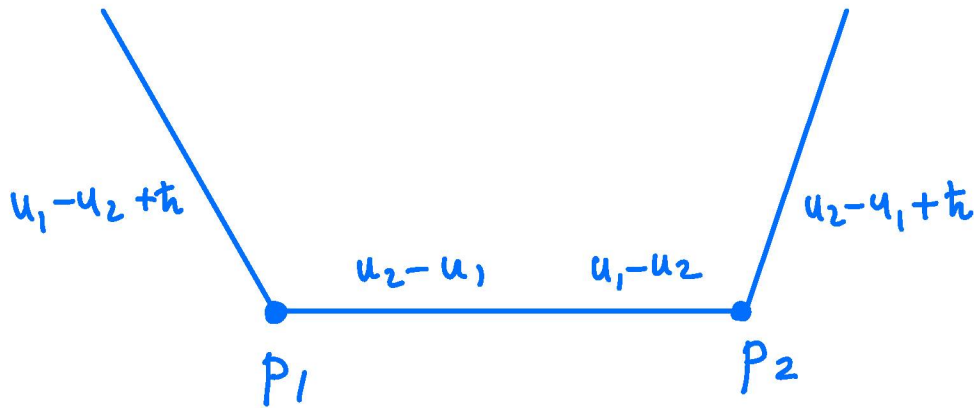
удовлетворяющий условиям:

- (1) $\text{Supp}(\text{Stab}_\sigma(p)) \subset \text{Attr}_\sigma^f(p)$
- (2) $\text{Stab}_\sigma(p)|_p = (-1)^{\Sigma^-} e(N_p^-)$
- (3) $\deg_{a_1, \dots, a_\ell}(\text{Stab}(p)|_q) < \frac{\dim X}{2}$
for $q \neq p$.

Пример:



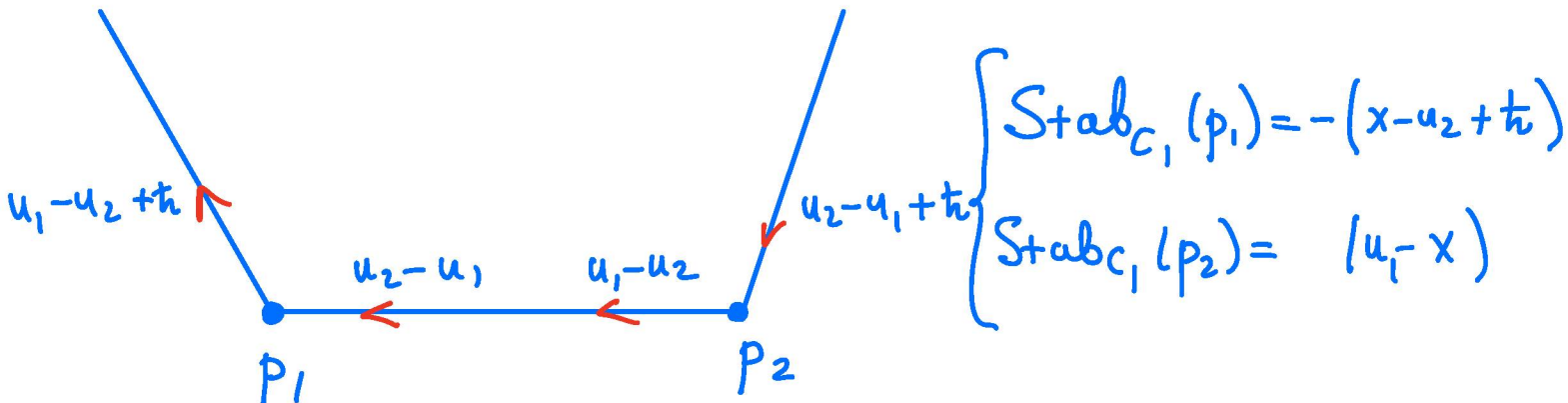
$$\rightsquigarrow X = T^* \mathbb{P}^1$$



Есть две камеры $C_1 = \{u_1 < u_2\}$
 $C_2 = \{u_1 > u_2\}$

$$H_T(X) = \mathbb{Z} [x, u_1, u_2, h] / (x-u_1)(x-u_2)$$

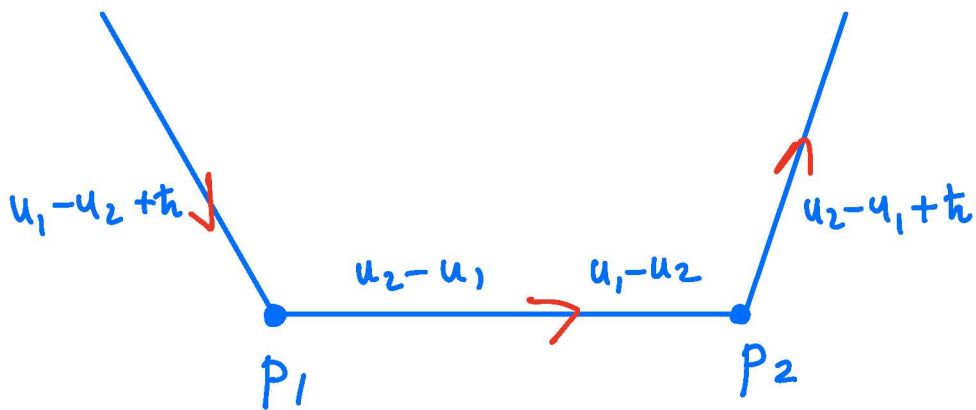
① Пусть $\mathcal{E} =$ касат. направления
 $\sigma \in C_1 = \{u_1 < u_2\}$



$T_{ij}^{C_1} = \text{Stab}_{C_1}(p_j) |_{p_i}$ - Матрица перехода
 от стабилизатора
 базиса $\text{Stab}_{C_1}(p)$
 к базису $[p]$.

$$T_{ij}^{C_1} = \begin{pmatrix} -u_1 + u_2 + h & 0 \\ -h & u_1 - u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u - h & 0 \\ -h & u \end{pmatrix}$$

(2) Пусть $\varepsilon =$ кокас. направление,
 $\sigma \in C_2 = \{u_1 > u_2\}$



$$\text{Stab}_{C_2}(p_1) = (u_2 - x)$$

$$\text{Stab}_{C_2}(p_2) = -(x - u_1 + h)$$

$$T^{C_2} = \begin{pmatrix} -u & -h \\ 0 & u - h \end{pmatrix};$$

Определение:

P -матрица R_{C_1, C_2} есть матрица перехода от базиса $\text{Stab}_{C_2}(p)$ к базису $\text{Stab}_{C_1}(p)$.

Пример:

для T^*P' :

$$R_{C_2, C_1} = (T^{C_1})^{-1} \cdot T^{C_2} = \begin{pmatrix} \frac{u}{u+h} & \frac{h}{u+h} \\ \frac{h}{u+h} & \frac{u}{u+h} \end{pmatrix}$$

$$\text{для } H_T \left(\coprod_{k=0}^2 \square_2^k \right) = H_T (p \cup T^*P' \cup p)$$

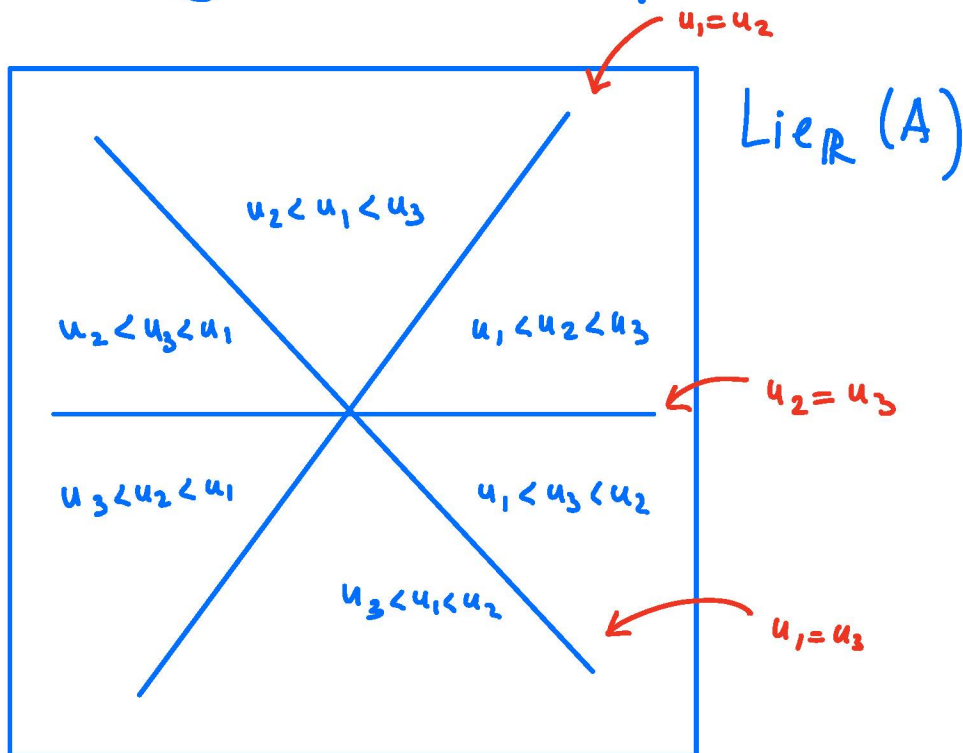
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{u+h} & \frac{h}{u+h} & 0 \\ 0 & \frac{h}{u+h} & \frac{u}{u+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{u}{u+h} \text{Id} + \frac{h}{u+h} P.$$

= Standard R-matrix of $\Upsilon_h(SL_2)$.

Что если $\dim W > 2$?

$$\begin{array}{c} \circ^k \\ | \\ \square_3 \end{array} \rightsquigarrow \mathbb{C}^2(u_1) \otimes \mathbb{C}^2(u_2) \otimes \mathbb{C}^2(u_3)$$

\Rightarrow будет 6 камер:



$$R_{12}(u_1 - u_2) R_{13}(u_1 - u_3) R_{23}(u_2 - u_3)$$

$$= R_{23}(u_2 - u_3) R_{13}(u_1 - u_3) R_{12}(u_1 - u_3)$$

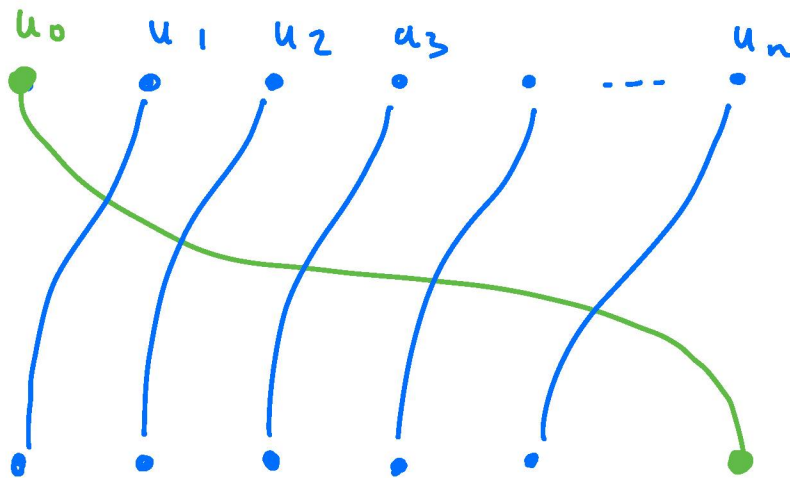
\Rightarrow

R -матрицы решают уравнение YB

по своему определению.

Назад к спиновым цепочкам:

$$\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^2(u_1) \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2(u_n)$$



$$T(u_0) = \text{Tr}_{\mathbb{C}_0^2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}_0 R_{0,1}(u_0-u_1) \dots R_{0,n}(u_0-u_n) \right\}$$

$$\Rightarrow T(u_0) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i u_0^{-i} \quad H_i \in \text{End}(\mathcal{H}_n)$$

- коммутующие
Гамильтонианы.

Как интерпретировать H_i геометрически?

Заметим что

$$L = R_{c_1, c_2} \quad \text{где } c_1 = \{u_0 < u_1 < \dots < u_n\}$$

$$c_2 = \{u_1 < \dots < u_n < u_0\}$$

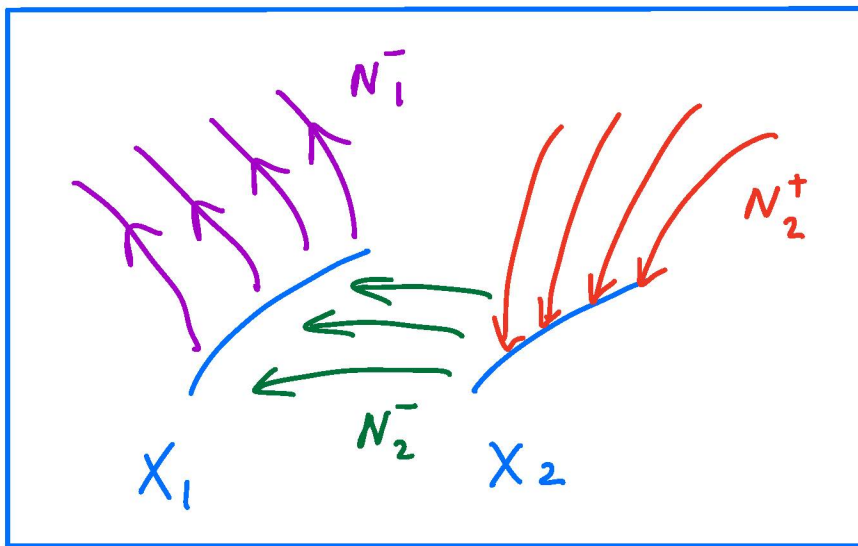
$$\text{для } H_T \left(\prod_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} 0 & k \\ \square & n+1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{C}_0^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_{n+1}^2$$

Рассмотрим подтор который действует
на фреймिंगе как

$$A: W \simeq \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C} a_1 + \mathbb{C}^n \cdot a_2$$

тогда:

$$\left(\begin{array}{c} \circ^k \\ \square_{n+1} \end{array} \right)^A = \underbrace{\begin{array}{c} \circ^0 \\ \square_1 \end{array} \times \begin{array}{c} \circ^k \\ \square_n \end{array}}_{X_1} + \underbrace{\begin{array}{c} \circ^1 \\ \square_1 \end{array} \times \begin{array}{c} \circ^{k-1} \\ \square_n \end{array}}_{X_2}$$



$$\text{Stab } c_1 = \left(\begin{array}{c|c} e(N_1^-) & \begin{matrix} \circ & \circ & \circ & \circ \end{matrix} \\ \hline \text{wavy} & e(N_2^-) \end{array} \right)$$

$$\text{Stab } c_2 = \left(\begin{array}{c|c} e(N_1^+) & \text{wavy} \\ \hline \begin{matrix} \circ & \circ & \circ & \circ \end{matrix} & e(N_2^+) \end{array} \right)$$

\Rightarrow Оператор L имеет вид:

$$L = \left(\begin{array}{c|c} e(N_1^-) & 0 \\ \hline \text{---} & e(N_2^-) \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} e(N_1^+) & \text{---} \\ \hline 0 & e(N_2^+) \end{array} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \text{End}(\mathfrak{H}_n)$$

$$\Rightarrow T(u_0) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot L \right) = A + zD.$$

Заметим теперь, что $A = \frac{e(N_1^+)}{e(N_1^-)}$



Мы доказали что при $z=0$

оператор $T(u_0)$ действует на

$$\mathfrak{H}_n = \text{HT} \left(\prod_{k=0}^n X(k, n) \right)$$

как оператор умножения на хар-класс

$$\frac{e(N_1^+)}{e(N_1^-)} \Rightarrow$$

Диагонален в классах неподвижных точек!

Что если $z \neq 0$?

Гипотеза Некрасова-Шаташвили \Rightarrow Теорема
Малика-Окуцькова

Гамильтониан ставится операторами

$$H = \nabla U + O(z)$$

квантового умножения в $QH_T(X)$.

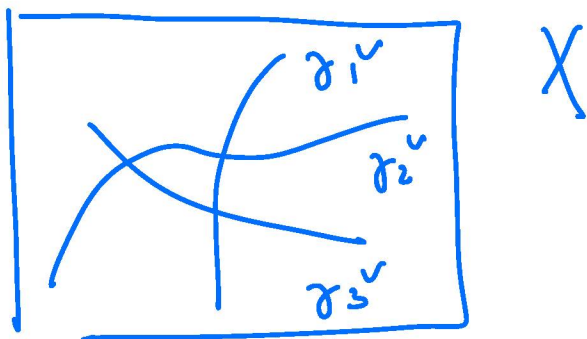
Обычные когомологии

$$\gamma_1 \dots \gamma_m \in H^*(X)$$

$$\gamma_i \cup \gamma_j = \sum \Gamma_{ijk} \gamma_k$$

$$\text{где } \Gamma_{ijk} = \int_X \gamma_i \gamma_j \gamma_k$$

или, в двойственных терминах



Γ_{ij}^k - число точек
в пересечении

$$\Gamma_{ij}^k = \gamma_i^\vee \cap \gamma_j^\vee \cap \gamma_k^\vee$$

В квадрантах когомологий:

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,3}^d = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \ p_2 \ p_3 \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow{f} X \right\}^{\text{of degree } d}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,3}^d \xrightarrow{\text{ev}_i} X \quad i=1..3$$

$$\begin{array}{c} \Psi \\ f \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \cup \\ f(p_i) \end{array}$$

$$\Gamma_{ijk}^d = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}^d} \text{ev}_i^*(\gamma_i) \text{ev}_j^*(\gamma_j) \text{ev}_k^*(\gamma_k)$$

Что если $z \neq 0$?

Гипотеза Некрасова-Шаташвили \Rightarrow Теорема
Малика-Окуцькова

Умножение в обычных когомологиях

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \in H^1(X).$$

$$\Rightarrow \gamma_i \cup \gamma_j = \sum_k \Gamma_{ijk} \gamma_k$$

$$\Gamma_{ijk} = \int_X \gamma_i \cup \gamma_j \cup \gamma_k$$

Умножение в квадратных когомологиях:

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,3}^d = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \quad p_3 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \text{---} \xrightarrow{f} X \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{degree } d \in H_2(X, \mathbb{Z}). \\ \begin{array}{l} 2 \\ \mathbb{Z} \end{array} \text{ верт.} \end{array}$$

тогда для каждой отмеченной точки есть

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{0,3}^d & \xrightarrow{ev_i} & X \\ & \searrow f & \cup \\ & & f(p_i) \end{array}$$

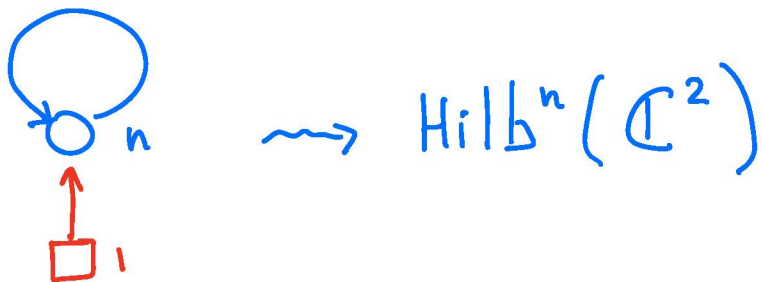
Теперь
коэффиц.
есть 3-точечн.
инвариант
Громова-Виттена X .

$$\Gamma_{ijk}^d = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}^d} ev_1^*(\gamma_i) ev_2^*(\gamma_j) ev_3^*(\gamma_k)$$

тогда

$$\gamma_i * \gamma_j = \sum_{k,d} \Gamma_{ij}^d \gamma_k \quad z^d = \gamma_i \cup \gamma_j + o(z)$$

Стабильный базис и неподв. точки для
циклических колец:



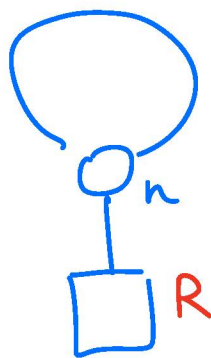
$$H_T(\coprod \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \text{Fock} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, p_3, \dots] \otimes \mathbb{Q}[t_1, t_2]$$

Отсюда действуем $\text{Stab}(\lambda) \longrightarrow \bigcup S_X$
Полином Шура

Тогда класс неподвижных точек

$$[\lambda] \longrightarrow j_\lambda$$

Полином
Джека.



$$\Rightarrow H_T\left(\frac{1}{n} \chi(n, R)\right) = \underbrace{\text{Fock} \otimes \dots \otimes \text{Fock}}_R$$

Ото ж действие с полиномами:

$$\text{stab}\left([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R]\right) = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot S_{\lambda_R}$$

тогда

$$[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R] \longrightarrow \mathbb{J}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R}$$

Базис "одобренных Джеков"

AFLT - базис в CFT/AGT.

R-матрица для $\text{Fock}(u_1) \otimes \text{Fock}(u_2)$?

See A. Smirnov

"On the instanton R-matrix" ~ 2013