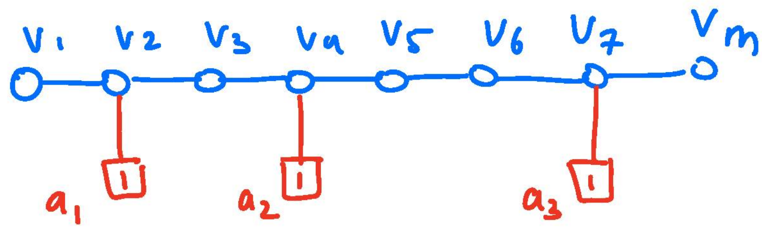
Лекция 3

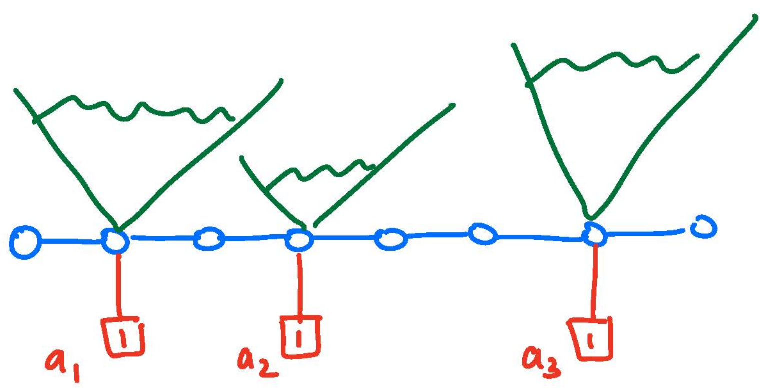
- Неподвижные точки для циклич. колчанов
- Тавтологические расслоения
- Классы неподв. точек в K-теории
- Операторы умножения на тавт. расслоения
- Виртуальное касательное расслоение.

В прошлый раз и на семинаре:

$X(v,w) =$ 

$A = (\mathbb{C}^\times)^3 = (a_1, a_2 a_3)$:

$\Longrightarrow$

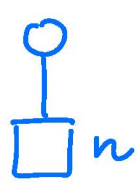
$X(v,w)^A =$ 

так что общее число ящиков в i-ом ящике равно v_i

Функ. $\left[\coprod_{v} X(v,w)^A\right] = \left(\mathbb{C}^{m+1}\right)^{\otimes w_1} \otimes \left(\Lambda^2 \mathbb{C}^{m+1}\right)^{\otimes w_2} \otimes \dots$

соотв. весовому подпр. в спин. цеп.

<u>Пример:</u>

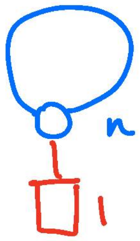
 $\rightsquigarrow \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n\text{-times}}$

"добавили один фрейминг это добавляем одно фунд. представление к спиновой цепочке"

Циклические колчаны:

$X(v, \delta_i)$ – не точка для цикл. колчана

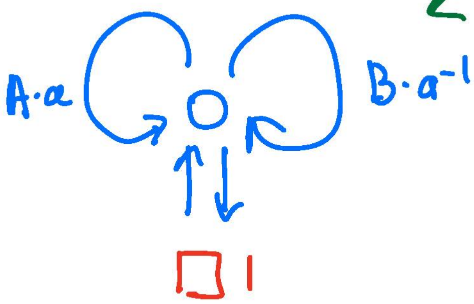
Ex:



$= Hilb^n(\mathbb{C}^2)$ – $2n$-мерное глад. многообразие

Но есть доп. тор

Задача 5 в листочке:



$\Longrightarrow Hilb^n(\mathbb{C}^2)^A = \{\lambda : |\lambda| = n\}.$

Соотв. "спиновая цепочка" имеет размер

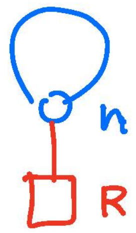
$$\text{Функ}\left(\coprod_n Hilb^n(\mathbb{C}^2)\right) = Fock = \bigoplus Fock_n$$

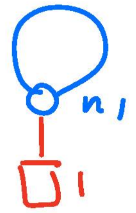
базис = все диагр. Юнга

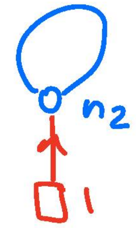
базис = диаг Юнга с n ящиками.

Теорема о тензорной структуре дает:

$$\Big(\Big)^{A=(\mathbb{C}^\times)^R} = \bigsqcup_{n_1+\dots+n_R=n} \Big(\Big) \times \Big(\Big) \dots$$







$$\Downarrow$$

$$\mathcal{M}(n,r)^A = \bigsqcup_{n_1+\dots+n_R=n} \mathrm{Hilb}^{n_1}(\mathbb{C}^2)\times\dots\ \mathrm{Hilb}^{n_R}(\mathbb{C}^2)$$

инстантоны ранга R.

$\Longrightarrow$ Для полного тора $\tilde{A} = (\mathbb{C}^\times)^R \times \mathbb{C}^\times$

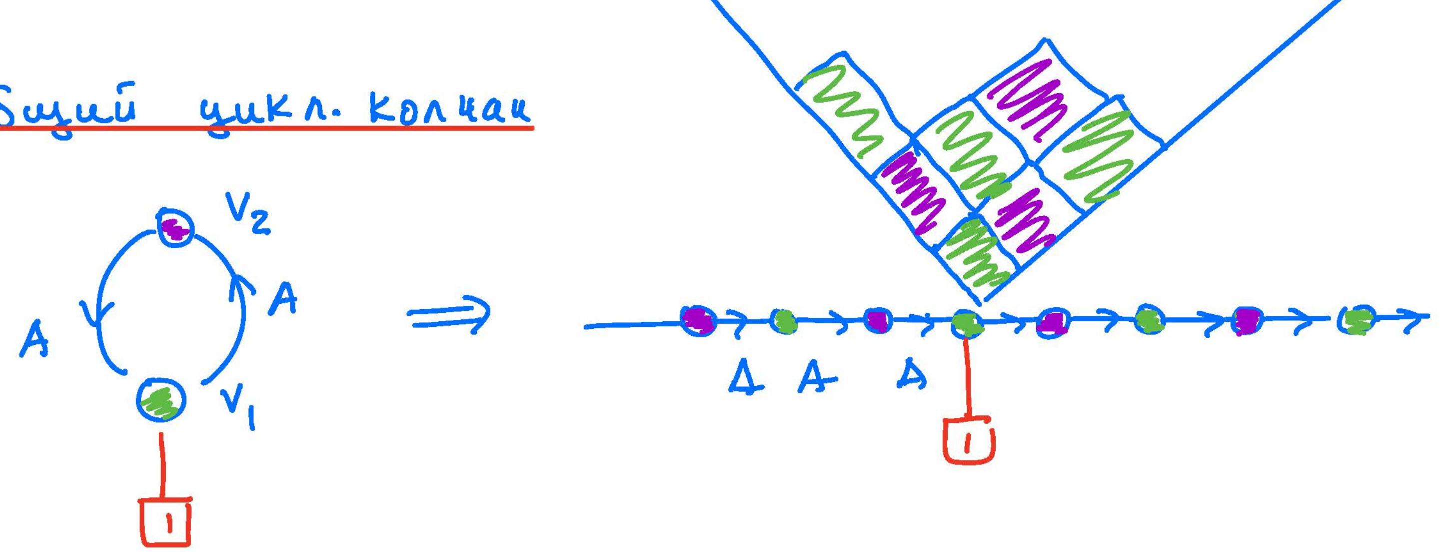
$$\mathcal{M}(n,R)^{\tilde{A}} = \big((\lambda_1,\dots\lambda_R) : |\lambda_1|+\dots+|\lambda_R| = n \big)$$

и "спиновая цепочка"

$$\text{Функ}\Big(\bigoplus_n \mathcal{M}(n,R)^{\tilde{A}} \Big) = \underbrace{\mathrm{Fock}(a_1)\otimes \mathrm{Fock}(a_2)\dots}_{R\text{-times}}\mathrm{Fock}(a_R)$$

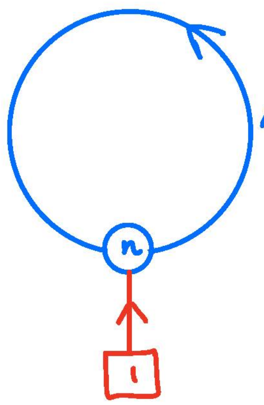
будет спиновой цепочкой для $U_\hbar(\widehat{gl_1})$.

Общий цикл. колчан



$$\Longrightarrow \quad X(v,w)^A = \left\{ \lambda : \begin{array}{l} \#\,\text{ящики} = v_1 \\ \#\,\text{фиолетовые} = v_2 \end{array} \right\}$$

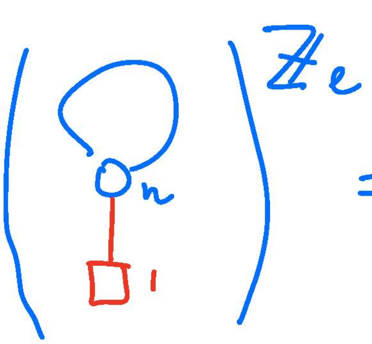
Задача: (просто)



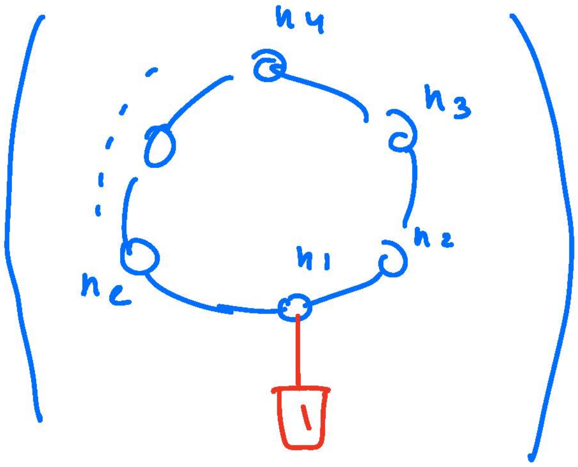
$A \to A\cdot a$, $\quad a = \left\{ e^{\frac{2\pi i}{\ell}k} ;\ k = 0 \ldots \ell-1 \right\}$

$$= \mathbb{Z}_\ell \subset \mathbb{C}^\times$$

Тогда:



$$= \coprod_{n_1+\ldots+n_\ell=n}$$



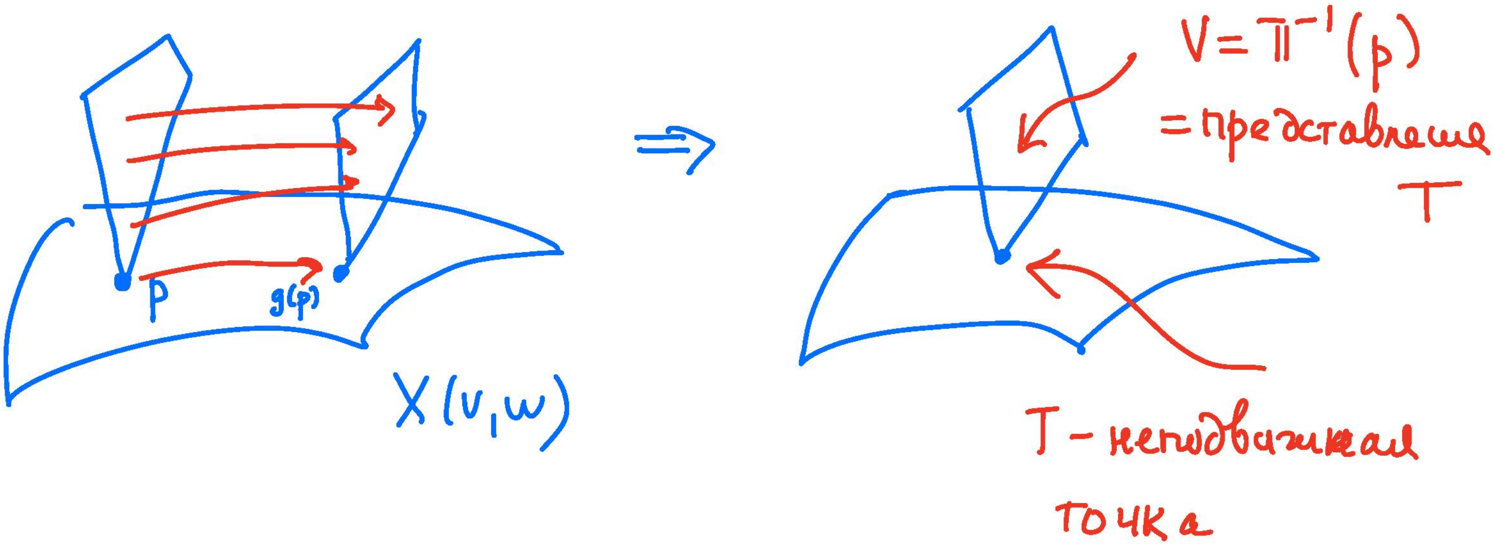
Эквивариантная K-теория и расслоения:

$$X(v,w) = \mu^{-1}(0)^{\theta\text{-}ss}/G \; ; \quad G = \prod_i GL(V_i)$$

$$\mathcal{V}_i = \left(\mu^{-1}(0)^{\theta\text{-}ss} \times V_i\right)/G$$ – ассоц. расслоение = i-ое тавтологическое расслоение

$$\begin{array}{c} \mathcal{V}_i \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow \\ X(v,w) \end{array} \qquad \text{со слоем } \simeq V_i \simeq \mathbb{C}^{v_i}$$

Тор $T = A \times \mathbb{C}^\times_\hbar$ действует на $\mathcal{V}_i$ сохраняя π:

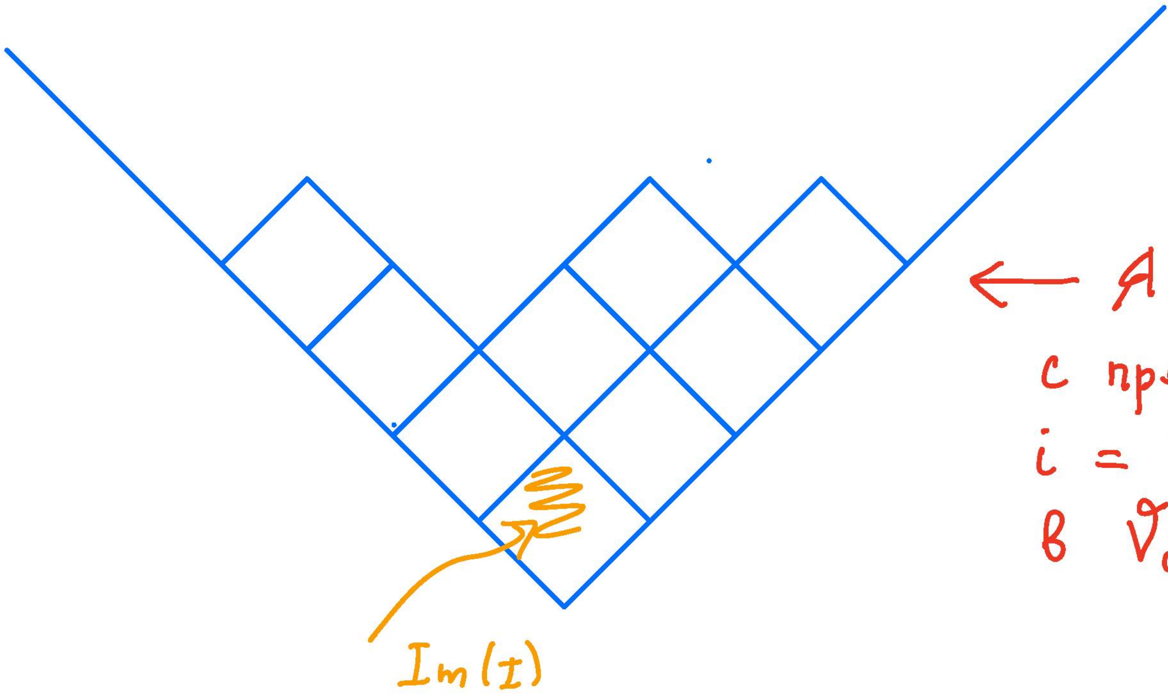


Хотим понять: $\mathcal{V}_i\big|_p \in \mathrm{char}(T) = K_T(p)$

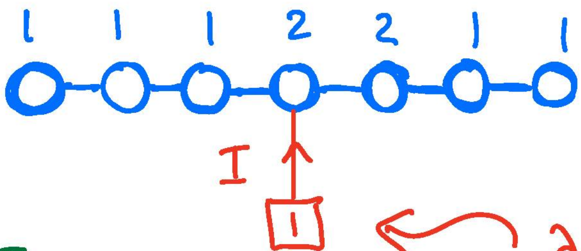
T-характер слоя $\mathcal{V}_i$ в неподв. точке p.

(1) Сначала, пусть $X(v,w) =$ точка.

и $\theta = \theta$



Ящики с проекцией i = базис в V_i



A_7 - колчан.

$\mathbb{C}^\times_\hbar$ - действует на стрелках

$$\cdots \circ \xrightarrow{A} \circ - \;\mapsto\; \cdots \circ \xrightarrow{A} \circ \to \cdots$$

и

$$\cdots \circ \xleftarrow{B} \circ - \;\Rightarrow\; \cdots \circ \xleftarrow{B\cdot\hbar^{-1}} \circ - \cdots$$

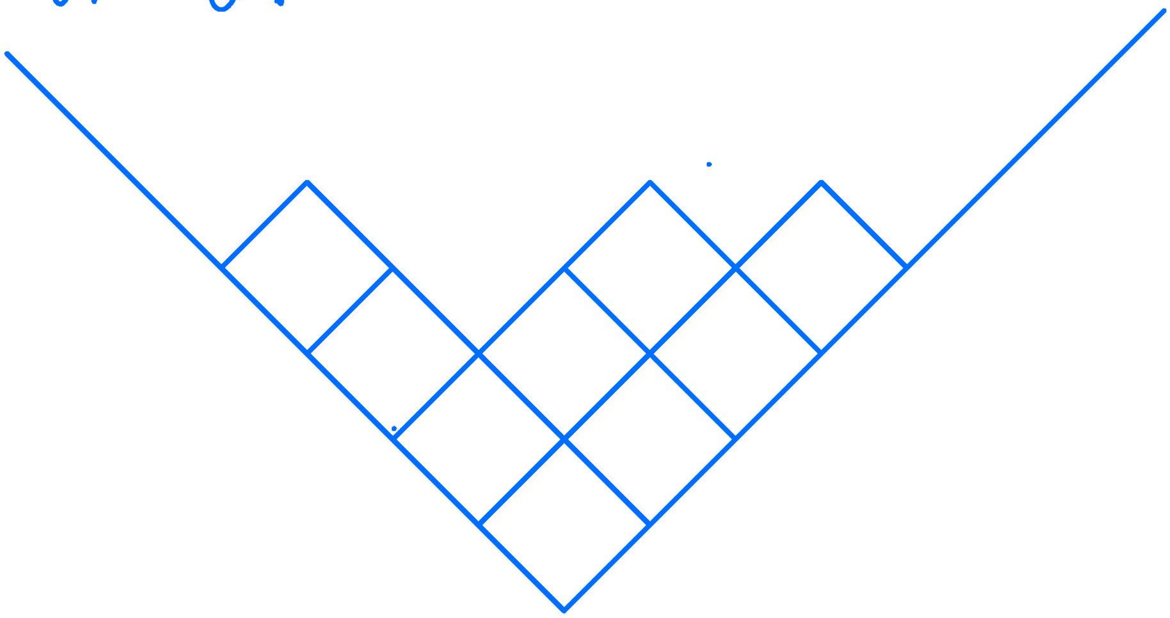
действуем на $W = \mathbb{C}^1$ скалярами

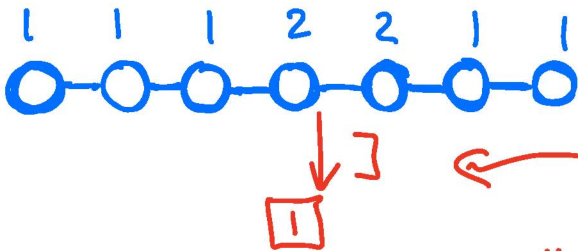
$x \to a \cdot x$

$$I \to a^{-1} \cdot I \cdot g$$

$$\Rightarrow g = a \text{ на } Im(I)$$

(2) Заметим что характер $\vartheta_i|_P$ зависит от θ:





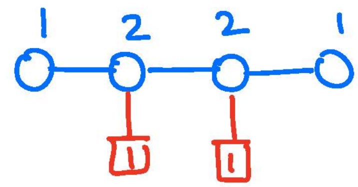
теперь $J \neq 0$.

и $J \to J\hbar^{-1}$

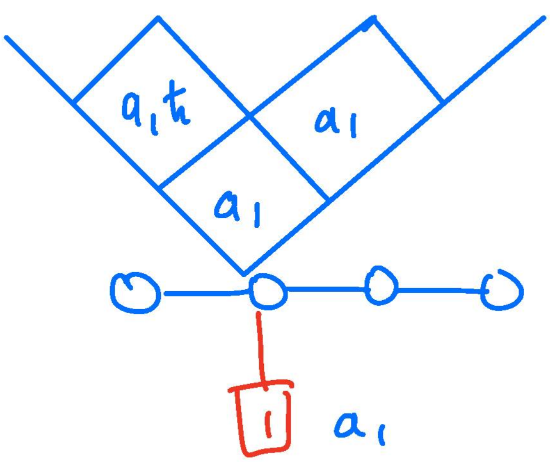
относительно $\mathbb{C}^\times_\hbar$;

Пример: "3D-mirror of $T^*Gr(2,5)$"

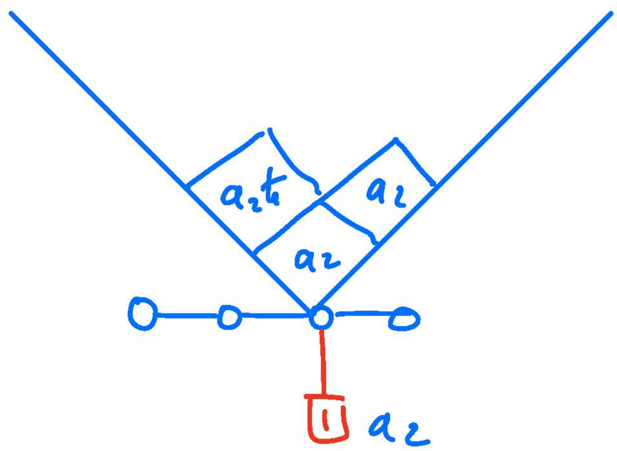
$X(v,w) =$



Неподвижная точка = 2 диаграмм Юнга



и



$$\Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1|_p = a_1\hbar \\ \vartheta_2|_p = a_1 + a_2\hbar \\ \vartheta_3|_p = a_1 + a_2 \\ \vartheta_4|_p = a_2 \end{cases}$$

Эквивариантная К-теория и Когомологии

① К-теория = "Кольцо порождённое всеми расслоениями над X, с операциями $\otimes$ и $\oplus$" / $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_3 \\ \Rightarrow \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_3 \end{array} \right\}$.

② Известно что для $X(v,w)$ достаточно тавтологических расслоений $\mathcal{V}_i$, $i=1 \dots m$.

$K_T(X(v,w))$ = "Кольцо всех тензорных полиномов от тавтологических расслоений с коэффициентами из

$$K_T(pt) = \mathbb{C}[a_1^{\pm}, \dots a_e^{\pm}, \hbar^{\pm}].$$

по модулю тех, которые ограничиваются в 0 во всех неподвижных точках."

"Тензорные полиномы" ....

Явное описание кольца $K_T(X)$:

Сопоставим V_i формальные переменные

$x_{i,1}, x_{i2}, \dots x_{i,v_i}$ — "корни Гротендика"

так что

$$V_i = x_{i,1} + x_{i,2} + \dots + x_{i,v_i}$$

(думайте про характер V_i-мерного простр.)

и
$$\begin{cases} V_i^{\otimes 2} = (x_{i,1} + \dots + x_{i,v_i})^{\otimes 2} \\ \Lambda^k V_i = e_k(x_{i,1}, \dots x_{i,v_i}) \\ \det V_i = x_{i,1} \cdot \dots \cdot x_{i,v_i} \\ V_i^* = x_{i,1}^{-1} + \dots + x_{i,v_i}^{-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{matrix} \text{Тензорные полиномы} \\ \text{от } V_i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{Симм. ф-ии} \\ \text{от } x_{i,1}, \dots x_{i,v_i} \end{matrix} \right\}$.

$$\begin{matrix} \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ \text{расслоение } \mathcal{F} & \longleftrightarrow & f(x_{i,1} \dots x_{i,v_i}) \end{matrix}$$

тогда

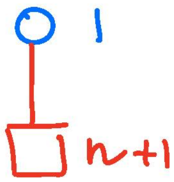
$$\mathcal{F}|_p = f(x_{i,1} = a_{i,1}(p) \dots x_{i,n} = a_{i,n}(p))$$

"характеры ящиков".

$$K_T(X(v,w)) \simeq \frac{\mathbb{Z}\left[x_{11}^{\pm1},\dots x_{1v_1}^{\pm1};\dots x_{m,1}^{\pm1}\dots x_{m,v_m}^{\pm1},\ a_1^{\pm1}\dots a_\ell^{\pm1}\,\hbar^{\pm1}\right]^{S_{v_1}\times\dots\times S_{v_m}}}{I}$$

$$I = \left\{ f(x\dots) \ :\ f(x\dots)|_p = 0,\ \forall p\in X^T \right\}.$$

<u>Пример:</u> Рассмотрим

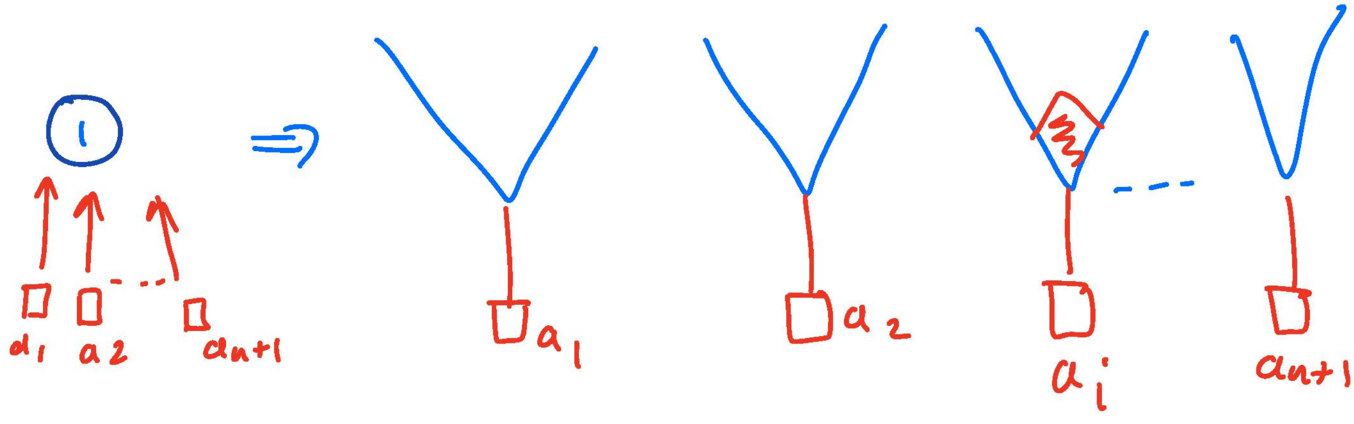


$\Rightarrow X = T^*\mathbb{P}^n$ для θ^-:

Эквивариантные параметры $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ и $\hbar$

X – тавтологическое расслоение.

Неподвижные точки:



$\Rightarrow$ $n+1$ неподвижная точка, $p_1 \dots p_{n+1}$

и $X|_{p_i} = a_i$

$$K_T(T^*\mathbb{P}^1) \simeq \frac{\mathbb{Z}[x^{\pm1}, a_1^{\pm1}, \dots a_1^{\pm1}\ \hbar^{\pm1}]}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})}$$

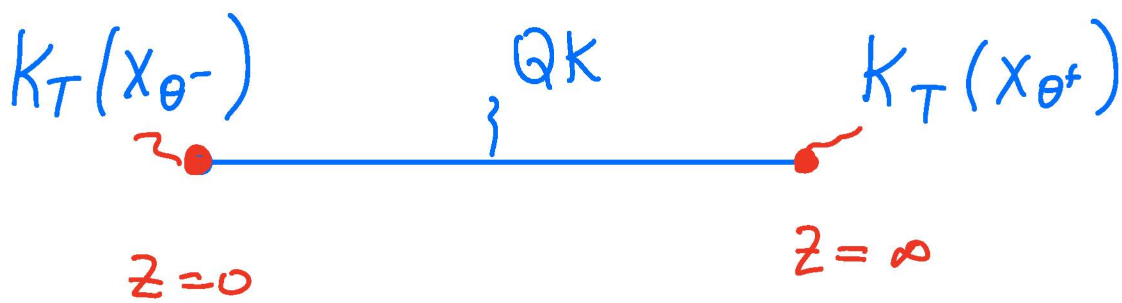
Что если взять противоположное условие стабильности θ^+?

$$K_T(T^*\mathbb{P}^1) \simeq \frac{\mathbb{Z}[x^{\pm1}, a_1^{\pm1}, \dots a_1^{\pm1}\ \hbar^{\pm1}]}{(x-a_1\hbar)(x-a_2\hbar)\dots(x-a_{n+1}\hbar)}$$

Заметим, что

$$QK = \frac{\mathbb{Z}[x^{\pm}\ a_1^{\pm1}, \dots a_{n+1}^{\pm1}\ \hbar^{\pm1}]}{(x-a_1)\dots(x-a_{n+1}) = \mathbb{Z}\,(x-a_1\hbar)\dots(x-a_{n+1}\hbar)}$$

= "алгебра Бете" для спиновой цепочки $\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n+1}$ в весе $k=1$:



К-теорные классы неподвижных точек

Пусть $p \in X^T$ — неподв. точка

Пусть $[p] \in K_T(X)$ - класс такой
что

$$[p]\big|_q = 0 \quad \text{if} \quad p \neq q.$$

$\Rightarrow$ определен с точностью до множителя из $K_T(pt) = \mathrm{char}(T)$;

Пример: $K_T(T^*\mathbb{P}^n) = \dfrac{\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, a_1^{\pm} \dots a_{n+1}^{\pm}, \hbar]}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})}$

Ограничение $\quad x\big|_{p_i} = a_i \; ; \quad i = 1 \dots n+1$

$$\Rightarrow [p_i] = \prod_{j \neq i} (x_i - a_j)$$

Локализованная К-теория

$$K_T(X)_{loc} := K_T(X) \otimes Q$$

разрешаем "знаменатели" от. перем. $a_1, \dots a_n, \hbar$.

$$Q = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots a_n, \hbar) =: K_T(p)_{loc}$$

Пусть $\widetilde{[p_i]} = \dfrac{[p_i]}{[p_i]|_{p_i}} \in K_T(X)_{loc}$

Так, что $\widetilde{[p_i]}\Big|_{p_j} = \delta_{i,j}$

Предл 1: $K_T(X)_{loc} \simeq Q^{|X^T|}$ (Q – векторное пространство размерности $|X^T|$)

с базисом $\widetilde{[p]}$, $p \in X^T$.

Док-во: Пусть $f \in K_T(X)_{loc}$

$$\Rightarrow \quad g = \sum_{p \in X^T} f|_p \cdot \widetilde{[p]}$$

тогда $(f-g)|_p = 0 \quad \forall p \in X^T$

$$\Rightarrow \quad f = g \quad \Rightarrow \quad f = \sum_{p \in X^T} f|_p \cdot \widetilde{[p]}$$

теорема локализации в экв. K-теории.

другими словами $K_T(X)_{loc} \simeq K_T(X^T)_{loc}$

Предл: Пусть $\vartheta \in K_T(X)$

рассмотрим оператор $\vartheta\otimes$, тензорного умножения на ϑ:

$$K_T(X)_{loc} \longrightarrow K_T(X)_{loc}$$

$$\gamma \longmapsto \vartheta\otimes\gamma$$

Тогда $\vartheta\otimes$ диагонален в базисе $\widetilde{[p]}$ с собственными значениями $\vartheta|_p$

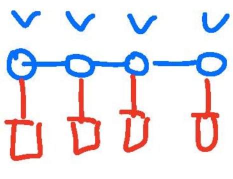
Док-во: Рассмотрим класс

$$g = \vartheta\otimes\widetilde{[p]} - \vartheta|_p\cdot\widetilde{[p]}$$

Тогда, очевидно что $g|_q = 0 \quad \forall\, q\in X^T$

$\Rightarrow g=0 \iff \vartheta\otimes\widetilde{[p]} = \vartheta|_p\cdot\widetilde{[p]}$

Будем использовать обозначения:



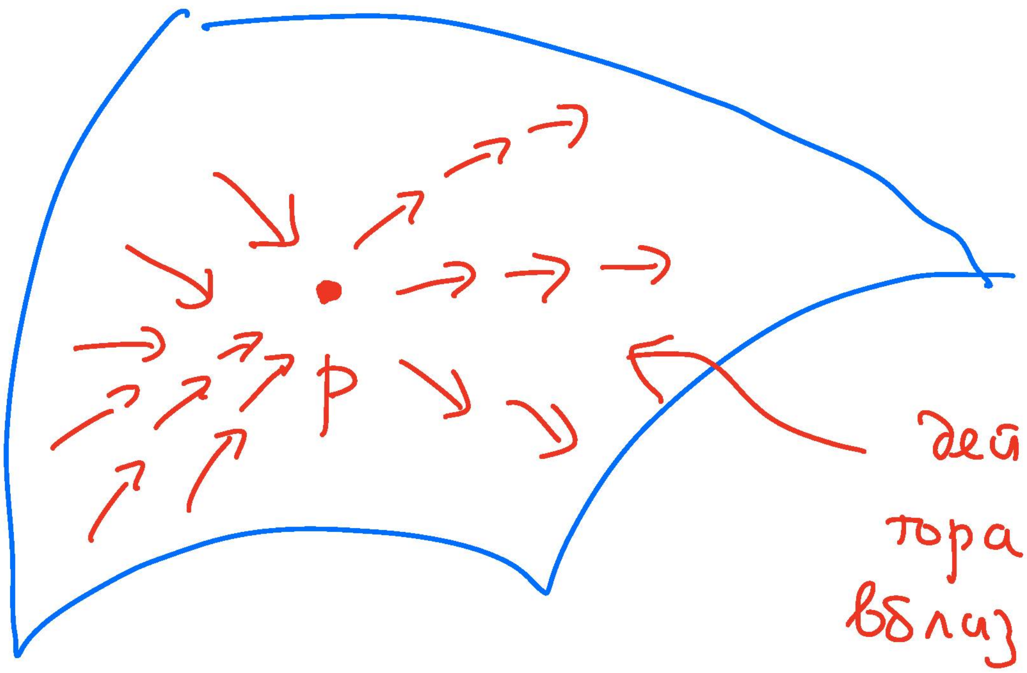
$\rightsquigarrow K_T\left(\coprod_v X(v,w)\right)_{loc} \simeq F_1(u_1)\otimes\dots\dots\otimes F_l(u_l)$

для $\mathbb{Q}$-векторного пространства с базисом $\widetilde{[p]} \in X(v,w)^T$

На $F_1(u_1)\otimes\ldots\otimes F_k(u_k)$ действуют операторы тензорного умножения на $V_1 \ldots V_k$ и их тензорные полиномы.

$\Longleftrightarrow$ Гамильтонианы в спин. цепочках.

Применение $K_T(X)$: касательное расслоение



действие тора $T \circlearrowright X$ вблизи неподв. точки

Тор действует на T_pX. Как посчитать характер T_pX?

$$X = \mu^{-1}(0)^{ss}/G \qquad \mu^{-1}(0)^{ss} \subset T^*R$$

$$\Rightarrow \dim X = 2\dim R - 2\dim G$$

$$\dim X = 2\sum_{i\to j} v_i v_j + 2\sum_i v_i w_i - 2\sum_i v_i^2$$

Рассмотрим элемент $T^{1/2}X \in K_T(X)$:

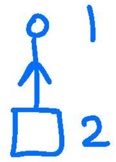
$$T^{1/2}X = \sum_{i\to j} \mathcal{V}_i^* \otimes \mathcal{V}_j + \sum_i W_i^* \otimes \mathcal{V}_i - \sum_i \mathcal{V}_i^* \otimes \mathcal{V}_i$$

и "виртуальное" кас. пр-во:

$$\boxed{TX = T^{1/2}X + \hbar^{-1}\, T^{1/2}X^* \quad \in K_T(X)}$$

Ограничения $TX|_p$ дают хар-р T_pX.

Пример:



$\mathcal{V} = x$

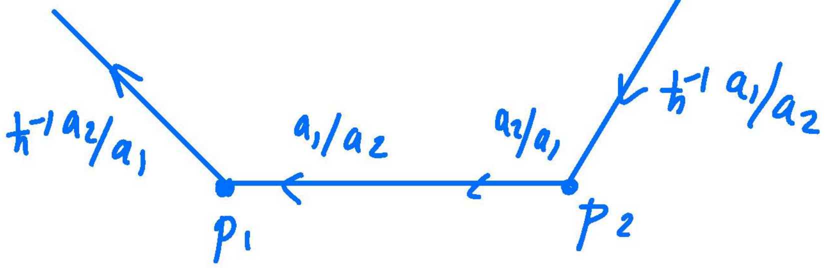
$W = a_1 + a_2$ $\qquad x|_{p_i} = a_i$

$$T^{1/2}X = W^* \otimes \mathcal{V} - \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V} = (a_1^{-1} + a_2^{-1})\, x - 1$$

$$TX = T^{1/2}X + \hbar^{-1} T^{1/2}X^* = (a_1^{-1} + a_2^{-1})\, x + \hbar^{-1}(a_1 + a_2)\, x^{-1} - 1 - \hbar^{-1}$$

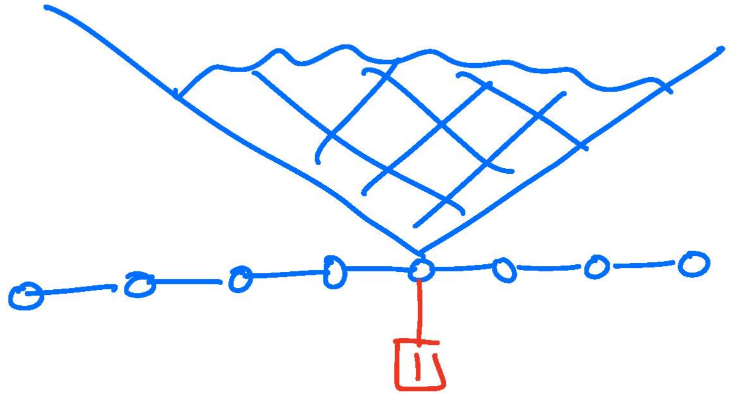
$$TX|_{p_1} = \left(a_1^{-1} + a_2^{-1}\right) a_1 + \hbar^{-1}(a_1 + a_2)\, a_1^{-1} - 1 - \hbar^{-1} = a_1/a_2 + \hbar^{-1}\frac{a_2}{a_1}$$

$$TX|_{p_2} = (a_1^{-1} + a_2^{-1})\, a_2 + \hbar^{-1}(a_1 + a_2)\, a_2^{-1} - 1 - \hbar^{-1} = a_2/a_1 + \hbar^{-1}\, a_1/a_2$$



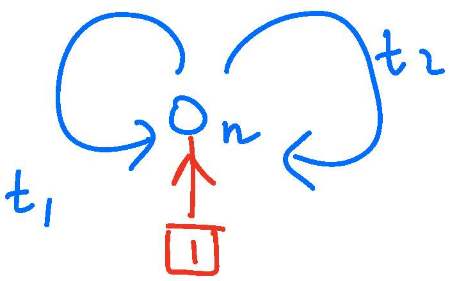
$= T^*\mathbb{P}^1$

Задача 1



доказать что $TX|_p = 0$

Задача 2:



Доказать что:

$$T_\lambda X = \sum_{\square\in\lambda} t_2^{a_\lambda(\square)+1}\, t_1^{-l_\lambda(\square)} + t_1^{l_\lambda(\square)+1}\, t_2^{-a_\lambda(\square)}$$

где