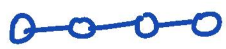
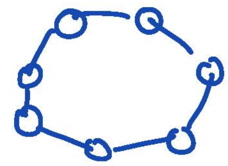
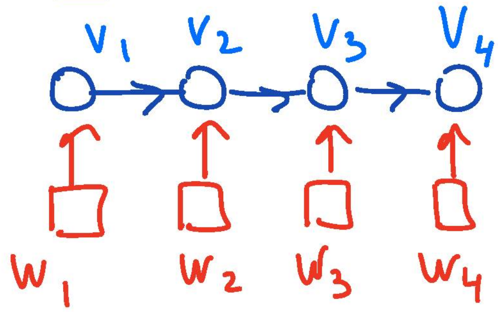
Лекция 2

- Действие тора на $X(v,w)$
- Структура тензорного произведения
- Неподвижные точки
- тавтологические расслоения над $X(v,w)$
- Ограничение расслоений в неподвижные точки.
- Эквивариантная K-теория $X(v,w)$

Действие тора на $X(v,w)$

В этой лекции:  или 

Опр:



$$\begin{cases} R = \bigoplus\limits_{i\to j} V_i^* \otimes V_j \bigoplus\limits_k W_k^* \otimes V_k \\ T^*R = R \oplus R^* \\ X(v,w) = \mu^{-1}(0) /\!/_\theta G \end{cases}$$

(1) тор $\mathbb{C}^\times_\hbar$ действует на T^*R:

$$R \oplus R^* \longrightarrow R \oplus R^* \cdot \hbar$$

$\Rightarrow$ индуцирует действие на $X(v,w)$.

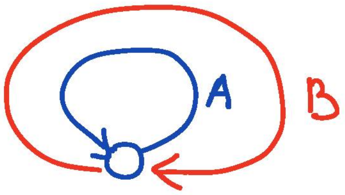
(2) Тор $A = (\mathbb{C}^\times)^{w_1+\ldots+w_m}$ действует

как $\begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_\ell \end{pmatrix}$ на $\bigoplus\limits_i W_i$

$\Rightarrow$ индуцирует действие на $X(v,w)$.

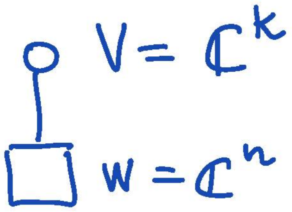
$$T = \mathbb{C}^\times_\hbar \times A \iff A = \ker(\hbar) \subset T.$$

(3) если есть петли, то:



$$(A, B) \to (aA, a^{-1}B).$$

Пример:



$$\Rightarrow X = T^*Gr(k,n).$$

- Тор $\mathbb{C}^\times_\hbar$ действует скалируя кокасат. направления в $T^*Gr(k,n)$ с характером $\hbar$.

- Тор A действует на $\mathbb{C}^n$ как:

$$\begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Получаем индуц. действие на $T^*Gr(k,n)$.

Как описать множество $T^*Gr(k,n)^A$?

k-подпространство $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$ сохраняется относительно действия A если и только если $\mathbb{C}^k = \mathrm{span}\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$.

$$T^*Gr(k,n)^A = \left\{ \begin{array}{l} \text{множество } k \\ \text{координатных подпростр.} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left| T^*Gr(k,n)^A \right| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Заметим, что

$$\left| T^*Gr(k,n)^A \right| \simeq \dim \mathcal{H}_{n,k}$$

и

$$\left| \coprod_{k=0}^{n} T^*Gr(k,n)^A \right| \simeq \dim(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{n}) = 2^n.$$

Цель: понять $X(v,w)^A$ для общего колчана.

Структура тензорного произведения:

$$W = \bigoplus W_i \circlearrowleft A$$

Пусть $W = W_1 \oplus W_2$ – произв. разложение

так что $w = w_1 + w_2$,

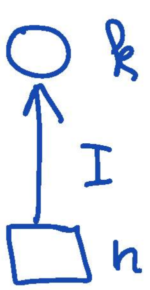
и пусть $A' \subset A$ подтор действующий

на W:
$$W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1 a_1 \oplus W_2 a_2$$

Теорема:

$$X^{A'}(v, w) = \coprod_{v_1 + v_2 = v} X(v_1, w_1) \times X(v_2, w_2)$$

Док-во:



$$I = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}\right\} k}_{n}$$

идея: I – A' фикс. точка если

$$\varphi(a)\, I\, a = I \qquad \begin{cases} a \in A' \\ \varphi(a) \in G \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * & & & & & \\ & * & & & & \\ & & * & & & \\ & & & * & & \\ & & & & * & \\ & & & & & * \end{pmatrix}}_{\varphi(a)} \; I \; \begin{array}{c} \overset{n_1}{\longleftrightarrow} \quad \overset{n_2}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & & & & \\ & a_1 & & & & \\ & & \ddots\ a_1 & & & \\ \hline & & & a_2 & & \\ & & & & a_2 & \\ & & & & & a_2 \end{array}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow$ это возможно только если

$$\varphi(a) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_1^{-1} & & & \\ \hline & & & a_2^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_2^{-1} \end{array}\right) \quad \overset{k_1}{\longleftrightarrow} \quad \overset{k_2}{\longleftrightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad I = \begin{array}{c} \overset{n_1}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad & k_1 \quad 0 \\ \hline 0 & \quad \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \updownarrow k_2 \end{array} \\ \underset{n_2}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

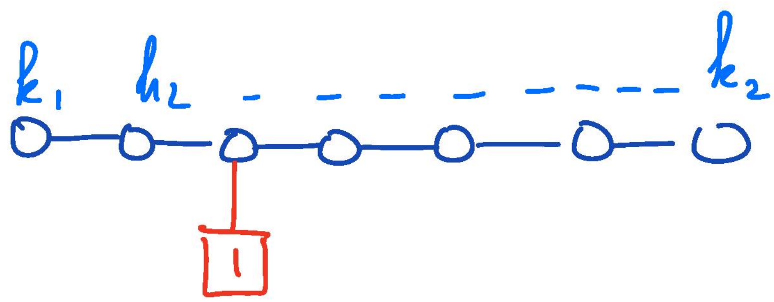
Следствие:

$$X(v,w)^A = \coprod_{v_1+\dots+v_\ell = v} X(v_1,\delta_1) \times \dots \times X(v_\ell, \delta_\ell)$$

где $\delta_i = (0,0,\dots 1, 0 \dots, 0)$ – единичный фрейминг

и $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell = w$

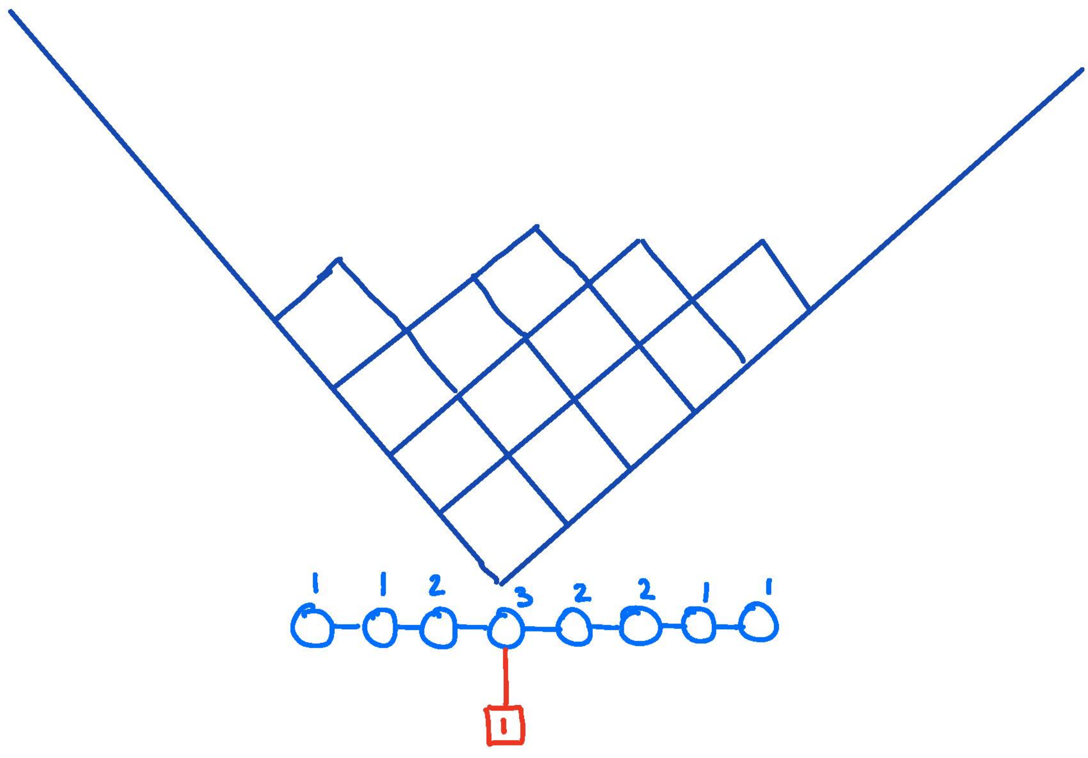
$X(k, \delta_i) =$



Для $\theta = \theta^-$, несложно доказать что

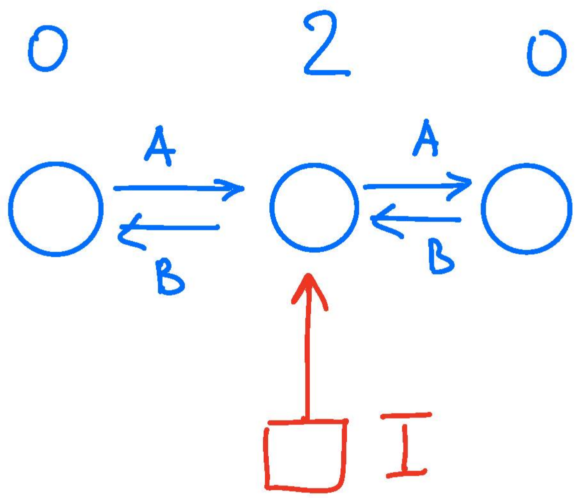
$$X(v, \delta) = \text{point}$$

если профайл v есть диаграмма Юнга повернутая на 45°, с центром в δ:



в противном случае $X(v, w) = \varnothing$.

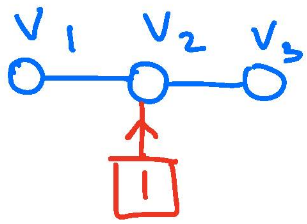
Идея:



— невозможна.

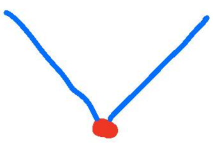
Пример:

Найти все возможные $v = (v_1 v_2 v_3)$ для:



для которых $X(v, \delta) \neq \emptyset$:

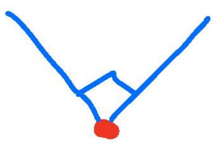
1



$\lambda = \emptyset$

$v = (0, 0, 0)$

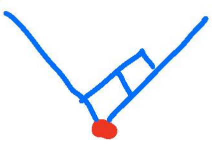
2



$\lambda = \emptyset$

$v = (0, 1, 0)$

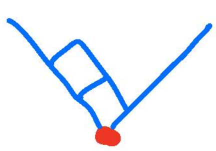
3



$\lambda = \emptyset$

$v = (0, 1, 1)$

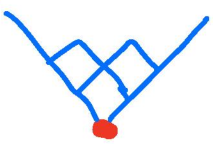
4



$\lambda = \emptyset$

$v = (1, 1, 0)$

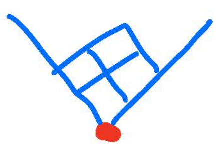
5



$\lambda = \emptyset$

$v = (1, 1, 1)$

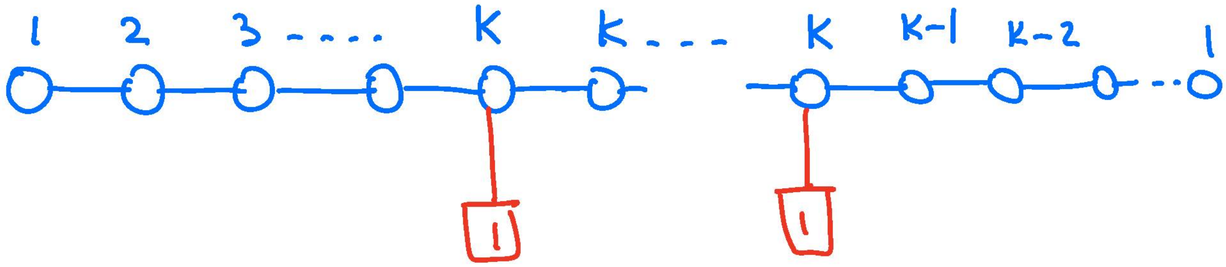
6



$\lambda = \emptyset$

$v = (1, 2, 1)$

Пример: Рассмотрим колчанное многообр: для A_n - колчана с размерностями

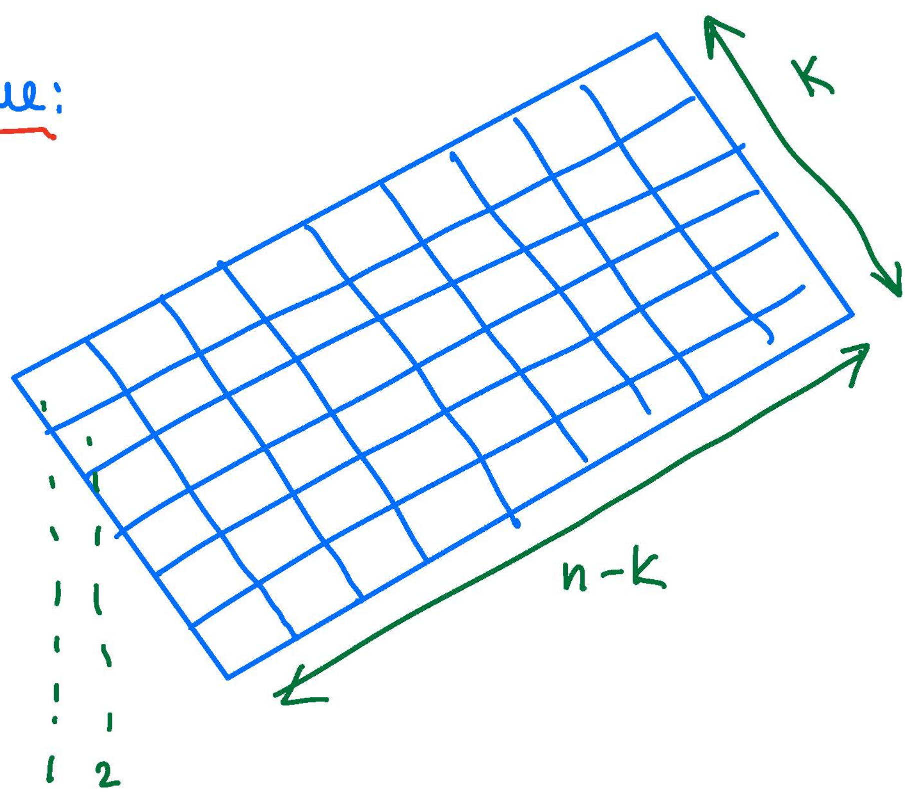


$$X(v,w) \text{ — симплектически двойственное}$$

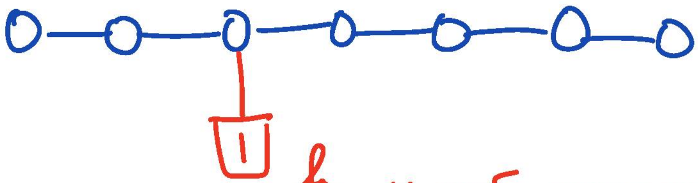
(3D-mirror of)

$$X^!(v,w) = T^*Gr(k,n).$$

Решение:



Упр.



A_{N-1}

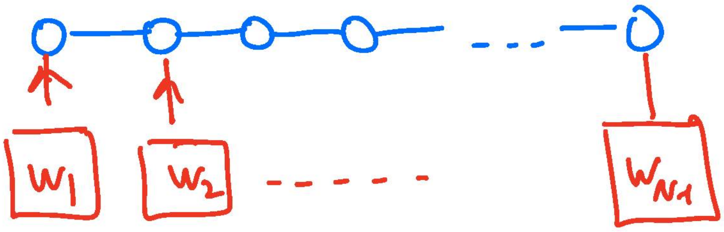
в к-той позиции.

$\Rightarrow$ число $\left|\coprod_v X(v,\delta)\right| = \dim\left(\Lambda^k \mathbb{C}^N\right)$

построить биекцию между

$\coprod_v X(v,\delta)$ и весовыми подпр. в

Следствие: Пусть $X(v,w)$ ассоциирован с A_{N-1} колчаном:

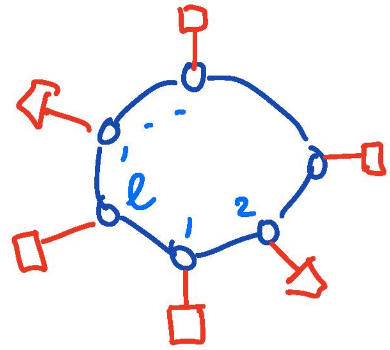


тогда:

$\mathbb{C}$- функции на

$$\coprod_v X(v,w)^A = \left(\mathbb{C}^N\right)^{\otimes w_1} \otimes \left(\Lambda^2 \mathbb{C}^N\right)^{\otimes w_2} \cdots \left(\Lambda^{N-1} \mathbb{C}^N\right)^{\otimes w_{N-1}}.$$

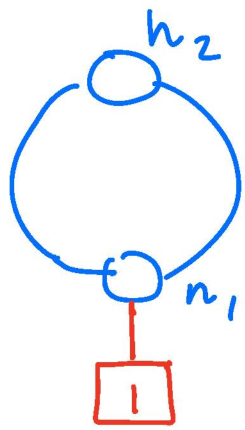
Что если колчан циклический?



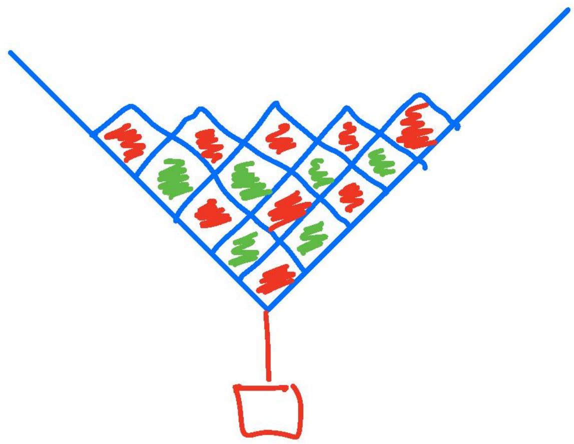
⇒ считаем клетки в диаграмме Юнга по модулю ℓ:

Пример:

$X =$



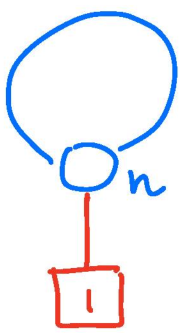
⇒



$X^A =$ множество диаграмм Юнга с

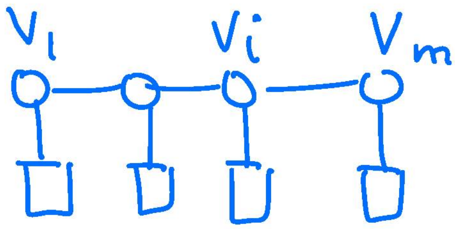
$\#$ клеток $= n_1$, $\#$ клеток $= n_2$

Пример:



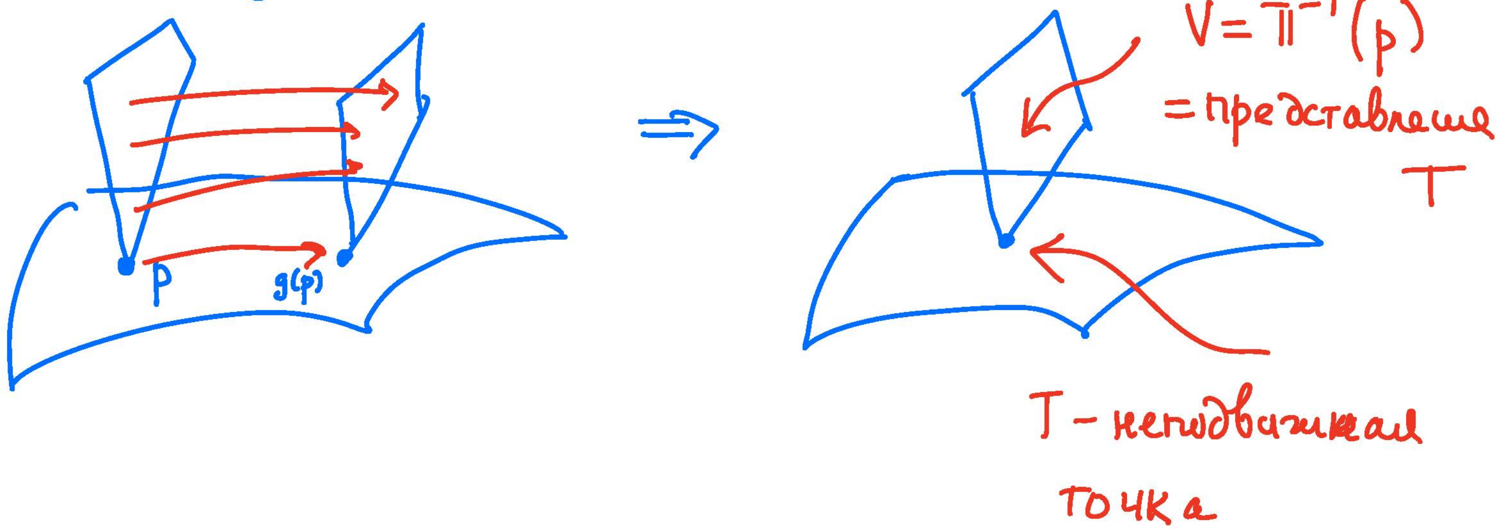
⇒ Все диаграммы Юнга с n-клетками.

Тавтологические расслоения:



$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_i & = & \mu^{-1}(0)^{ss}\times V_i/G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & = & \mu^{-1}(0)^{ss}/G \end{array}$$

По конструкции $\mathcal{V}_i$ – T-эквивариантны

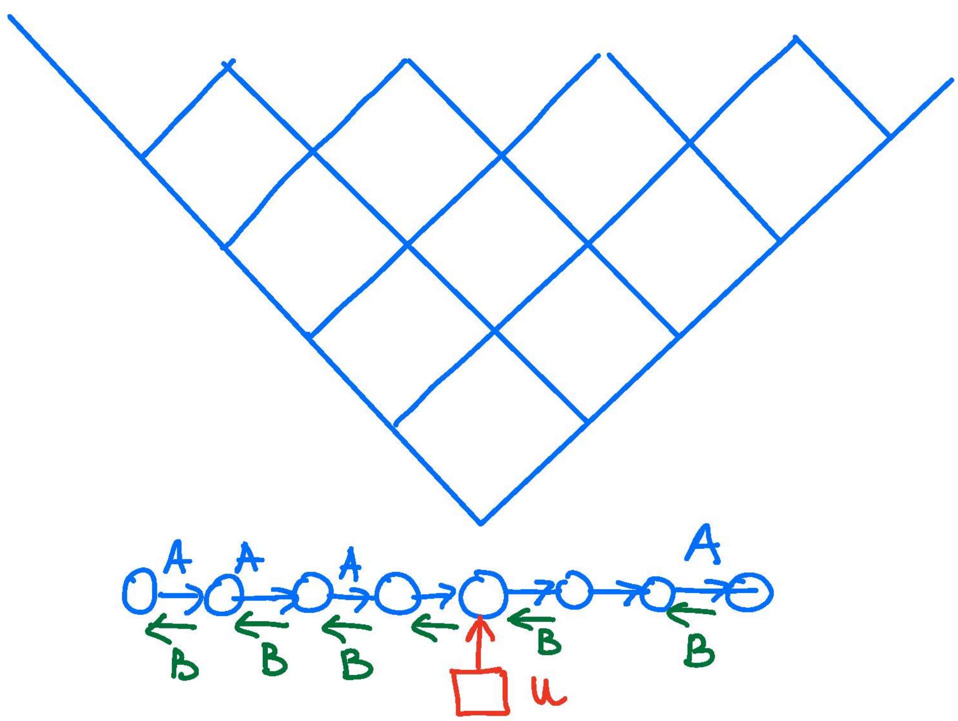


Хотим понять:

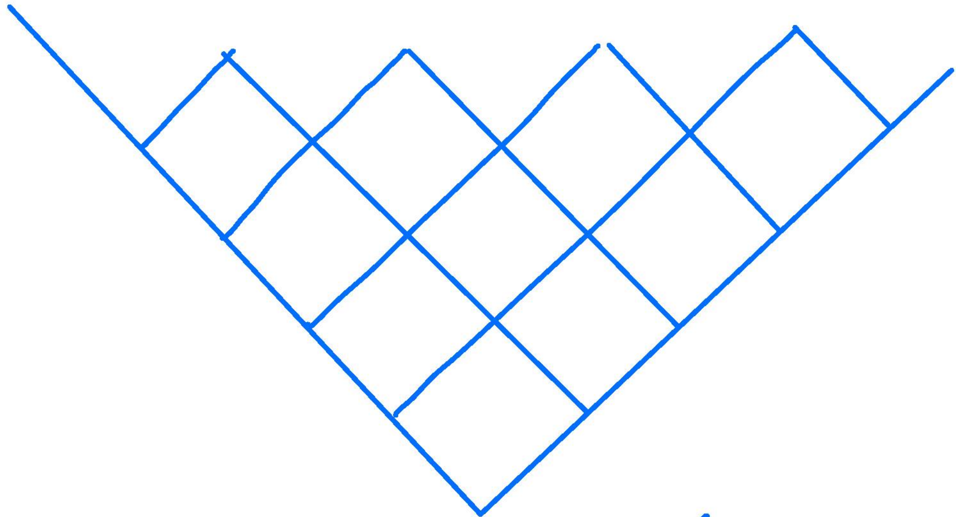
$$\mathcal{V}_p \in \mathrm{char}(T) = K_T(p)$$

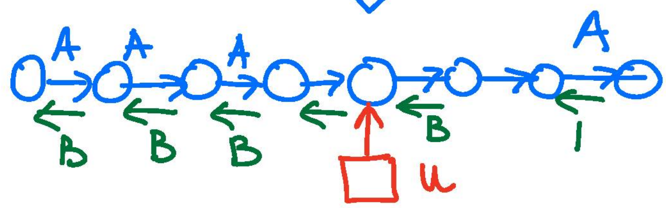
Пример:

Пусть $\theta = \theta^-$

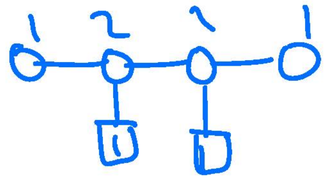


Пример: $\theta = \theta^+$

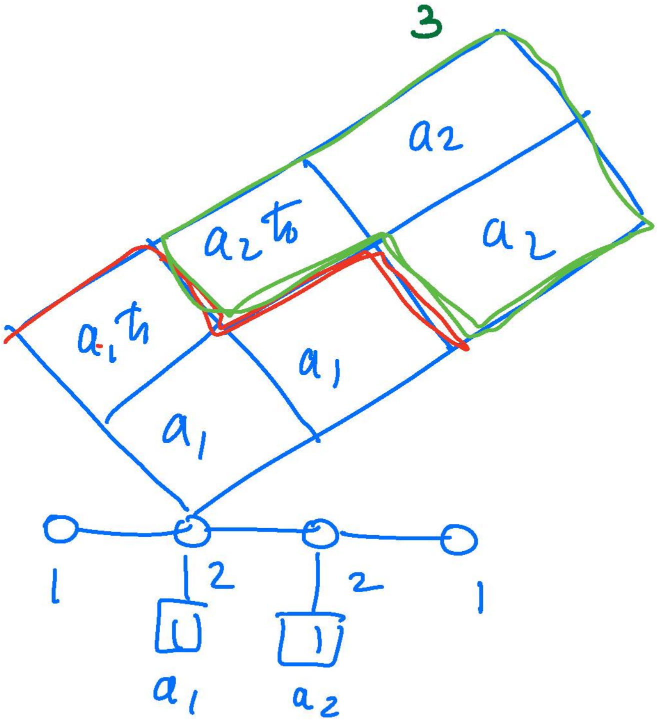




Пример:

$X =$ 

$=$ "Mirror of $T^*Gr(2,5)$"



$$\tilde{V}_1|_p = a_1\hbar$$

$$\tilde{V}_2|_p = a_1 + a_2\hbar$$

$$\tilde{V}_3|_p = a_1 + a_2$$

$$\tilde{V}_4|_p = a_2.$$

Эквивариантная K-теория $X(v,w)$

Неформально:

"$K_T(X)$ = кольцо порожденное всеми тавтологическими расслоениями $\mathcal{V}_1 \ldots \mathcal{V}_n$ относительно $\otimes$ и $\oplus$, по модулю элементов которые ограничиваются в 0 в T- неподвижных точках."

Явно (1) Рассмотрим i-ое тавтолог. расслоение

$\mathcal{V}_i$ ранга v_i.

(2) Сопоставим $\mathcal{V}_i$ сумму:

$$\mathcal{V}_i = x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,v_i}$$ ("Корни Черна")

(3) Любой тензорный полином от $\mathcal{V}_i$ = симм. функция от $x_{i,j}$:

Например:

$$\mathcal{V}_i^{\otimes 2} = (x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{i,v_i})^2,$$

$$\Lambda^k \mathcal{V}_i^{\otimes 2} = e_k(x_{i1} \ldots x_{iv_i})$$

$\Rightarrow$ Алгебра всех $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$ относительно $\otimes$, $\oplus$ есть:

$$\mathbb{Q}\left[\underbrace{x_{1,1}^{\pm 1} \dots x_{1 v_1}^{\pm 1}}; \underbrace{x_{21}^{\pm 1} \dots x_{2 v_2}^{\pm 1}}; \dots \underbrace{x_{m,1}^{\pm 1} \dots x_{m, v_m}^{\pm 1}}\right]^{sym}$$

<u>Пусть:</u> $\vartheta_i \Big|_p = a_1 + \dots + a_{v_i} \in char(T)$

Тогда любой элемент $f(x \dots)$ из

Ограничивается очевидно:

$$f(\dots x_{i1} \dots x_{i,v_i} \dots) = f(\dots . a_j, \dots, a_{v_i} \dots)$$

$$K_T(X) = \mathbb{Z}\left[\underbrace{x_{1,1}^{\pm 1} \dots x_{1 v_1}^{\pm 1}}; \underbrace{x_{21}^{\pm 1} \dots x_{2 v_2}^{\pm 1}}; \dots \underbrace{x_{m,1}^{\pm 1} \dots x_{m, v_m}^{\pm 1}}\right]^{sym} \Big/ \left\{ f(x \dots x)\big|_p = 0, \ p \in X^T \right\}.$$