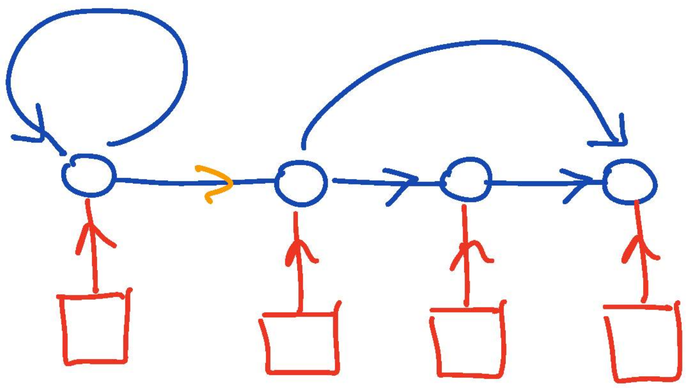
Лекция 1 (часть 2)

- Определение конечного многообразия
- Примеры
- Условия стабильности и Келеровы параметры Z.

Колчанные многобразия

Колчан с фреймингом



$V = (v_1, \dots v_m) \in \mathbb{N}^m$ — вектор размерносту

$V_i = \mathbb{C}^{v_i}$

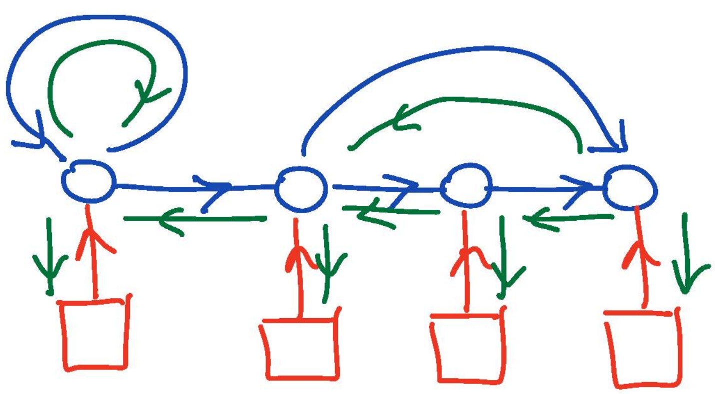
$w = (w_1, \dots w_m) \in \mathbb{N}^m$ — фреймингг

$W_i = \mathbb{C}^{w_i}$

Представление колчана:

$$R = \bigoplus_{i \to j} \mathrm{Hom}(V_i, V_j) \oplus \bigoplus_i \mathrm{Hom}(W_i, V_i)$$

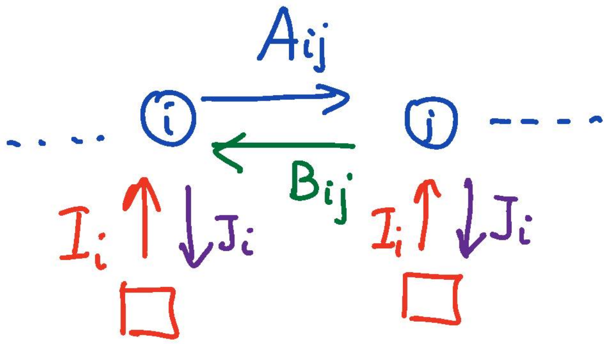
$T^* R = R \oplus R^*$ — симпл. пространство



$T^*R(v,w)$

представление удвоенного колчана.

Обозначения:



$$\begin{cases} A_{ij} \in \mathrm{Hom}(V_i, V_j) \\ B_{ij} \in \mathrm{Hom}(V_j, V_i) \\ I_i \in \mathrm{Hom}(W_i, V_i) \\ J_i \in \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \end{cases}$$

$$A = \bigoplus_{ij} A_{ij}; \quad B = \bigoplus B_{ij}; \quad I = \bigoplus I_i; \quad J = \bigoplus J_i$$

$$T^*R = \{(A, B, I, J)\}.$$

На T^*R действует $G = \prod_i GL(V_i)$

элемент $(g_1 \dots g_m) \in G$:

$$A_{ij} \to g_j A_{ij} g_i^{-1} \qquad I_i \to g_i I_i$$

$$B_{ij} \to g_i B_{ij} g_j^{-1} \qquad J_i \to J_i g_i^{-1}$$

Действие G на T^*R соответствует отображению моментов:

$$\mu : T^*R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}nd(V_i) \simeq g^*$$

$$\mu : (A, B, I, J) \longmapsto [A, B] + IJ$$

$$\mu^{-1}(0) \subset T^*R$$
$$\shortparallel$$
$$\{ (A, B, I, J) : [A, B] + I \cdot J = 0 \}.$$

Заметим, что G действует на $\mu^{-1}(0)$.

Мы хотим:

$$"X = \mu^{-1}(0)/G"$$

" Множество матриц (A, B, I, J) удовлетворяющих $\mu = 0$ по модулю выбора базиса в V_i "

Плохой фактор, например: $\mathbb{C}^* \circlearrowright \mathbb{C}^{n+1}$

$$\mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^{\times} - ? \quad \text{но} \quad \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}^n$$

Условие стабильности:

$$\theta \in \mathrm{char}(G) = \{ G \longrightarrow \mathbb{C}^\times \}$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{Z}^m :$$

$$\theta : \quad G \longrightarrow \mathbb{C}^\times ;$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \\ (g_1 \ldots g_m) & \rightarrow & \prod_{i=1}^{m} \det(g_i)^{\theta_i} ; \end{array}$$

$$\mu^{-1}(0)^{\theta\text{-semistable}} = \mu^{-1}(0) \Big\backslash \left\{ \text{"плохие элементы"} \right\}$$

Описание из GIT:

$$(A, B, I, J) \in \mu^{-1}(0)^{\theta\text{-semistable}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

Для любого набора подпространств $S_i \subset V_i$ инвариантных относительно A, B выполняется:

- $S_i \subset \mathrm{Ker}(J_i) \ \forall i \implies \theta \cdot s \leq 0$
- $\mathrm{Im}(I_i) \subset S_i \ \forall i \implies \theta \cdot s \leq \theta \cdot v$

Определение:

$$\boxed{X_\theta(v,w) = \mu^{-1}(0)^{\theta\text{-semistable}} \big/ G}$$

Канонические условия стабильности

Условия стабильности для общих θ сложно анализировать.

Ситуация упрощается для:

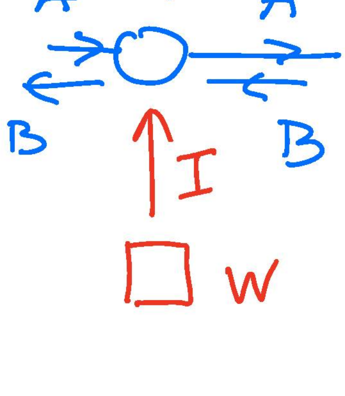
$\theta^+ = (1, 1, \dots 1)$ или $\theta^- = (-1, -1, \dots -1)$:

$\theta = \theta^+$: Для подпр. $S_i \in V_i$ сохран. отн. A, B:

$$S_i \subset \operatorname{Ker}(J_i) \ \forall i \implies S_i = 0$$

$\theta = \theta^-$: Для подпр. $S_i \in V_i$ сохран. отн. A, B:

$$\operatorname{Im}(I_i) \subset S_i \ \forall i \implies S_i = V_i$$

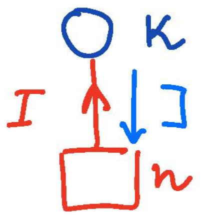


Образы $\operatorname{Im}(I)$ $\Rightarrow$ порождают все V по действию A, B.

т.е. $\forall v \in V$ имеет вид

$v = f(A,B)\, i$, $i \in \operatorname{Im}(I)$.

Пример:



$V = \mathbb{C}^k, \quad W = \mathbb{C}^n$

условие стабильности $\theta = \theta^-$

Нет A, B $\Rightarrow$ любое $S \in \mathrm{Im}(I)$ устойчиво отн. $A \cdot B$

$\Rightarrow S = \mathrm{Im}(I) = V \Rightarrow \mathrm{rk}(I) = k.$

Заметим что условие стабильности дает ограничение на размерность $k \leq n$.

$$X(k,n) = \left\{ \begin{array}{ll} I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^k) & I \cdot J = 0 \\ J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n) & \mathrm{rk}(I) = k \end{array} \right\} \Big/ GL(k).$$

$$\simeq T^* Gr(n-k, n);$$

условие стабильности $\theta = \theta^+$

если $S \subset \mathrm{Ker}(J) \Rightarrow S = 0$

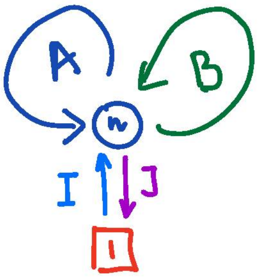
$\Rightarrow \mathrm{rk}(J) = k$

Опять, условие стабильности $\Leftrightarrow$ $k \leq n$.

$$X = \left\{ \begin{array}{ll} I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^k), & I \cdot J = 0 \\ J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n), & \mathrm{rk}(J) = k \end{array} \right\} \Big/ GL(k)$$

$$\simeq \; T^* Gr(k, n);$$

Пример



$V = \mathbb{C}^n, \quad W = \mathbb{C}$

условие стабильности $\quad \theta = \theta^-$

$$i = I(1) \in V$$

условие стабильности.

$$S = \{ f(A,B) \cdot i \} = V$$

$$X(n,k) = \left\{ \begin{array}{l|l} J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) & i = \text{cyclic for } A, B \\ I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) & [A,B] + IJ = 0 \\ A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) & \end{array} \right\} \Big/ GL(k)$$

$$\simeq \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \overset{\mathrm{def}}{=\!=}$$

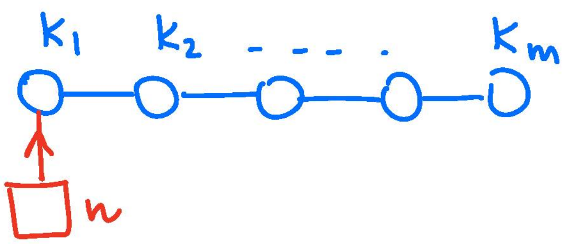
$$= \{ J \subset \mathbb{C}[x,y] : \dim(\mathbb{C}[x,y]/J) = n \}.$$

Отождествление $\quad V = \mathbb{C}[x,y]/J \simeq \mathbb{C}^n$

$x, y \circlearrowright \mathbb{C}[x,y]/J \Longrightarrow$ дают A, B.

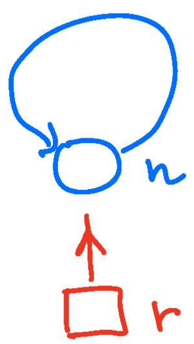
$V = \mathbb{C}[x,y]/J$ порождается из 1 действием x, y
$\Rightarrow 1 \rightsquigarrow i$ циклический вектор.

Другие важные примеры



для $\theta = \theta^+ \Longrightarrow \quad n \geqslant k_1 \geqslant k_2 \dots \geqslant k_m$

$$X = T^*Flag(\mathbb{C}^{k_m} \subset \dots \mathbb{C}^{k_1} \subset \mathbb{C}^n) = T^*G/P$$



$\Rightarrow$ $X(n,r)$ = пространство модулей $SU(r)$ инстантонов на $\mathbb{P}^2$ с $c_2 = n$.

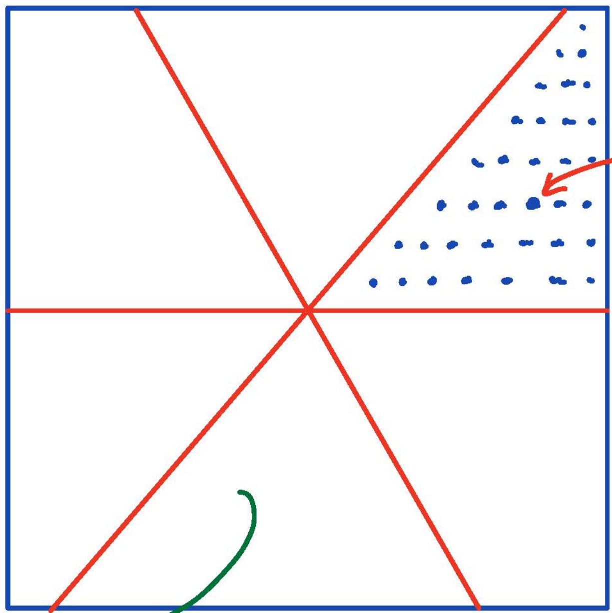
Келерово пространство модулей

$\mathrm{char}(G) \simeq \mathbb{Z}^m$ ← m – число вершин в колчане

$\mathrm{char}(G)\otimes \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}^\times)^m = K$ – "Келеров тор".

$\mathrm{char}(G)\otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^m = \mathrm{Lie}_{\mathbb{R}}(K) \ni \theta$ – stability condition.

Как меняется $X_\theta(v,w)$ если мы меняем θ?



$\mathbb{R}^m$

$\theta = (\theta_1 \dots \theta_m)$

Обозначим $(z_1 \dots z_m)$ – координаты на K.

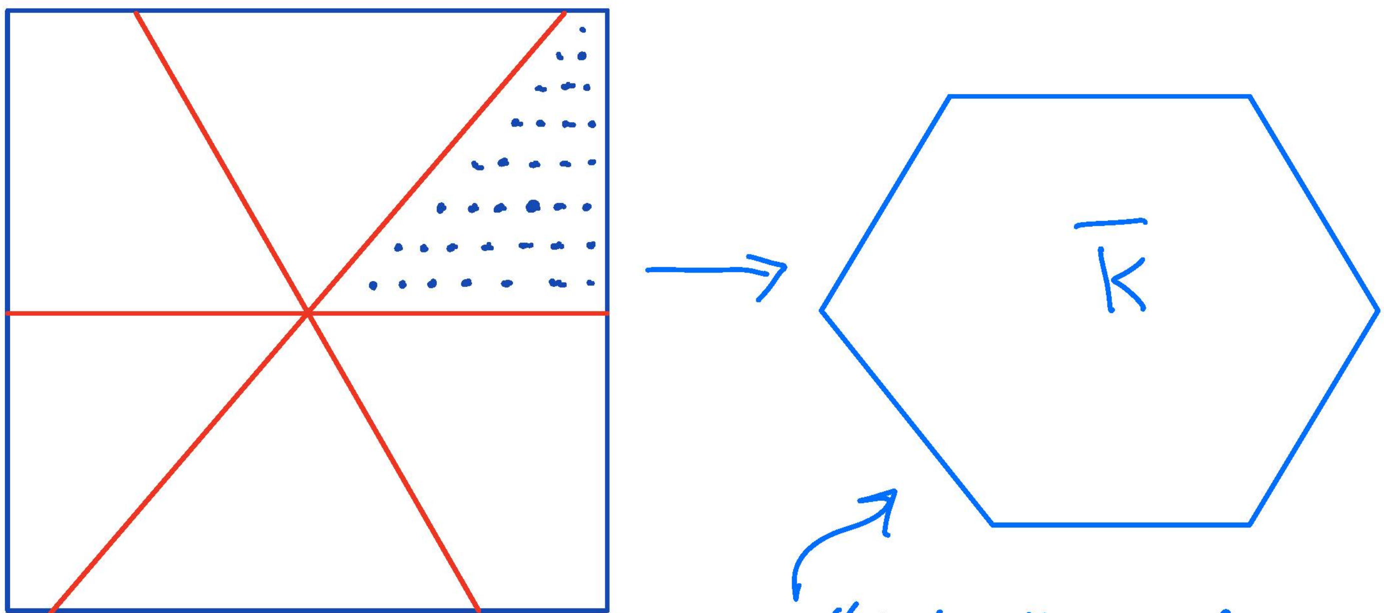
Каждому θ соответвует $z^\theta = z_1^{\theta_1} \dots z_m^{\theta_m}$ – функция на K.

Разбиению $\mathbb{R}^m$ в конусы соответсвует "торическое многообразие" = некоторая компактификация $\overline{K}$ тора K.

Конструкция: Хотим добавить к K новые точки "∞" такие что

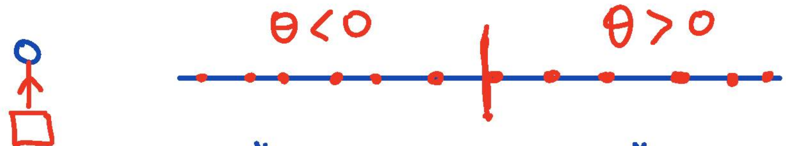
$$\sum_{\theta \in \text{конус}} a_\theta z^\theta \text{ – голом. ф-ция}$$

See David Cox: "What is a toric variety"



"торическая картинка"

<u>Пример</u>



$T^*Gr(n-k,n)$ $\quad$ $T^*Gr(k,n)$.

$$K = \mathbb{C}^\times \ni z$$

Хотим добавить к $\mathbb{C}^\times$ две "∞"

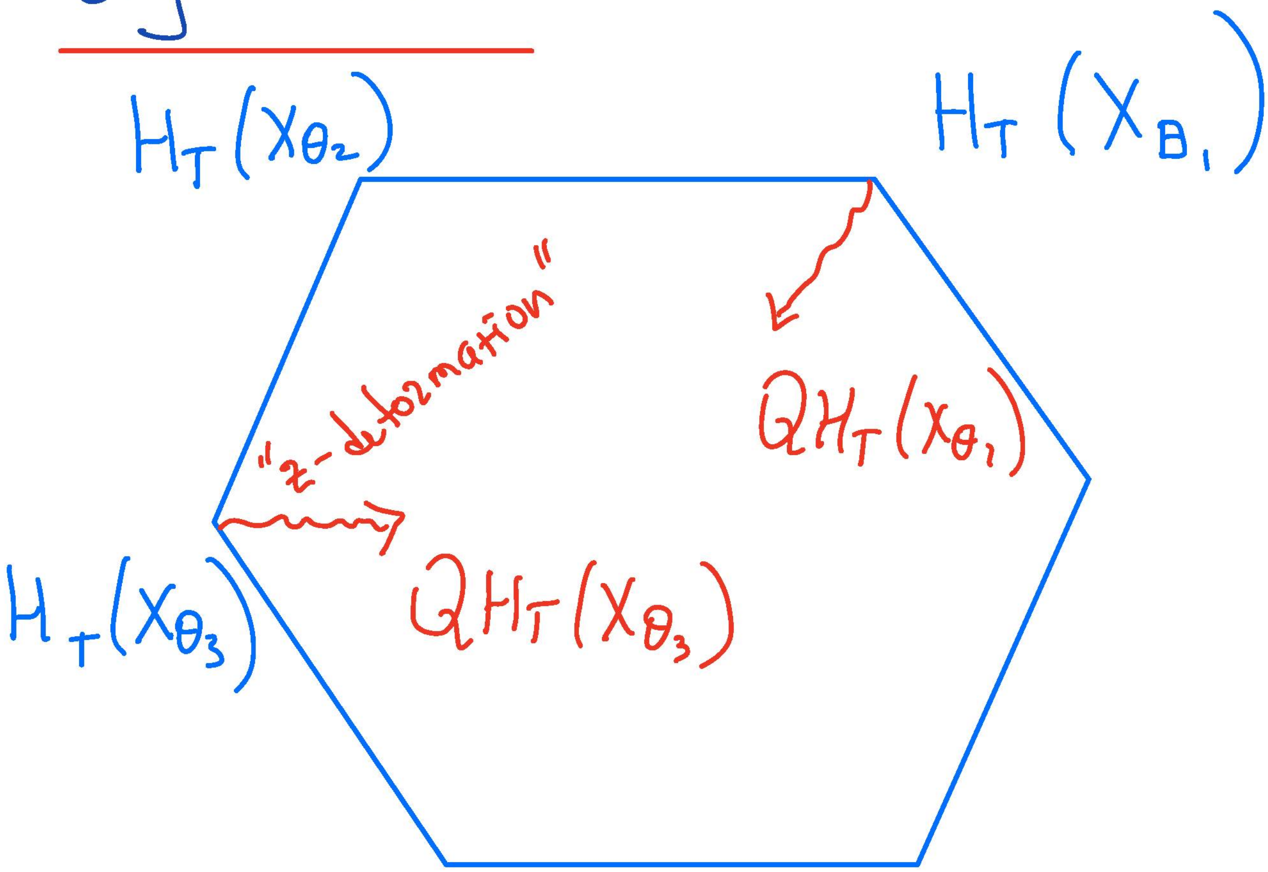
для которых $\sum a_i z^i$ и $\underline{\sum a_i z^{-i}}$

хороше ф-ии

$$\sum a_i z^i \rightsquigarrow z = 0 \qquad \sum a_i z^{-i} \rightsquigarrow z = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \overline{K} = \mathbb{C}^{\times} \cup \{0\} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$$

"Big Picture"



(1) все $H_T(X_{\theta_3})$ имеют одни и те же квантовые деформации.

(2) дифф. и разностные ур-ия

– глобальные объекты на $\overline{K}$.

Пример:

0 —— $\mathbb{P}^1 \ni z$ —— ∞

$H^*(T^*Gr(n-k,n))$ $\qquad$ $H^*(T^*Gr(k,n))$

То-же z
что и в
$A = \begin{pmatrix} z & \\ & z^{-1} \end{pmatrix}$ в спиновой цепочке

$QH^*(T^*Gr(k,n))$
$\parallel$
алгебра гамильтонианов в спиновой цепочке.