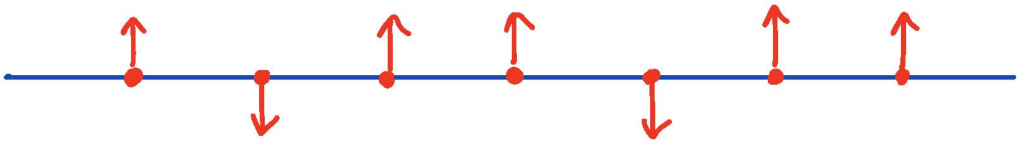
Лекция 1

- Спиновая цепочка Гейзенберга
- Пр-во состояний
- Параметры
- R-матрицы
- Общие спиновые цепочки
- Связь с пространствами Накаджимы
- Определение пр-в Накаджимы
- Примеры.

Спиновые цепочки:



N - частиц

Пространство состояний

$$\mathcal{H}_n \simeq \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{n} \qquad \text{basis} = \{ |\uparrow, \uparrow, \downarrow \ldots \uparrow \rangle \}$$

Взаимодействие описывается гамильтонианом:

$$H^{(2)} = \sum_{i=1}^{N-1} H^{(2)}_{i,i+1}$$

$$H^{(2)}_{i,i+1} = \sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \otimes \sigma_{i+1}^z$$

(только соседние спины взаимодейсвуют)

Существуют "старшие гамильтонианы"

$H^{(m)}$ = полином по σ степени σ

такие что $\quad [H^{(m)}, H^{(2)}] = 0$

Например, полный спин:

$$H^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z$$

$H^{(1)} |\uparrow, \downarrow \dots \uparrow\rangle =$ число $\uparrow$ $-$ число $\downarrow$.

$\Rightarrow$ Пространство состояний имеет весовое разложение:

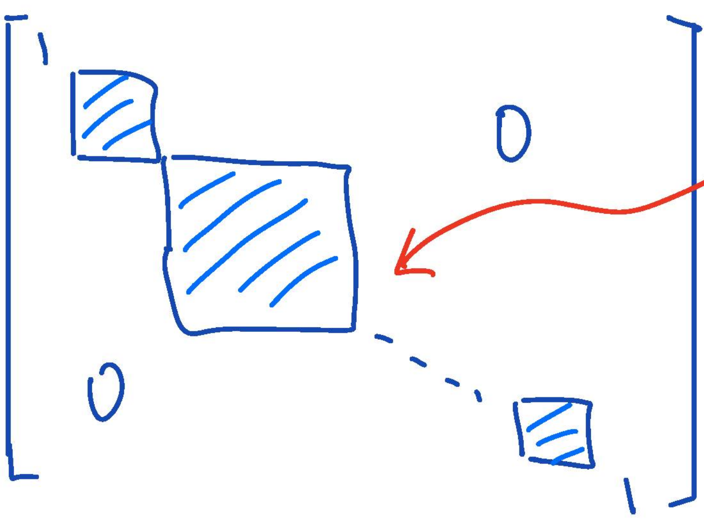
$$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_{n,k}$$

подпространство состояний с k спинами $\uparrow$.

$$\dim \mathcal{H}_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Все гамильтонианы $H^{(m)}$ сохраняют $\mathcal{H}_{n,k}$ т.к. $[H^{(m)}, H^{(1)}] = 0$.

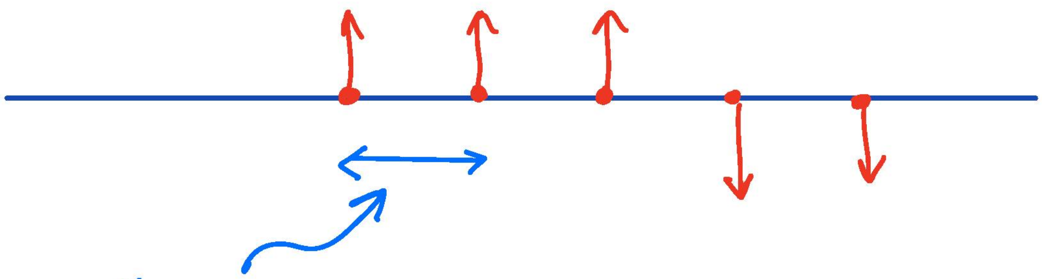
$\Rightarrow$ $H^{(m)} =$



$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ dimens. blocks.

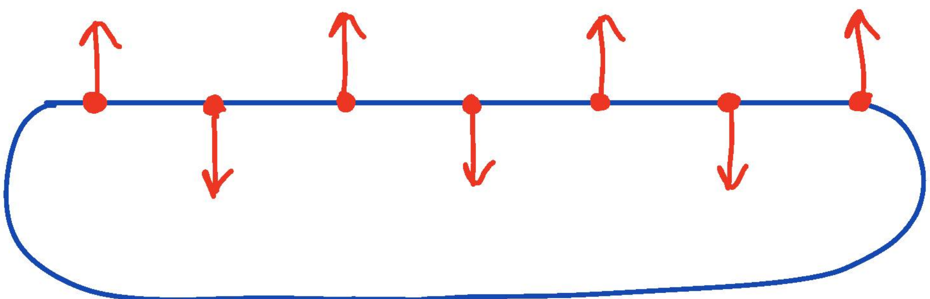
Интегрируемые деформации:

① $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^2(u_1) \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2(u_n)$



"расстояние" $u_i - u_j$

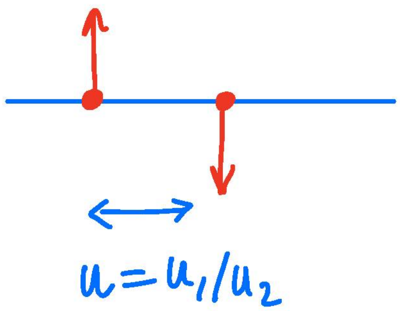
② Периодические гран- условия $\mathbb{C}^2_1 \overset{A}{\simeq} \mathbb{C}^2_{n+1}$



$$\simeq A = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

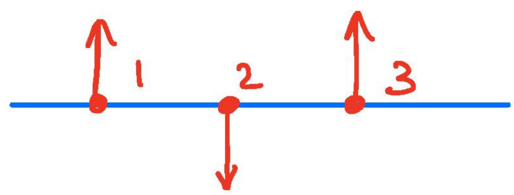
- z – динамический параметр или "келеров" параметр

Построение гамильтонианов:



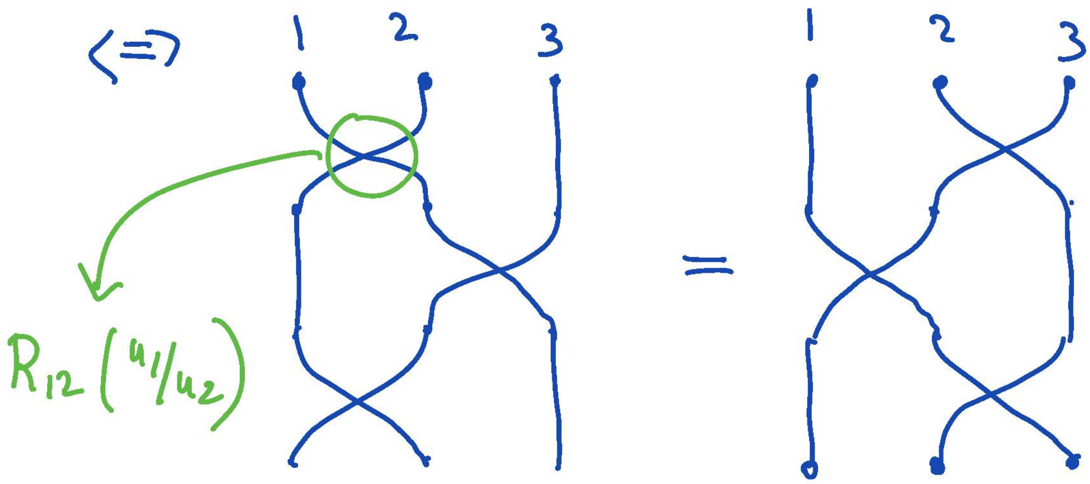
$$R(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-u)\hbar^{1/2}}{\hbar - u} & \frac{u(\hbar-1)}{\hbar - u} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar - 1}{\hbar - u} & \frac{\hbar^{1/2}(1-u)}{\hbar - u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решает YBE в



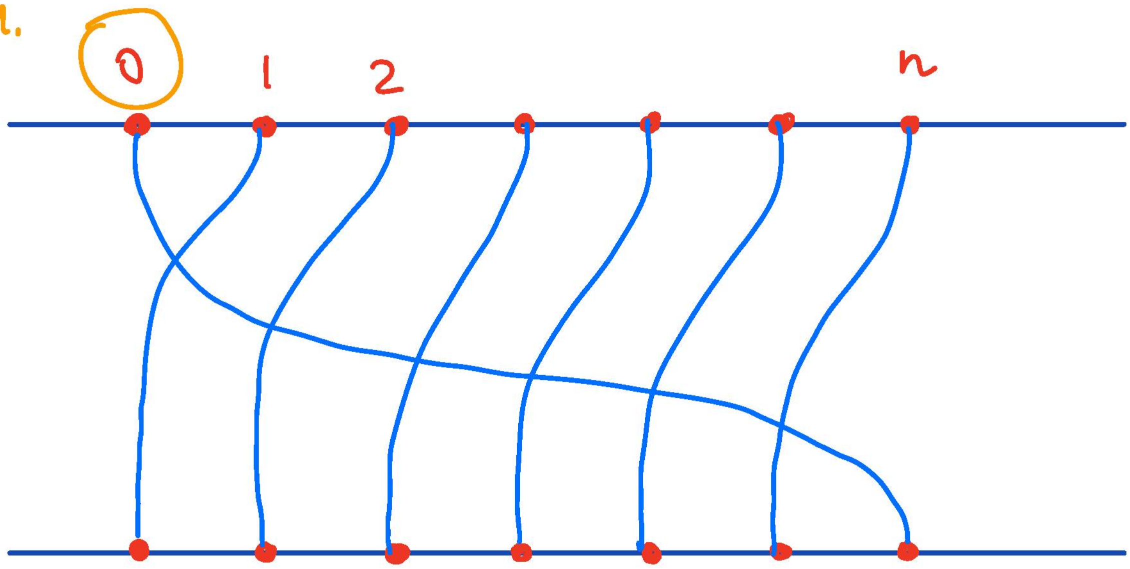
$$R_{12}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) R_{13}\left(\frac{u_1}{u_3}\right) R_{23}\left(\frac{u_2}{u_3}\right) = R_{23}\left(\frac{u_2}{u_3}\right) R_{13}\left(\frac{u_1}{u_3}\right) R_{12}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$$

$\Leftrightarrow$



R-матрица = главный объект в построении спиновой цепочки.

вспом. пр.



$$T(u_0) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2_0}\left[\begin{pmatrix} z & \\ & z^{-1}\end{pmatrix}_0 \cdot R\left(\frac{u_0}{u_n}\right) \dots R\left(\frac{u_0}{u_2}\right) R\left(\frac{u_0}{u_1}\right)\right]$$

1 $T(u_0) \in \mathrm{End}\left(\mathcal{H}_n = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n}\right)$

2 Из YBE для R-матриц следует:

$$\boxed{T(a)\,T(b) = T(b)\,T(a)}, \quad \forall\, a, b$$

3 $T(u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} H^{(m)} u_0^m$

$$\Rightarrow \left[H^{(m)}, H^{(s)}\right] = 0$$

Коэффициенты разложения $T(u)$ = гамильтониан спин. цепочки.

Внутренняя симметрия

сохраняющаяся величина = симметрии $\mathcal{H}_n$

$\Rightarrow$ Спиновая цепочка имеет бесконечномерную алгебру симметрий $U_\hbar(\widehat{sl}_2)$.

$U_\hbar(\widehat{sl}_2)$ имеет представления $\mathbb{C}^2(u)$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^2(u_1) \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2(u_n)$$

- представления алгебры $U_\hbar(\widehat{sl}_2)$.

Элементы $U_\hbar(\widehat{sl}_2)$ действуют на $\mathcal{H}_n$ как матричные элементы:

$$\left\{ \operatorname{tr}_{\mathbb{C}_0} \left(m_0 R_{0,1}(u_0/u_1) \ldots R_{0,n}(u_0/u_n) \right) \right\}$$

$$= \operatorname{Im}\left(U_\hbar(\widehat{sl}_2) \longrightarrow \operatorname{End}(\mathcal{H}_n) \right).$$

Теория представлений подсказывает как обобщать цепочку Гейзенберга:

① $\mathbb{C}^2(u) \rightsquigarrow \mathbb{C}^m(u)$ — m-мерное представление $U_\hbar(\widehat{sl_2})$

② $U_\hbar(\widehat{sl_2}) \rightsquigarrow U_\hbar(\widehat{sl_n})$; $\mathcal{H}_n = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$

③ Найти другие R-матриц = решения QYBE:

$$R^{Rat} \leftsquigarrow R^{trig} \leftsquigarrow R^{ell}$$

x $\qquad$ $\sin(x)$ $\qquad$ $\theta(x)$

Yangians $Y_\hbar(g)$

Quantum affine algebras $U_\hbar(\widehat{g})$

Elliptic quantum groups $E_{\hbar,\tau}(\widehat{g})$.

Другие направления:

Диагонализация гамильтонианов — анзац Бете.

Собственные векторы $H^{(m)}$ в $\mathcal{H}_{n,k}$ имеют вид:

некоторые явные рац. ф-ции от x_i

$$v = \sum_{\uparrow\downarrow} f(x_1, \dots x_k) \, |\uparrow, \uparrow, \downarrow \dots \uparrow\rangle$$

v — собственный для $H^{(m)}$ е.т.и. x_i — решают уравнения Бете:

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k} \left(\frac{x_i - x_j \hbar}{x_i \hbar - x_j} \right) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_i - u_j}{x_i - u_j \hbar} \right) = z \, \hbar^{-n/2}$$

= есть ровно $\dim(\mathcal{H}_{n,k})$ — хороших решений.

Дифференциальные и разностные уравнения

Корреляционные функции спиновых цепочек решают дифф. уравнения по параметрам

u_i — уравнения Книжника-Замолодчикова

z — динамические уравнения

В геометрии появляются как квантовые связности в квантовых когомологиях (в K-теории)

Симметрия по параметрам $u_i \longleftrightarrow z$

= симплектическая двойственность

= трехмерная зеркальная симметрия.

План: связь с колчанными многообразиями

- Что такое пространство состояний $\mathcal{H}_{n,k}$?

- Что такое базис $|\uparrow,\downarrow,\ldots\uparrow\rangle$?

- Что такое R-матрица?

- Что такое параметры $u_1,\ldots u_n$?

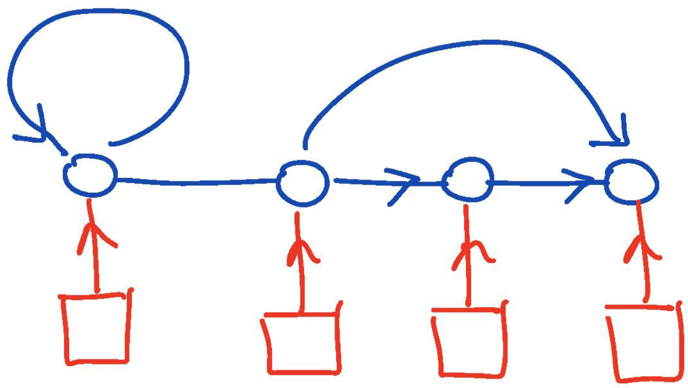
- Что такое z?

- Бете анзац? Бете векторы?

- Более общие спиновые цепочки?

Колчанные многообразия

Колчан с фреймингом



$V = (V_1, \dots V_n)$

– вектор размерности

$w = (w_1, \dots w_n)$

– фрейминг

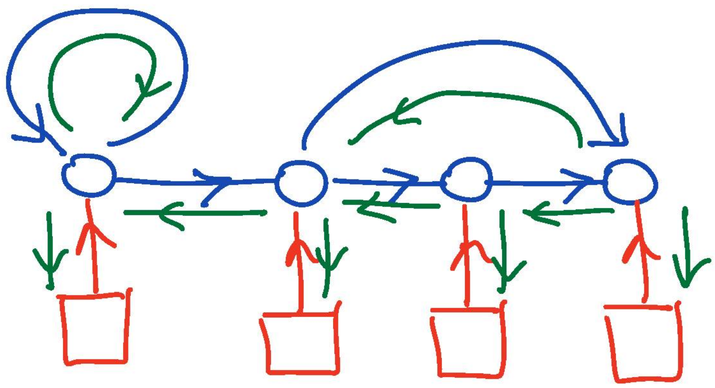
Представление:

$$R(v,w) = \bigoplus_{i \to j} V_i^* \otimes V_j \bigoplus_i W_i^* \otimes V_i$$

где $V_i = \mathbb{C}^{v_i}$; $W_i = \mathbb{C}^{w_i}$

Симплектическое пространство

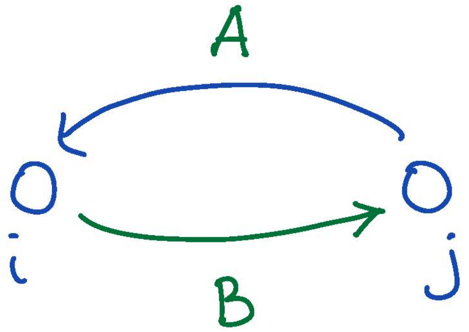
$$T^* R(v,w) = R(v,w) \oplus \underbrace{R^*(v,w)}_{\text{стрелки в обратном направлении}}$$



$T^*R(v,w)$

представление удвоенного колчана.

На $T^*R(v,w)$ действует $G = \prod_{i=1}^{n} GL(V_i)$



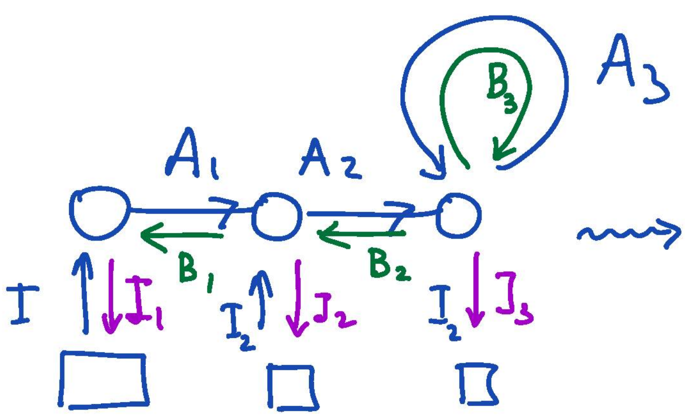
$$\Rightarrow \begin{cases} A \longrightarrow g_i A g_j^{-1} \\ B \longrightarrow g_j B g_i^{-1} \end{cases}$$

$g_i \in GL(V_i)$

Действие G на $T^*R(v,w)$ гамильтоново

$$\Rightarrow \quad \mu : T^*R(v,w) \longrightarrow \mathfrak{g}^* \simeq Lie(G)$$

отображение момента.



$$\rightsquigarrow \left.\begin{aligned} A &= \oplus A_i \\ B &= \oplus B_i \\ I &= \oplus I_i \\ J &= \oplus J_i \end{aligned}\right\}$$

$$(A, B, I, J) \in T^* R(v, w)$$

$$\Rightarrow \mu(A, B, I, J) = [A, B] + IJ \in \bigoplus \operatorname{End}(V_i) \cong \mathfrak{g}$$

Определение колчанного многообразия

$\theta \in \operatorname{char}(G)$; явно $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$

$$\theta : (g_1 \dots g_m) \to \prod_{i=1}^{m} \det(g_i)^{\theta_i}$$

Определение: Колчанное многообразие $X(v, w)$ ассоциированное с колчаном и размерностями $v = (v_1 \dots v_n)$, $w = (w_1, \dots w_n)$ и параметром стабильности $\theta \in \operatorname{char}(G)$ есть симплектическая редукция:

$$X_\theta(v, w) = \mu^{-1}(0) /\!/_\theta \, G$$

GIT quotient for character θ.

$$\mu^{-1}(0)/\!\!/_{\theta} G = \mu^{-1}(0) \cap \left\{ \begin{matrix} \theta\text{- стабильные} \\ \text{точки} \end{matrix} \right\} \Big/ G$$

Ситуация аналогична:

$\mathbb{C}^n / \mathbb{C}^* - ?$ но $\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right) / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}^n$.

Описание θ-стабильных точек (Лекции Гинзбурга)

$$(A, B, I, J) \in \mu^{-1}(0) \cap \left\{ \begin{matrix} \theta\text{- стабильные} \\ \text{точки} \end{matrix} \right\}$$

$\Longleftrightarrow$

Для любого набора подпространств $S_i \subset V_i$ инвариантных относительно A, B

тогда если

- $S_i \subset \operatorname{Ker}(J_i) \ \forall i \implies \theta \cdot s \leq 0$
- $\operatorname{Im}(I_i) \subset S_i \ \forall i \implies \theta \cdot s \leq \theta \cdot v$

Специальные выборы условий стабильности

$\theta^+ = (1, 1, \dots 1)$; $\theta^- = (-1, -1, \dots -1)$

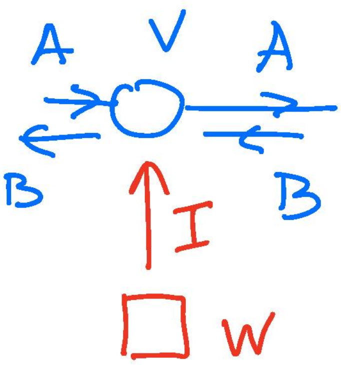
same as $\theta_i > 0$ or $\theta_i < 0 \quad \forall i$

Если $\theta = \theta^+$ то для тех-же $S_i \subset V_i$

$$S_i \subset \mathrm{Ker}(J_i) \ \forall i \implies S_i = 0$$

Если $\theta = \theta^-$ то для тех-же $S_i \subset V_i$

$$\mathrm{Im}(I_i) \subset S_i \ \forall i \implies S_i = V_i$$



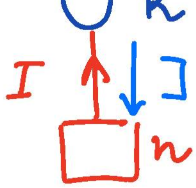
$\Rightarrow$ Образы $\mathrm{Im}(I)$ порождают все V по действию A, B.

$\forall v \in V$

$$v = f(A,B)\, i \qquad i \in \mathrm{Im}(I)$$

$f(A,B)$ - полином от A, B.

Пример:



$V = \mathbb{C}^k, \quad W = \mathbb{C}^n$

условие стабильности $\theta = \theta^-$

Нет $A, B \implies$ любое $S \in \mathrm{Im}(I)$ устойчиво отн. $A.B$

$\implies S = \mathrm{Im}(I) = V \implies \mathrm{rk}(I) = k.$

Заметим что условие стабильности даёт ограничение на размерность $k \leq n$.

$$X(k,n) = \left\{ \begin{matrix} I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^k) & I \cdot J = 0 \\ J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n) & \mathrm{rk}(I) = k \end{matrix} \right\} \Big/ GL(k).$$

$$\simeq T^* Gr(n-k, n);$$

условие стабильности $\theta = \theta^+$

если $S \subset \mathrm{Ker}(J) \Rightarrow S = 0$

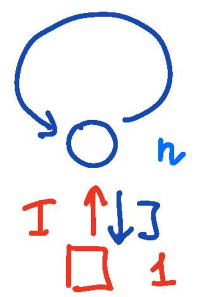
$\Rightarrow \mathrm{rk}(J) = k$

Опять, условие стабильности $\Leftrightarrow$ $k \leq n$.

$$X = \left\{ \begin{matrix} I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^k), & I \cdot J = 0 \\ J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n), & \mathrm{rk}(J) = k \end{matrix} \right\} \Big/ GL(k)$$

$$\simeq T^* Gr(k, n);$$

Пример



$$V=\mathbb{C}^n, \quad W=\mathbb{C}$$

условие стабильности $\theta=\theta^-$

$$i = I(1) \in V$$

условие стабильности.

$$S=\{ f(A,B)\cdot i \} = V$$

$$X(n,k) = \left\{ \begin{array}{c} J\in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}) \\ I\in \mathrm{Hom}(\mathbb{C},\mathbb{C}^n) \\ A,B\in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n) \end{array} \middle| \begin{array}{c} i = \text{cyclic for } A,B \\ [A,B]+IJ=0 \end{array} \right\} \Big/ GL(k).$$

$$\simeq \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$$

$$= \left\{ J \subset \mathbb{C}[x,y] : \dim\left(\mathbb{C}[x,y]/J\right) = n \right\}.$$

Отождествление

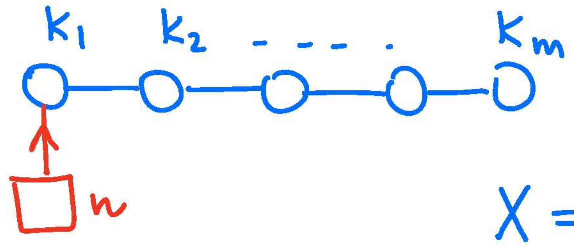
$$V = \mathbb{C}[x,y]/J \simeq \mathbb{C}^n$$

$x,y \circlearrowright \mathbb{C}[x,y]/J \Rightarrow$ дают A, B.

$\mathbb{C}[x,y]/J$ порождается из 1 действием x,y

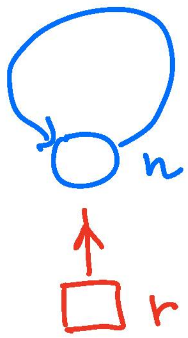
$\Rightarrow 1 \rightsquigarrow i$ циклический вектор.

Другие важные примеры



$\Rightarrow \quad n \geqslant k_1 \geqslant k_2 \dots \geqslant k_m$

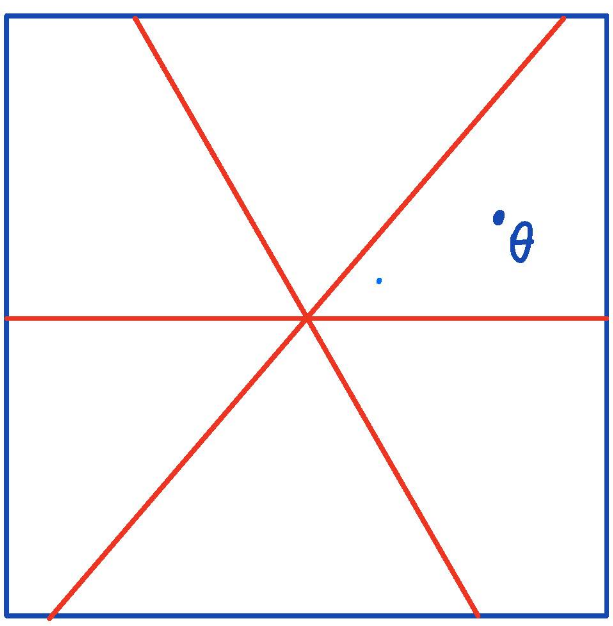
$$X = T^* Flag(\mathbb{C}^{k_m} \subset \dots \mathbb{C}^{k_1} \subset \mathbb{C}^n)$$



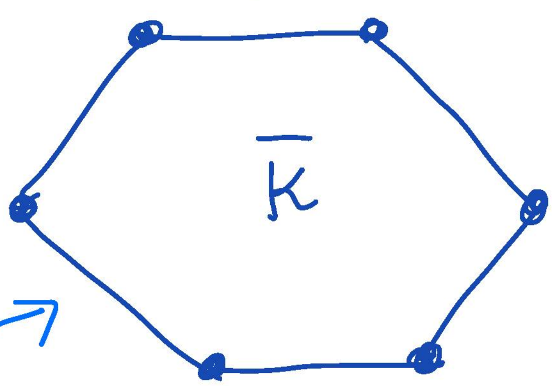
$\Rightarrow \quad X(n, r) =$ пространство модулей $SU(r)$ инстантонов на $\mathbb{P}^2$ с $c_2 = n$.

Келерово пространство модулей

$$char(G) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^m \ni \theta, \qquad K = char(G) \otimes \mathbb{C}^\times$$



$\mathbb{R}^m$



торическое многообразие.

$\theta = (\theta_1, \ldots \theta_m)$: $\quad \mathbb{C}^\times \longrightarrow K$.

$z_1 = z^{\theta_1} \ldots . \quad z_m = z^{\theta_m}$; "Хотим добавать предельные точки $z \to \infty$ для всех выборов z!"

Пример  $\rightsquigarrow$ $\theta > 0$, $\theta < 0$ $\qquad K = \mathbb{C}^\times \ni z$