Системы Хитчина (семинар)

(см. лекции Кричевера)

План:

1) Прямая спектральная задача
   - род кривой
   - степень расслоения
2) Обратная спектральная задача
3) Изоспектральная эволюция
   - отображение Абеля
   - линеаризация эволюции

---

1) $A(z)\vec{F}(z,w) = w\,\vec{F}(z,w)$,

$A(z) = z^n A_n + \dots + A_0$, $\quad A_i \in \mathrm{Mat}_m$

$\det(A(z) - w\mathbb{1}) = P(z,w) = 0$

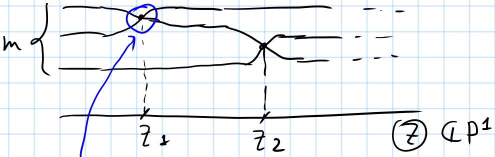
Сколько точек ветвления?

$P(z,w) = (-w)^n + (-w)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,A + \dots + \det A$

$\mathrm{Discr}_w(P(z,w)) = \prod_{i<j}(w_i(z) - w_j(z))^2 = \mathrm{disc}(z)$

$z \to \infty, \quad w \sim \lambda_i z^n$ $\qquad$ λ_i – собств. для A_n

$\mathrm{discr}(z) = \# z^{n m(m-1)} + \ldots, \quad d(z_\alpha) = 0,$



$\# z_\alpha = n m (m-1)$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1 \quad \leftarrow m:1$$

$$w \sim w_\alpha + \sqrt{z - z_\alpha}$$

$$\underset{\substack{\| \\ 2-2g}}{\chi(\mathcal{E})} = m \cdot \underset{\substack{\| \\ 2}}{\chi(\mathbb{C}P^1)} - n m (m-1)$$ Риман – Гурвиц

$$\Downarrow$$

Род: $g = n \dfrac{m(m-1)}{2} - m + 1$ $\qquad$ $m=2: \; g = n - \overset{2}{\overset{\shortparallel}{m}} + 1$

$$(A(z) - w\mathbb{1})\vec{\psi} = 0 \; ; \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

$$\psi_i = \frac{\Delta_{1i}(A-w)}{\Delta_{1m}(A-w)}$$

Пример: $m=2$, $\operatorname{tr} A(z)=0$

$$A(z)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}\end{pmatrix}, \qquad w^2=-\det A(z)$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}-w & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}-w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \qquad \psi_1(z,w)=\frac{A_{11}+w}{A_{21}}$$

$$\vec\psi=\vec e_{1,2}: \quad A(z)\vec e_i=w_i\vec e_i: \quad \vec e_{1,2}=\begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}\pm\sqrt{A_{11}^2+A_{12}A_{21}}}{A_{21}(z)} \\ 1\end{pmatrix}$$

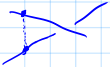
– $w\sim\sqrt{z-z_\alpha} \Rightarrow$ $\boxed{\vec e_1-\vec e_2=O(\sqrt{z-z_\alpha})}$ $\leftarrow A\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

– если $A(z_\alpha)=0 \Rightarrow A_{ij}\sim a_{ij}(z-z_\alpha)$, $\vec e_{1,2}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm\sqrt{a_{11}^2+a_{12}a_{21}} \\ 1\end{pmatrix}$

$w\sim\pm\sqrt{-\det a}\cdot(z-z_\alpha)$

$A\sim\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Нормализация: $\tilde w=\dfrac{w}{z-z_\alpha}$

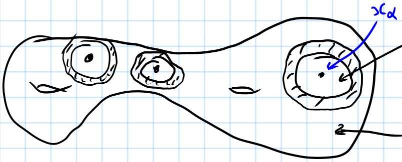


степень: # полюсов у $\vec\psi$ $= n = g+\overset{2}{m}-1$

не $2n$, т.к. "$\dfrac{A_{11}-\sqrt{A_{11}^2-A_{12}A_{21}}}{A_{21}}$" – регулярно

полюса – x_α, $A_{21}(x_\alpha)=0$

Что такое расслоение:



$\vec{\Psi}_{in} = (z - x_\alpha)\cdot \vec{\Psi}_{out}$

$\vec{\Psi}_{out} \sim \begin{pmatrix} \frac{c_1}{z-x_\alpha} \\ \vdots \\ \frac{c_{m-1}}{z-x_\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$

Что происходит:

$$\begin{array}{ccccc} L\otimes L' & \quad & \mathbb{C}^m\times\mathcal{E} & \longleftrightarrow & \ker(A(z)-w) = L' \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{E} & & \mathcal{E} & & \end{array}$$

нет голоно-мий

ф-и переклейки L : $(z-x_\alpha)$ $\qquad L = (L')^*$

$\deg L = g+m-1$

$$\begin{array}{ccc} L\otimes\mathbb{C}^m & \longleftrightarrow & L'\otimes L \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{E} & & \end{array}$$

трив.

степень в общем случае

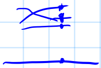
рассмотрим $\hat{\Psi}(z,w) = \begin{pmatrix} \psi_1(z,\overset{\overset{w}{\shortparallel}}{w_1}) & \dots & \psi_1(z,w_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{m-1}(z,\overset{w}{w_1}) & \dots & \psi_{m-1}(z,w_m) \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \otimes \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\varphi}$

строчка $\hat{\Psi} \in H^0(\pi^*\pi_* L)$?

$\hat{\Psi} \in H^0(\pi^*\pi_*(L'\otimes L))$?

$$\begin{array}{ccc} \pi_* L & \quad & \pi^*\pi_* L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{CP}^1 & & \mathcal{E} \end{array}$$

$H^0(U,\pi_* L) := H^0(\pi^{-1}(U), L)$



$\psi_i \cdot \overset{\overset{1 \text{ на } \mathbb{CP}^1\setminus\{x_\alpha\}}{\shortparallel}}{\varphi} \in H^0(L)$, $\psi_i \in H^0(L)$

<u>Утв.</u>: $(\det\hat{\Psi}(z))^2$ — ф-я на $\mathbb{CP}^1$

<u>Утв.</u>: вблизи z_α, т.ч. $i\leftrightarrow j$: $\vec{\Psi}(z,w_i) - \vec{\Psi}(z,w_j) \sim \#\sqrt{z-z_\alpha}$

<u>Утв.</u>: $z\to\infty$, $(\det\hat{\Psi}(z))^2 = \mathrm{const}$ $\Leftarrow$ A_n — диагонализуема

$\Downarrow$

у $(\det\hat{\Psi}(z))^2$ $n\,m(m-1)$ нулей в z_α

$\Downarrow$

у него $n\frac{m(m-1)}{2}$ полюсов 2 порядка в $\overset{\overset{\pi(P_\alpha)}{\shortparallel}}{x_\alpha}$

$\Downarrow$

степень расслоения $\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ \mathcal{E} \end{array} = n\frac{m(m-1)}{2} = g+m-1$

2) Обратная спектральная задача

Дано: $(\mathcal{C}, L, z, w)$ $\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{CP}^1_w \\ \downarrow m:1 & & \\ \mathbb{CP}^1_z & & \end{array}$, $\deg L = g+m-1$

$\mathcal{C} \to \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

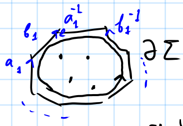
Найти: $A(z)$ (с точностью до сопр.) $\qquad p \mapsto (z(p), w(p))$

Сечения лин. расслоения степени $g+m-1$, заданного точками x_α

$$\Updownarrow$$

функции, которым разрешены полюса 1 порядка в x_α : $f_\psi(z) = \dfrac{\psi(z)}{\psi_m(z)}$, $\psi_m(x_\alpha) = 0$

$\psi_m(z) \cdot f(z) \leftarrow$ голом. сечение



Сколько таких?

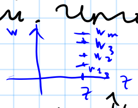
$\forall\, d\omega_i \in H^{1,0}(\mathcal{C}, \mathbb{C})$: $\oint_{\partial\Sigma} d\omega_i \cdot f = 0$ $\quad - g$ условий

$\sum \mathrm{Res}\, f \cdot d\omega_i$

Пример: $m=2$: $\quad d\omega_i = \dfrac{z^{i-1}\,dz}{w}$, $i = 1, \dots, g = n-1$

У ф-и $g+m-1$ главных частей $\dfrac{a_\alpha}{z-x_\alpha}$ + 1 константа $-\ g$ условий. Итого m сечений $\psi_1 \dots \psi_m$.

$p(z, w_k) = 0$



Построим матрицу: $\hat{\psi}(z) = \begin{pmatrix} \psi_1(z, w_1) & \dots & \psi_1(z, w_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{m-1}(z, w_1) & \dots & \psi_{m-1}(z, w_m) \\ \psi_m(z, w_1) & & \psi_m(z, w_m) \end{pmatrix}$

$\hat{\psi} \mapsto \hat{\psi} \begin{pmatrix} \psi_m^{-1}(z, w_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_m^{-1}(z, w_m) \end{pmatrix}$

ещё одну: $A(z) = \hat{\psi}(z) \begin{pmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_m \end{pmatrix} \hat{\psi}(z)^{-1}$

Почему у $A(z)$ нету лишних полюсов?

нужной

$\forall k: \sum c_i \psi_i(\tilde{z}, \hat{w}_k) = 0$; $\quad g-1$ ноль где-то, m нулей в прообразе $\tilde{z}$

$f = \dfrac{\sum c_i \psi_i(z, w)}{\psi_m(z, w)}$

f $\begin{array}{l} \leftarrow \text{полюса в } \{x_\alpha\} \\ \leftarrow \text{нули в } y_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, g-1, \text{ в } \pi^{-1}(\tilde{z}) \end{array}$

$\forall z$

$\downarrow$

$\mathcal{A}(\pi^{-1}(\tilde{z})) = \mathcal{A}(\pi^{-1}(z))$

$\mathcal{A}(\sum x_\alpha) = \mathcal{A}(\sum_{\alpha=1}^{g-1} y_\alpha) + \mathcal{A}(\pi^{-1}(\tilde{z}))$

$\mathcal{A}(\sum x_\alpha) - \mathcal{A}(\pi^{-1}(\tilde{z})) \in \Theta_{g-1}$

Рассмотрим $\tilde{\tilde{f}} = \dfrac{z - \tilde{\tilde{z}}}{z - \tilde{z}} \cdot f$, у неё полюса там же, где и у f

$$\Downarrow$$

$\tilde{\tilde{f}} = \dfrac{\sum \tilde{\tilde{c}}_i \psi_i(z, w)}{\psi_m(z, w)}$, потому коэффициенты $\tilde{\tilde{c}}_i$ задают линейную зависимость строк $\hat{\psi}(z)$ при $z = \tilde{\tilde{z}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det \hat{\psi}(z) = 0$

утв.: $A(z)$ – ф-я на $\mathbb{C}P^1$

утв.: вблизи z_α, $i \leftrightarrow j$, $\psi_a(z, w_i) - \psi_a(z, w_j) \sim w_i - w_j \sim \sqrt{z - z_\alpha}$

т.е., $A(z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{z - z_\alpha}}\right) \Rightarrow A(z)$ регулярна (сингулярности там же, где у W)

$z \to \infty$, $w = \lambda_i z^n \Rightarrow A(z) = A_0 + \ldots + A_n z^n$

3) Эволюция на пространстве матриц.

$A(z) \to A(z, t) = A_0(t) + \ldots + A_n(t) z^n$

допустимо:

- $\partial_t A(z) = \left[\frac{A^k(\mu)}{z - \mu}, A(z)\right]$ ← рассмотрим это

$[A^k(\mu), A(\mu)] = 0$

$\Downarrow$

$[A^k(\mu), A(z)] \sim (z - \mu)$

- $\partial_t A(z) = \left[\frac{A^k(\mu) + [A^k(\mu)]'(z-\mu)}{(z-\mu)^2}, A(z)\right]$

⋮

$\partial_t P(z, w) = 0$

$$\partial_t (A(z) \vec{\psi}) = \frac{A^k(\mu)}{z - \mu} \underbrace{A(z) \vec{\psi}}_{= w \vec{\psi}} - A(z) \frac{A^k(\mu)}{z - \mu} \vec{\psi} + A(z) \partial_t \vec{\psi} = w \partial_t \vec{\psi}$$

$$(w - A(z))\left(\partial_t \vec{\psi} - \frac{A^k(\mu)}{z - \mu} \vec{\psi}\right) = 0 \Rightarrow \partial_t \vec{\psi} = \left(\frac{A^k(\mu)}{z - \mu} + f(z, w, t) \mathbb{1}\right) \vec{\psi}$$

$\vec{\varphi} = e^{\int dt\, f(z, w, t)} \vec{\psi}$

↑

ф-я Бейкера-Ахиезера

$z \to \mu$: $f \sim -\frac{w_a^k}{z - \mu} + \ldots$

$w \to \pi^{-1}(\mu)_a = w_a$

$A^k(\mu) \vec{\psi} = w_a^k \vec{\psi}$

$\vec{\varphi}$ и $\partial_t \vec{\varphi}$ регулярны при $z = \mu$ (полюса в x_α)

$z\to x_\alpha$: $\quad \vec\Psi \sim \frac{\vec C_\alpha}{z-x_\alpha(t)}+\dots, \quad \partial_t \Psi \sim \frac{\vec C_\alpha\, \partial_t x_\alpha}{(z-x_\alpha)^2}$

$$\Downarrow$$

$$f \sim \frac{\partial_t x_\alpha}{z-x_\alpha}+\dots$$

Возле т. ветвления: $\partial_t \vec\Psi(w,t) = \left(\frac{A^\kappa(z(w))}{z(w)-\mu} + f(w,t)\right)\vec\Psi$

всё регулярно $\longrightarrow$ $\partial_t \vec\Psi(w_\alpha,t) = \left(\frac{A^\kappa(z_\alpha)}{z_\alpha-\mu} + f(w_\alpha,t)\right)\vec\Psi$

$$\oint_{\partial\Sigma} f\, d\omega_i = 0 = \sum_\alpha \oint_{x_\alpha} f\, d\omega_i + \sum_{\pi^{-1}(\mu)} \oint f\, d\omega_i$$

1-форма на e

$$\oint_{x_\alpha} d\omega_i \frac{\partial_t x_\alpha}{z-x_\alpha} = \oint_{x_\alpha} \frac{d\omega_i}{dz} \frac{dz\, \partial_t x_\alpha}{z-x_\alpha} = \partial_t x_\alpha \left.\frac{d\omega_i}{dz}\right|_{x_\alpha} = \partial_t x_\alpha \frac{d\omega_i(x_\alpha)}{dx_\alpha}$$

ф-я

1-форма

$$\Downarrow$$

$$\sum_\alpha \partial_t x_\alpha \frac{d\omega_i(x_\alpha)}{dx_\alpha} = \sum_a w_a^\kappa(\mu) \frac{d\omega_i(\mu_a)}{d\mu}$$

$\omega_i(p) := \int_{p_0}^{p} d\omega_i\,; \qquad \partial_t \omega_i(x_\alpha(t)) = \partial_t x_\alpha \frac{d\omega_i}{dx_\alpha}\,;$

$$\Downarrow$$

$$\partial_t \sum_\alpha \omega_i(x_\alpha(t)) = \sum_a w_a^\kappa(\mu)\frac{d\omega_i(\mu_a)}{d\mu}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_\alpha \omega_i(x_\alpha(t)) = \sum_\alpha \omega_i(x_\alpha(0)) + t\sum_a w_a^\kappa(\mu)\frac{d\omega_i(\mu_a)}{d\mu}$$

$\sum \vec\omega(x_\alpha(t)) \in \mathbb{C}^g/\{\vec e_i, T\vec e_i\}$ — отображение Абеля от дивизора $\sum x_\alpha$

$$\| \quad \mathcal{A}\left(\sum x_\alpha(t)\right)$$

$$\mathcal{A}\left(\sum x_\alpha(t)\right) = \mathcal{A}\left(\sum x_\alpha(0)\right) + t\sum_a w_a^\kappa(\mu)\frac{d\vec\omega(\mu_a)}{d\mu}$$

Для каких-то дискретных эволюций:

$$\mathcal{A}\left(\sum x_\alpha(t)\right) = \mathcal{A}\left(\sum x_\alpha(0)\right) + t\sum_a w_a^\kappa(\mu)\frac{d\vec\omega(\mu_a)}{d\mu}$$

Примеры

— Волчок. $\quad v_i = -\omega_{ij} r_j, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji},$

$$M_{ij} = -\int \rho\, dV\, (r_i v_j - v_i r_j) = \int \rho\, dV\, (r_i \omega_{kj} r_k + \omega_{ik} r_k r_j) =$$

$$= \underline{(I\omega + \omega I)_{ij}}\ ; \quad I_{ik} = \int \rho\, dV\, r_i r_k$$

$$E = \int \rho\, dV\, \vec{v}^2/2 = -\int \tfrac{1}{2} \rho\, dV\, r_i \omega_{ij} \omega_{jk} r_k = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \omega^2 I = \underline{-\tfrac{1}{4} \operatorname{tr} \omega M}$$

$$M = I\omega + \omega I, \qquad \dot{M} = [\omega, M]$$

$$A(z) = I^2 + zM, \quad B(z) = I + z\omega, \quad \dot{A} = [B, A], \quad \text{или}$$

$$A(z) = z^2 I + zM, \quad \dot{A} = [B, A], \quad B(z) = \left[A(z)^{1/2}\right]_+ = zI + \omega$$

$$A(z)^{1/2} = zI + b_1 + z^{-1} b_2 + z^{-2} b_3 + \ldots; \quad L(z) = z^2 I + zI b_1 + z b_1 I +$$

$$+ b_1^2 + I b_2 + b_2 I + \ldots; \quad b_1 = \omega, \quad \omega^2 + I b_2 + b_2 I = 0 \Rightarrow b_{2\,ij} = -\frac{1}{I_i + I_j} (\omega^2)_{ij}$$

$$\{M_a, M_b\} = -f_{abc} M_c$$

$$\{E, M_b\} = \left\{\tfrac{1}{2} \textstyle\sum \omega_a M_a, M_b\right\} = -f_{abc}\, \omega_a M_c = [\omega, M]_b$$

– Годен (2×2)

$$A(z)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{A_i}{z-z_i}, \qquad \{A_i^a, A_j^b\}=\delta_{ij} f_{abc} A_i^c$$

$$\{\sum A_i^a, A_j^b\}=-f_{abc}A_i^c$$ ← хотим только ad-inv.

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,A(z)^2=\frac{1}{2}\sum\frac{\mathrm{tr}A_i^2}{(z-z_i)^2}+\sum\frac{H_i}{z-z_i}, \quad H_i=\sum_{j\neq i}\frac{\mathrm{tr}\,A_iA_j}{z_i-z_j}$$

$$\{H_i, A_j^a\}=\{\frac{A_i^bA_j^b}{z_i-z_j}, A_j^a\}=\frac{f^{abc}A_j^cA_i^b}{z_i-z_j}=\frac{[A_i,A_j]^a}{z_i-z_j}$$

$$\partial_{t_i}A_j=\frac{[A_i,A_j]}{z_i-z_j}; \qquad \partial_{t_i}A(z)=\left[\frac{A_i}{z-z_i}, A(z)\right]$$

Деавтономизация:

$$\partial_z\Psi=A(z)\Psi, \quad \partial_{z_i}\Psi=\frac{A_i}{z-z_i}\Psi \Rightarrow \partial_{z_i}A_j=\frac{[A_i,A_j]}{z_i-z_j}$$

↑
Шлезингер

– Тода

$$\dot A = [B, A]$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} p_1 & e^{q_1-q_2} & 0 & & z\Lambda^m e^{q_m-q_1} \\ e^{q_1-q_2} & p_2 & e^{q_2-q_3} & 0 & \\ 0 & e^{q_2-q_3} & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & p_{m-1} & e^{q_{m-1}-q_m} \\ z^{-1}\Lambda^m e^{q_m-q_1} & & 0 & e^{q_{m-1}-q_m} & p_m \end{pmatrix}, \quad B(z) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_1-q_2} & 0 & & z\Lambda^m e^{q_m-q_1} \\ e^{q_1-q_2} & 0 & -e^{q_2-q_3} & 0 & \\ 0 & e^{q_2-q_3} & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & 0 & -e^{q_{m-1}-q_m} \\ -z^{-1}\Lambda^m e^{q_m-q_1} & & 0 & e^{q_{m-1}-q_m} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot q_i = p_i \;; \quad \dot p_i = 2e^{2(q_i-q_{i+1})} - 2e^{2(q_{i-1}-q_i)} \;; \quad q_{m+1} = q_1 - m\log\Lambda$$
$$q_0 = q_m + m\log\Lambda$$

$$(A(z)-w)\vec\psi = 0 \;; \quad (w-p_i)\psi_i = \underbrace{e^{q_i-q_{i+1}}\psi_{i+1}}_{1} + \underbrace{e^{q_{i-1}-q_i}\psi_{i-1}}_{2}$$
$$\psi_{i+m} = z^{-1}\psi_i$$

$$w\to\infty: \quad \infty_1: \; \psi_i \sim e^{q_i} w^i, \quad \frac{\psi_{i+m}}{\psi_i} = \Lambda^{-m}w^m \sim z^{-1} \Rightarrow z \sim \Lambda^m w^{-m}$$

$$\cancel{\infty_2: \; \psi_i \sim e^{-q_i} w^{-i}}, \quad \cancel{z \sim \Lambda^{-m} w^m}, \quad \cancel{w \sim \Lambda z^{1/m} e^{2\pi i k/m}}$$

$$\Lambda^m(z+z^{-1}) = P_m(w), \qquad \Lambda^m(z-z^{-1}) = y \Rightarrow y^2 = P_m(w)^2 - 4\Lambda^{2m},$$
$$g = m-1$$

$$\deg L = 2m-2$$

$\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$

$2 \quad \dots \quad 2$

$1 \quad \dots \quad w^{m-1}$, x_α - полюса $\dfrac{\psi_i}{\psi_0}$

$\Downarrow$

$$D := \sum x_\alpha = (m-1)\infty_1 + \dots$$

$$\dot\psi_i = -e^{q_i - q_{i+1}}\psi_{i+1} + e^{q_{i-1}-q_i}\psi_{i-1} + f\psi_i \ ,$$

$\infty_1 : f \sim w \quad , \infty_2 : f \sim -w$

$D = \sum x_\alpha \ , \quad L = L(D)$

неподвижная

$\tilde D = D - (m-2)\cdot\infty_1 \ , \qquad \psi_0, \psi_1$ – сечения $\tilde L$

$\tilde L$ + проекция с помощью $Z \longrightarrow 2\times 2$ формализм

$$\begin{pmatrix}\psi_{i+1}\\ \psi_i\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}(w-p_i)e^{q_{i+1}-q_i} & -e^{q_{i+1}-2q_i+q_{i-1}}\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{= T_i(w)}\begin{pmatrix}\psi_i\\ \psi_{i-1}\end{pmatrix}$$

$\det\left(\prod T_i(w) - z^{-1}\right) = 0 \leftarrow$ та же спектральная кривая

$$\begin{pmatrix}\psi_{i+m+1}\\ \psi_{i+m}\end{pmatrix} = \underbrace{T_m(w)\ldots T_1(w)}_{= \tilde A(w)}\begin{pmatrix}\psi_{i+1}\\ \psi_i\end{pmatrix} = z\cdot\begin{pmatrix}\psi_{i+1}\\ \psi_i\end{pmatrix}$$

$$(\tilde A(w) - z)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix} = 0 \qquad \tilde A(w)\cdot\begin{pmatrix}\psi_1(z,w)\\ \psi_0(z,w)\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}\psi_1(z,w)\\ \psi_0(z,w)\end{pmatrix}$$

$$\tilde A\cdot\begin{pmatrix}\psi_1(z^{-1},w)\\ \psi_0(z^{-1},w)\end{pmatrix} = z^{-1}\begin{pmatrix}\psi_1(z^{-1},w)\\ \psi_0(z^{-1},w)\end{pmatrix}$$

$$\hat\psi = \begin{pmatrix}\psi_1(z,w) & \psi_1(z^{-1},w)\\ \psi_0(z,w) & \psi_0(z^{-1},w)\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\tilde A(w) = \hat\psi\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix}\hat\psi^{-1}}$$

дополнения

$$\sum w_a^k \frac{d\omega_i}{d\mu} = \partial_\mu \sum_a w_a^k \, \omega_i(\mu_a) = \partial_\mu \oint \Big(\sum w_a^k \, d\Omega^{(1)}_{\mu_a,P_0}\Big)\omega_i =$$

$$= \partial_\mu \oint_{B_i} \sum w_a^k \, d\Omega^{(1)}_{\mu_a,P_0} = \oint_{B_i} \sum w_a^k \, d\Omega^{(2)}_{\mu_a} \,,$$

$$d\Omega^{(2)}_{\mu_a} \sim \frac{-dz}{(z-\mu_a)^2}$$

голоморф. форма: $d\left(\sum n_i z_i\right) = \oint_{B} n_i \, d\Omega^{(1)}_{z_i,P_0}$

$z_i \to z_j \,, \quad n_i = -n_j \to \infty$

$z \sim z_\alpha = 0$:

$$A(z) \sim \begin{pmatrix} \underline{\begin{matrix} \lambda + c_1 z & 1 \\ c_3 z & \lambda + c_2 z \end{matrix}} & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$(w - \lambda - c_1 z)(w - \lambda - c_2 z) = c_3 z$$

$$(w - \lambda - c_+ z)^2 = c_3 z - \cancel{c^2 z^2}$$

$$w_{12} = \lambda + c_+ z \pm_2^1 \sqrt{c_3}\sqrt{z}$$

$$(A(z) - w_{12}) \sim \begin{pmatrix} \underline{\begin{matrix} \mp\sqrt{c_3}\sqrt{z} & 1 \\ c_3 z & \mp\sqrt{c_3}\sqrt{z} \end{matrix}} & \\ & \ddots \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{c_3}\sqrt{z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{c_3}\sqrt{z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \sim \sqrt{z}$$

$(\det \hat{\Psi})^2 \sim (z - z_\alpha)$ $\Rightarrow$ $n\, m(m-1)$ нулей у $(\det \hat{\Psi})^2$

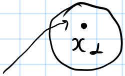
возле т. ветвления

$\Downarrow$

$n\, m(m-1)$ полюсов 2 порядка x_α

$\vec{\Psi}(z, w) \in \Gamma^0\left(\begin{matrix} \mathbb{C}^m \\ \downarrow \\ E \end{matrix}\right)$ — тривиализация кроме x_α

$\deg D = \# x_\alpha = g + m - 1$



$$\vec{\Psi}_{out} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{z - x_\alpha} \\ \vdots \\ \frac{c_{m-1}}{z - x_\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Psi}_{in} = (z - x_\alpha) \cdot \vec{\Psi}_{out}$$