Напоминание

$A(z)$ — матричный ($m\times m$) многочлен степени n

$\Updownarrow$

C — кривая в поверхности *)

S = тот. пр-во расс-я $\mathcal{O}(n)$ над $\mathbb{C}P^1$

и $L' \subset E$, L' — лин. рассл-е на C

E — тривиал., $\operatorname{rk} E = m$ на C

*) $\pi_S : S \to \mathbb{C}P^1$, $\pi := \pi_S|_C : C \to \mathbb{C}P^1$

$\deg \pi = m$

$$\{A(z)\}/PGL_m \xleftrightarrow{1:1} \{(C, L)\}$$

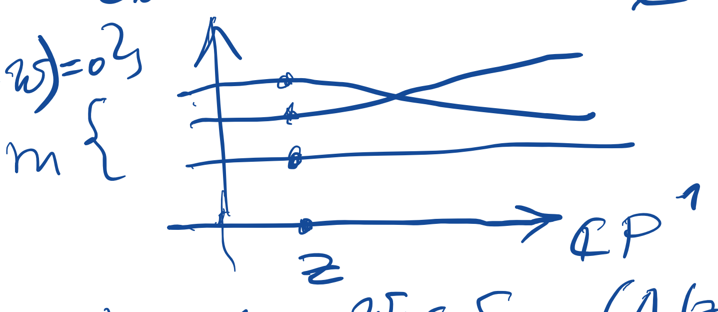
C: m-листное накрытие

L: почти любое лин. рассл-е степени $\boxed{m+(g-1)}$

g = род C

Напомним, что $L' \subset E$ — рассл-е ядер матрицы $A(z)-w\mathbb{1}$ в точках $C=\{\det(A(z)-w)=0\}$

слои $\mathcal{O}(n)$ $\quad S$



$\pi^{-1}(z) = \{(z, w_i)\}_{i=1,\dots,m}$ где $w_i \in \operatorname{Spec}(A(z))$

глобальная запись в однород. коор.

$$A(z) \rightsquigarrow \hat{A} \in \Gamma(S', \pi_S^* \mathcal{O}(n) \otimes Mat_{m\times m})$$

$\hat{A}$ можно себе представлять как однородную ф-ию степени n от $(p^1, p^2, W) \sim (cp^1, cp^2, c^n W)$, $\forall c \in \mathbb{C}^*$

веса: 1, 1, n

$(p^1, p^2) \neq (0,0)$

глобально $C' = \{\det(\hat{A} - W\mathbb{I}) = 0\}$

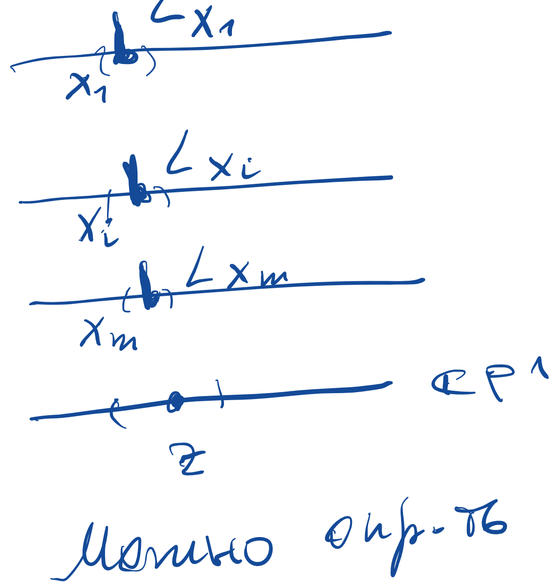
В карте $\hat{U}_0$: $\hat{A}(p_1, p_2) = (p^2)^n A(p^1/p^2)$

<u>Обратное построение</u>

Пусть дана пара (C, L) $\quad C \subset S'$

$\pi = \pi_S|_C : C \to \mathbb{CP}^1$

$\deg \pi = m$



m листов накрытия

Можно опр-ть на $\mathbb{CP}^1$ вект. рассл-е E ранга m, т.ч. $E_z = \bigoplus_{i=1}^{m} L_{x_i}$

На самом деле опр-на операция прямого образа

$$L \longmapsto \pi_* L = E$$

на C $\xrightarrow{\pi}$ на $\mathbb{C}P^1$

$\pi_* : Coh(C) \to Coh(\mathbb{C}P^1)$ (для любых собственных отображ-й)

В случае нашего отображения π

$\pi_* L$ оказ-ся рассл-ем.

<u>Св-ва</u> π_*. Пусть $\forall U \underset{\text{откр}}{\subset} \mathbb{C}P^1$

$$H^0(U, \pi_* L) = H^0(\pi^{-1}(U), L)$$

<u>В нашем случае верно:</u>

Для $E = \pi_* L$: $\chi(E) = \chi(L)$

<u>Теорем Р-Р на кривых</u> Пусть X проект. кривая

$\mathcal{E}$ – голом. рассл-е над X, тогда

опр-м $\chi(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}) - h^1(\mathcal{E})$. Тогда

$$\chi(\mathcal{E}) = \deg \mathcal{E} + rk\mathcal{E}(1-g)$$

<u>Теорема</u> (Биркгофф-Гротендика)

Пусть E гол. р-е ранга m над $\mathbb{C}P^1$,

тогда $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}(k_i)$ $\quad \Sigma k_i = \deg E$

Это разложение однозначно с точн. до перестановок слагаемых.

12

Лемма E (степени $\deg E = 0$) над $\mathbb{C}P^1$ тривиально

тттк $E(-1)$ не имеет сечений

где $E(-1) := E \otimes \mathcal{O}(-1)$

Док-во: Умножим $E = \oplus \mathcal{O}(k_i)$ на $\mathcal{O}(-1)$

Тогда 1) $\sum k_i = \deg E = 0$

2) $k_i - 1 < 0$

$\Rightarrow k_i = 0 \ \forall i$

$\left(\mathcal{O}(k_i) \otimes \mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}(k_i - 1) \right)$

Еще одно св-во π_*

Пусть M - рассл-е над $\mathbb{C}P^1$, расс-м

$$\pi_* (\pi^* M \otimes L) = M \otimes \pi_* L$$

В итоге получаем:

$E = \pi_* L$

1) $\deg E = 0 \Leftrightarrow \deg L = m + (g-1)$

Док-во: $\underbrace{\chi(E)}_{\substack{\text{P.P.} \\ \parallel \\ \deg E + m(1-0)}} = \underbrace{\chi(L)}_{\substack{\text{P.P.} \\ \parallel \\ \deg L + (1-g)}}$

$\Rightarrow \deg E = \deg L - (m + g - 1)$

2) E тривиально $\Longleftrightarrow$
$L \otimes \pi^* \mathcal{O}(-1)$ не имеет сечений

Док-во: $H^0(\mathbb{C}P^1, E(-1)) =$
$H^0(C, \pi^*\mathcal{O}(-1) \otimes L) \overset{\text{надо}}{=\!=} 0$

3) Заметим, что $\deg L = m + g - 1$,
а степень $\pi^*\mathcal{O}(-1) = m\,(-1) \Rightarrow$
$\deg \pi^*\mathcal{O}(-1) L = g - 1$

Обозначим $\mathrm{Pic}_k(C) =$ пр-во модулей лин. рассл-й степени k над C.

$\forall k \quad \mathrm{Pic}_k(C) \cong \mathrm{Jac}(C)$

$\forall [M] \in \mathrm{Pic}_{g-1}(C) : \chi(M) = 0.$

На самом деле для $M \in \mathrm{Pic}_{g-1}(C) \setminus \Theta_{g-1}$ выполнено, что $h^0(M) = h^1(M) = 0$

Тем самым расслоение L почти любое.

Итак, пусть (C, L) такая, что C, как выше, а $\deg L = m+g-1$ (почти любое). Тогда $\pi_* E$ трив. расслоение ранга m на $\mathbb{C}P^1$.

$$H^0(\mathbb{C}P^1, E) = E_z \qquad \forall z \in \mathbb{C}P^1$$

Расс-м отображение

W тавт. сечение $\pi_S^* \mathcal{O}(n)$

$$\hat{W} : L \to L \otimes \pi^* \mathcal{O}(n)$$

$$s \longmapsto Ws \quad (s \text{ — лок. сеч. } L \text{ над } C)$$

$$\hat{W} : H^0(C, L) \to H^0(C, \underbrace{L \otimes \pi^* \mathcal{O}(n)})$$

$$\shortparallel$$

$$\mathbb{C}^m \xrightarrow{\ \sim\ } H^0(\mathbb{C}P^1, E) \to H^0(\mathbb{C}P^1, E \otimes \mathcal{O}(n))$$

это то же, что матричный многочлен $A(z)$ степени n.