Комплексно-геом. конструкция

Пусть дан матр. многочлен

$$A(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n$$

$$A(z) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{C})$$

$$\Updownarrow$$

{ спектральная кривая, линейное рассл-е }

Предварительные сведения (= Обозначения)

$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$$

неоднородная коор. z

однор. коор. p^1, p^2 $\quad (p^1, p^2) \sim (cp^1, cp^2)$ – $c \in \mathbb{C}^*$

– одна и та же точка $\mathbb{CP}^1$

$\mathcal{O}(k)$ – голом. лин. рассл. над $\mathbb{CP}^1$

$$\deg \mathcal{O}(k) = k$$

При $k \geq 0$ $\quad h^0(\mathcal{O}(k)) = k+1$

При $k < 0$ $\quad h^0(\mathcal{O}(k)) = 0$

<u>Гладкие сечения</u> $\mathcal{O}(k)$ в терминах карт: $\mathbb{C}P^1 = U_0 \cup U_\infty$

$z \qquad \tilde{z} = z^{-1}$

Сечение $\mathcal{O}(k) = (\varphi, \tilde{\varphi})$, где

φ гладкая функция z

$\tilde{\varphi}$ —"— —"— $\tilde{z}$

На $U_0 \cap U_\infty$ $\boxed{\tilde{\varphi} = z^{-k}\varphi}$

<u>Голом-ое сечение</u> – это такая $(\varphi, \tilde{\varphi})$, где $\varphi(z)$ и $\tilde{\varphi}(\tilde{z})$ голоморфные.

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \varphi_1 z + \ldots + \varphi_k z^k \quad (k \geqslant 0)$$

$$z^{-k}\varphi(z) = \tilde{\varphi}(\tilde{z}) \ \text{– регул.}$$

<u>Гладкие сеч-я</u> $\mathcal{O}(k)$ в терминах однород. коор.

<u>Опр</u> Ф-я $f(p^1, p^2)$ (гладкая) наз-ся ф-ей однородности k, если $\forall c \in \mathbb{C}^*$ $f(cp^1, cp^2) = c^k f(p^1, p^2)$

Утв. {Гладкие сеч-я $\mathcal{O}(k)$} =

= {Гладкие однород. ф-ии степени k}

{голоморф. однород. ф-ии степени k}

$\deg f = k \rightsquigarrow (\psi, \tilde{\psi})$, где

$\psi(z)(p^2)^{-k} f(p^1, p^2) = f(p^1/p^2, 1) =$

$= f(z, 1)$

$z = p^1/p^2$

$\tilde{\psi} = \ldots\ldots \quad (p^1/p^2)^{-k}$

Замечание p^1 и p^2 – это базис голоморф. сечений $\mathcal{O}(1)$ $(h^0(\mathcal{O}(1)) = 2)$

$p^1 = (z, 1)$, $p^2 = (1, \tilde{z})$

в U_0 z и 1

Тотал. пр-во рассл-я $\mathcal{O}(k) = P_k$

Две карты $\hat{U}_0 \cup \hat{U}_\infty = P_k$, где

$\hat{U}_0 = \underbrace{U_0 \times \mathbb{C}}_{z \quad w}$, $\hat{U}_\infty = \underbrace{U_\infty \times \mathbb{C}}_{\tilde{z} \quad \tilde{w}}$

(z, w) и $(\tilde{z}, \tilde{w})$ на $\hat{U}_0 \cap \hat{U}_\infty$
связаны $\tilde{z} = z^{-1}$, $\tilde{w} = z^{-k} w$

P_k в терминах однородных коор.

$$P_k = \left[\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}\right] / \mathbb{C}^*$$

$$(p^1, p^2, \lambda) \sim (cp^1, cp^2, c^k \lambda)$$

(тот. пр-во $\mathcal{O}(k)$)

Матричные многочлены

$A(z)$ (степени $\leq n$ по z)

$\rightsquigarrow$ сечение рассл-я $\mathcal{O}(n) \otimes Mat_{m \times m}$

В U_0 хочу расс-ть $\det(A(z) - w\mathbb{I}) = 0$
как ур-е кривой в поверх-ти
$\hat{U}_0 = U_0 \times \mathbb{C}$. Так можно
получить ур-е некоторой кривой
во всём P_n (пр-во р-я $\mathcal{O}(n)$)

Пояснение: при переклейке
$A(z)$ надо умн-ть на z^{-n} $\Rightarrow$

и w надо умножить на z^{-n}.

~~Таким образом~~ На $S = P_n$ имеем $\boxed{\text{лин. расс-е}}$, сечения которого — это однород. ф-ии (p^1, p^2, λ) степени k.

Обозначим $\pi : S \to \mathbb{C}P^1$

$(p^1, p^2, \lambda) \mapsto (p^1, p^2)$

Тогда сечения $\boxed{\pi^* \mathcal{O}(k)}$ — это и есть те ф-ии.

$\det(A(z) - w)$ можно расс-ть как сечение (в карте $\hat{U}_0$) расс-я $\pi^* \mathcal{O}(nm)$. На самом деле, это глобальное сечение.

Пусть $\hat{A}$ — (глобальное) сечение $\pi^* \mathcal{O}(n) \times \mathrm{Mat}_{m \times m}$

$w \rightsquigarrow W$ — сечение (глоб.) $\pi^* \mathcal{O}(n)$

На S = тот. пр-во $\mathcal{O}(n)$

W – тавтологическое сечение.

$q \in S \qquad \pi(q) = x \in \mathbb{C}P^1$

$\mathcal{O}(n)_x$ – слой над x

$[\pi^* \mathcal{O}(n)]_q = \mathcal{O}(n)_x$

$\boxed{q = (x, \ell)}$, где $\ell \in \mathcal{O}(n)_x$

$W(q) \in \pi^* \mathcal{O}(n)_q$

$W(q) = \ell$ – тавтолог. сечение

(В картах $\hat{U}_0, \hat{U}_\infty$ – это w в $\hat{U}_0$, $\tilde{w}$ в $\hat{U}_\infty$.

В однородных коор. $\boxed{W = \lambda}$.)

$\mathbb{C}P^1 \qquad p^1, p^2$ – сечения $\mathcal{O}(1)$

$S = P_n \qquad p^1, p^2, \lambda \qquad p^1$ сеч. $\pi^* \mathcal{O}(1)$

λ сеч. $\pi^* \mathcal{O}(n)$

Итак S и $W \in \Gamma(S, \pi^* \mathcal{O}(n))$

$\hat{A} \in \Gamma(S, \pi^* \mathcal{O}(n) \otimes Mat_{m\times m})$

$\underline{D = \det(\hat{A} - W \mathbb{I})} \in \Gamma(S, \pi^* \mathcal{O}(mn))$

Расс-м кривую:

$C := \{\underline{D=0}\}$ и предположим

C гладкая, такая что

$\pi : C \to \mathbb{C}P^1$ — это накрытие

(разветвленное) степени m.

// Каждая точка $C = (z, a_i)$,

где $z \in \mathbb{C}P^1$, a_i — собст.

значение $A(z)$ //.

$\hat{A}\big|_C : \hat{E} \to \hat{E} \otimes \mathcal{O}(n)$

где $\hat{E}$ — триви.р-е со

слоем $\mathbb{C}^m$ над C

Если $A(z)$ общий, то

В общей точке кривой C

$\dim \ker(\hat{A} - W\,\mathbb{I}) = 1$

Над $C \setminus \{$точки ветв.я$\}$ получили лин. рассл-е $L' \subset \hat{E}$

Лин. подрассл-е тривиального $\hat{E}$

$=$ отображение $C \to \mathbb{P}^{m-1}$

Если оно задано на $C \setminus \{$точки$\}$.

Поэтому имеем $\boxed{L' \subseteq \hat{E}}$

на всей C.

Обозначим $L = (L')^*$