Вертексные операторы.

Определение 1. Пусть

$$V = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \mathbb{C}v_j \tag{1}$$

бесконечномерное комплексное векторное пространство с базисом $\{v_j|j \in \mathbb{Z}+1/2\}$. Мы будем считать, что v_j – это бесконечномерный вектор, у которого на j-ом месте стоит 1, а на любом другом стоит 0. Каждый вектор из V имеет произвольное, но всегда конечное, число ненулевых элементов. Это позволяет отождествить V с $\mathbb{C}^\infty$.

Определение 2. Мы можем ввести двойственное к V бесконечномерное пространство V^*, элементами которого являются всевозможные суммы вида

$$v^* = \sum_{i=1/2}^{N+1/2} c_i v_i^* \tag{2}$$

где N – произвольное, а $c_i \in \mathbb{C}$. Притом для каждого v_i^* выполняется

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \tag{3}$$

Определение 3. Введём на векторном пространстве V операцию внешнего произведения и рассмотрим внешнее произведение вида

$$vac = v_{c+1/2} \wedge v_{c+3/2} \wedge v_{c+5/2} \wedge ... \tag{4}$$

которое назовём вакуумным состоянием (отвечающее заряду c).

Некоторая мотивировка введения вакуумного вектора таким образом объясняется тем, фактом, что у фермионов не может быть две частицы в одном состоянии. Как мы знаем из свойств внешнего умножения, все состояния вида $v_i \wedge v_i$ автоматически дают 0.

Определение 4. Рассмотрим пространство $\Lambda_0^{\infty/2}V$, элементами которого являются

$$|v\rangle = v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge ..., \qquad i_1 < i_2 < i_3 < ... \qquad i_k = k,\ k \gg 1/2,\ k \in \mathbb{Z}+1/2 \tag{5}$$

и потребуем, чтобы относительно нуля было равное число электронов и позитронов. Тогда мы можем обозначить $\mathcal{F}_0 = \Lambda_0^{\infty/2}V$ – фермионное пространство Фока с зарядом 0.

Мы можем сопоставить каждому $|v\rangle$ диаграмму Майя. Как было сказано ранее, мы можем записать фермионное пространство Фока следующим образом

$$\mathcal{F}_c = \bigoplus_{e\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{F}_c^e \tag{6}$$

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{c\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_c \tag{7}$$

Определение 5. Введём для каждого $v \in V$ оператор $\hat{v} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ следующим образом

$$\hat{v}(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge ...) = v \wedge v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge ... \tag{8}$$

Определение 5′. Аналогично для каждого $f \in V^*$ введём $\check{f} : F \to F$ такой что

$$\check{f}(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge ...) = f(v_{i_1})v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge ... - f(v_{i_2})v_{i_1} \wedge v_{i_3} \wedge ... + f(v_{i_3})v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... - ... \tag{9}$$

Как несложно заметить, если $\hat{v} = \hat{v}_j$, то $\hat{v} = \psi_j^*$. Точно так же, если $\check{f} = \check{v}_j^*$, то $\check{f} = \psi_j$. Далее мы будем рассматривать только операторы вида $\hat{v}_j$ и $\check{v}_j^*$ и будем придерживаться фермионных обозначений.

Определение 6. Введём фермионные производящие суммы ($z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$)

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n z^{-n-1/2} \qquad \psi^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n^* z^{-n-1/2} \tag{10}$$

Введённый подобным образом $\psi(z)$ отображает F_c в $\hat{F}_{c+1}$ – формальное замыкание F_{c+1}, в котором разрешены бесконечные суммы полубесконечных внешних произведений. Аналогично $\psi^*(z)$ отображает F_c в $\hat{F}_{c-1}$. Таким образом можно определить

$$\hat{F} = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} \hat{F}_c \tag{11}$$

Кроме того, операторы $\Phi\psi(z)\Phi^{-1}$ и $\Phi\psi^*(z)\Phi^{-1}$ (здесь $\Phi : F \to B$) отображают пространство B в $\hat{B}$, которое можно ввести следующим образом

$$\hat{B} = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} w^c \mathbb{C}[p_1, p_2, p_3 ...] \tag{12}$$

Замечание. Так как $\hat{F}$ и $\hat{B}$ – замыкания F и B соответственно, то ввиду наличия изоморфизма $\Phi : F \to B$ можно утверждать, что Φ так же изоморфизм между $\hat{F}$ и $\hat{B}$.

Определение 7. Определим вертексные операторы $\Gamma(z)$ и $\Gamma^*(z)$

$$\Gamma(z) = \Phi\psi(z)\Phi^{-1} \tag{13}$$

$$\Gamma^*(z) = \Phi\psi^*(z)\Phi^{-1} \tag{14}$$

Утверждение 1. Для оператора H_n и фермиона ψ_m верно утверждение

$$[H_n, \psi_m] = \psi_{n+m} \tag{15}$$

Доказательство.

По определению

$$H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}+1/2} : \psi_{-j} \psi_{j+n}^* : \tag{16}$$

В свою очередь нормальная форма оператора:

$$: \psi_{-j} \psi_{j+n}^* : = \begin{cases} \psi_{-j} \psi_{j+n}^*, \text{если } j > 0 \text{ или } n > -j \\ -\psi_{j+n}^* \psi_{-j}, \text{если } j < 0 \text{ или } n < -j \end{cases} \tag{17}$$

Покажем утверждение 17 явным вычислением

$$\begin{aligned}
[H_n, \psi_m] = \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}+1/2} : \psi_{-j} \psi_{j+n}^* :, \psi_m \right] = \left[\sum_{j \in \mathbb{N}-1/2} (\psi_{-j} \psi_{j+n}^* - \psi_{n-j}^* \psi_j), \psi_m \right] = \\
= \sum_{j \in \mathbb{N}-1/2} \left([\psi_{-j} \psi_{j+n}^*, \psi_m] - [\psi_{n-j}^* \psi_j, \psi_m] \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}-1/2} \left(\psi_{-j} \{\psi_{j+n}^*, \psi_m\} - \{\psi_{-j}, \psi_m\} \psi_{j+n}^* - \right. \\
\left. - \psi_{n-j}^* \{\psi_j, \psi_m\} + \{\psi_{n-j}^*, \psi_m\} \psi_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}-1/2} (\psi_{-j} \delta_{j+n+m,0} + \psi_j \delta_{n-j+m,0}) = \psi_{n+m}
\end{aligned} \tag{18}$$

■

Утверждение 2. Для оператора H_n и фермионной производящей суммы $\psi(z)$ выполняется

$$[H_n, \psi(z)] = z^n \psi(z) \tag{19}$$

Доказательство.

Аналогично запишем по определению

$$\begin{aligned}
[H_n, \psi(z)] = \left[H_n, \sum_{k\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_k z^{-k-1/2}\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}+1/2} [H_n, \psi_k] z^{-k-1/2} = \\
= \sum_{k\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{n+k} z^{-k-1/2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{n+k} z^{-k-n+n-1/2} = z^n \sum_{l\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_l z^{-l-1/2} = z^n \psi(z)
\end{aligned} \tag{20}$$

■

Утверждение 3. Для вертексного оператора $\Gamma(z)$ имеют место утверждения

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \Gamma(z)\right] = \frac{z^n}{n} \Gamma(z) \tag{21}$$

$$[p_n, \Gamma(z)] = z^{-n} \Gamma(z) \tag{22}$$

Доказательство. Как мы знаем, $\Phi(H_n) = n\dfrac{\partial}{\partial p_n}$, $\Phi(H_{-n}) = p_n$. Подставим первое равенство в 19, а затем домножим это равенство на операторы Φ слева и Φ^{-1} справа

$$\begin{aligned}
\Phi\left([H_n, \psi(z)]\Phi^{-1}(\Phi\left|u\right\rangle)\right) = \Phi\left([H_n, \psi(z)]\left|u\right\rangle\right) = \Phi\left((H_n\psi - \psi H_n)\left|u\right\rangle\right) = \Phi(H_n\psi\left|u\right\rangle) - \\
- \Phi(\psi H_n\left|u\right\rangle) = n\frac{\partial}{\partial p_n}\Phi(\psi\left|u\right\rangle) - \Phi\psi\Phi^{-1}\Phi(H_n\left|u\right\rangle) = n\frac{\partial}{\partial p_n}\Phi\psi\Phi^{-1}\Phi\left|u\right\rangle - \Phi\psi\Phi^{-1}n\frac{\partial}{\partial p_n}\Phi\left|u\right\rangle = \\
= n\left(\frac{\partial}{\partial p_n}\Phi\psi\Phi^{-1} - \Phi\psi\Phi^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\right)\Phi\left|u\right\rangle = n\left(\frac{\partial}{\partial p_n}\Gamma - \Gamma\frac{\partial}{\partial p_n}\right)\Phi\left|u\right\rangle = n\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \Gamma(z)\right]\Phi\left|u\right\rangle = \\
= |\text{с другой стороны}| = \Phi\left(z^n\psi\Phi^{-1}(\Phi\left|u\right\rangle)\right) = z^n\Phi\left(\psi\Phi^{-1}(\Phi\left|u\right\rangle)\right) = z^n\Gamma(z)\left|u\right\rangle
\end{aligned} \tag{23}$$

То есть

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \Gamma(z)\right] = \frac{z^n}{n} \Gamma(z) \tag{24}$$

Аналогично получаем и второе утверждение

$$[p_n, \Gamma(z)] = z^{-n} \Gamma(z) \tag{25}$$

■

Формулы для фермионных токов через бозоны.

Теорема 1. $\Gamma(z)$ и $\Gamma^*(z)$ имеет следующий вид на $\hat{B}_c$

$$\Gamma(z)\Big|_{\hat{B}_c} = z^c w \exp\left(\sum_{j\geqslant 1} \frac{z^j}{j} p_j\right) \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1} z^{-j} \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{26}$$

$$\Gamma^*(z)\Big|_{\hat{B}_c} = z^{-c} w^{-1} \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1} \frac{z^j}{j} p_j\right) \exp\left(\sum_{j\geqslant 1} z^{-j} \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{27}$$

Доказательство.

Докажем для $\Gamma(z)$, для $\Gamma^*(z)$ доказывается аналогично.

Для начала переменная w обязана быть в правой части оператора $\Gamma(z)$, так как $\Gamma(z)$ отображает $\hat{B}_c$ в $\hat{B}_{c+1}$. Далее определим оператор T_z на $\hat{B}$ следующим образом

$$T_z(f(p_1, p_2, ...)) = f(p_1 + z^{-1}, p_2 + z^{-2}, ...) \tag{28}$$

Записав правую часть равенства 17 с помощью формулы Тейлора многих переменных получим явный вид оператора T_z

$$T_z = \exp\left(\sum_{j\geqslant 1} z^{-j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{29}$$

Теперь докажем, что

$$[p_n, T_z] = -z^{-n}T_z \tag{30}$$

$$[p_n, T_z]g = (p_nT_z - T_zp_n)\, g = p_nT_zg - T_z(p_ng) = p_nT_zg - (p_n + z^{-n})T_zg = -z^{-n}T_zg \tag{31}$$

$$[p_n, T_z] = -z^{-n}T_z \tag{32}$$

Теперь можно показать, что

$$[p_n, \Gamma(z)T_z] = 0 \tag{33}$$

$$[p_n, \Gamma(z)T_z] = [p_n, \Gamma(z)]T_z + \Gamma(z)[p_n, T_z] = z^{-n}\Gamma(z)T_z - z^{-n}\Gamma(z)T_z = 0 \tag{34}$$

Рассмотрим действие оператора $\Gamma(z)T_z$ на единицу и на произвольный полином $p = p(p_1, p_2, ...)$

$$\Gamma(z)T_z(1) = C_1(z) \tag{35}$$

Ввиду 33, оператор $\Gamma(z)T_z$ коммутирует с любым p_n, а значит можно записать

$$\Gamma(z)T_z(p) = p\Gamma(z)T_z(1) = pC_1(z) \tag{36}$$

Перепишем $\Gamma(z)$ в виде

$$\Gamma(z) = C_1(z)\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1} z^{-j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{37}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\right] f = \frac{\partial}{\partial p_n}\left(\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right) f\right) - \\ - \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_n} = -\frac{z^n}{n}f\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right) + \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_n} - \\ - \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_n} = -\frac{z^n}{n}\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right) f\end{gathered} \tag{38}$$

То есть

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\right] = -\frac{z^n}{n}\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right) \tag{39}$$

Домножим 39 на $\Gamma(z)$ справа

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\right]\Gamma(z) = -\frac{z^n}{n}\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\Gamma(z) = \\ = -\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \Gamma(z)\right]\end{gathered} \tag{40}$$

Ввиду свойства коммутатора

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \tag{41}$$

Получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\right]\Gamma(z) + \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \Gamma(z)\right] = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial p_n}, \exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\Gamma(z)\right] = 0 \tag{42}$$

Это значит, что при действии $\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\Gamma(z)$ на единицу и на произвольный дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial p}$ получим

$$\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\Gamma(z)(1) = C_2(z) \tag{43}$$

Так как выполняется 42, то оператор $\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\Gamma(z)$ коммутирует с любым $\frac{\partial}{\partial p_n}$, то

$$\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\Gamma(z)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) = C_2(z)\frac{\partial}{\partial p} \tag{44}$$

Учитывая выводы, сделанные нами выше, мы можем записать $\Gamma(z)$ в виде

$$\Gamma(z) = c(z)w\exp\left(\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}z^{-j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{45}$$

То есть остается найти $c(z)$. Для этого рассмотрим действие $\psi(z)$ на вакуумный вектор $|vac\rangle_c$

$$\psi(z)\,|vac\rangle_c = z^c\,|vac\rangle_c + ... \tag{46}$$

Значит, $c(z) = z^c$ для $\Gamma(z)$. В случае $\Gamma^*(z)$ получим, что $c(z) = z^{-c}$, так как если мы последовательно подействуем обоими операторами на $\hat{B}^c$, то должны получить это же пространство. В итоге получаем:

$$\Gamma(z)\Big|_{\hat{B}_c} = z^c w\exp\left(\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}z^{-j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{47}$$

$$\Gamma^*(z)\Big|_{\hat{B}_c} = z^{-c}w^{-1}\exp\left(-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}p_j\right)\exp\left(\sum_{j\geqslant 1}z^{-j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{48}$$

■

Матричные элементы “половин” вертексных операторов в базисе разложимых тензоров.

Определение 8. Определим «половины» вертексных операторов следующим образом

$$\Gamma_+(z) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{-n}}{n} H_n\right) \tag{49}$$

$$\Gamma_-(z) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{n}}{n} H_{-n}\right) \tag{50}$$

Теорема 2. Для «половин» вертексных операторов верны следующие утверждения

$$\Gamma_+(z)\left|\mu\right\rangle = \sum_{\mu\succ\nu} z^{-|\mu-\nu|}\left|\nu\right\rangle \tag{51}$$

$$\Gamma_-(z)\left|\mu\right\rangle = \sum_{\mu\prec\nu} z^{|\nu-\mu|}\left|\nu\right\rangle \tag{52}$$

Доказательство. Как мы знаем, ввиду изоморфизма пространств Фока есть соотвествия

$$H_n \mapsto n\frac{\partial}{\partial p_n}, \qquad H_{-n}\mapsto p_n, \qquad \left|\mu\right\rangle \mapsto s_\mu \tag{53}$$

Покажем сперва, что имеет место

$$\Gamma_-(z) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}p_n\right) = \sum_n h_n z^n \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}p_n\right) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^n}{n}x_k^n\right) = \prod_{k\geqslant 1}\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{-z^n}{n}x_k^n\right) = \\ = \prod_{k\geqslant 1}\exp\left(-\ln(1-x_k z)\right) = \prod_{k\geqslant 1}(1-x_k z)^{-1} = \sum_{k\geqslant 1} h_k z^k\end{aligned} \tag{55}$$

Тогда (с учётом формулы Пьери)

$$\Gamma_-(z)\left|\mu\right\rangle = \sum_{k\geqslant 1} h_k z^k\left|\mu\right\rangle = \sum_{k\geqslant 1} h_k z^k s_\mu = \sum_{k\geqslant 1} h_k s_\mu z^k = \sum_\nu s_\nu z^{|\nu-\mu|} = \sum_\nu z^{|\nu-\mu|}\left|\nu\right\rangle \tag{56}$$