Геометрическое введение в многообразия Накаджимы

Ваня Яковлев
матфак ВШЭ

6 Мая, 2020

Аннотация

Лекция посвящена гиперкелеровой геометрии. Будут даны все определения, разобрана конструкция гиперкелеровой редукции и рассмотрен пример многообразий Накаджимы.

Пререквизиты дифференциальная геометрия, комплексный анализ, главные G-расслоения, группы и алгебры Ли, теория представлений, коммутативная алгебра.

Неформальная мотивация

Мы исследуем теорию Дональдсона-Томаса на $X = C \times X$ для кривой C и поверхности S

$$DT(X) = DT(C \times S),$$

Модули $\mathcal{M}_X$ пучков без кручения на X содержат подмногообразие семейств пучков

$$Map_{holo}(C, \mathcal{M}_S).$$

Пространство $\mathcal{M}_S$ поддается исследованию, например, для случая комплексной плоскости

$$S = \mathbb{C}^2 \Rightarrow \mathcal{M}_S = Hilb(\mathbb{C}^2).$$

Существует естественный класс *ALE* поверхностей, обобщающих комплексную плоскость. По теореме Кронхеймера, они исчерпываются разрешениями Клейновых особенностей

$$\widehat{\mathbb{C}^2/\Gamma}, \;\; \Gamma \subset Sl(2, \mathbb{C}) \text{ конечная группа.}$$

Это дает описание ALE поверхностей как многообразий оснащенных представлений

$$S = R(Q_S) := Rep(Q_S).$$

ALE поверхности это двумерный пример сразу двух важных для нас структур - гиперкелерова многообразия и симплектического разрешения особенностей.
Эти структуры переносятся с поверхности S на пространство инстантонов $\mathcal{I}_S$ и на $\mathcal{M}_S$:

$$S \text{ - ALE} \Rightarrow S, \; \mathcal{I}_S, \; \mathcal{M}_S \text{ гиперкелерово симплектическое разрешение.}$$

Более того, $\mathcal{I}_S$ и $\mathcal{M}_S$ тоже описываются как многообразие оснащенных представлений колчанов. В случае инстантонов, это утверждение обобщает ADHM-соответствие

$$S \text{ - ALE} \Rightarrow \mathcal{M}_S, \; \mathcal{I}_S \text{ пространства оснащенных представлений.}$$

Неформальная мотивация

Таким образом, изучение пространств модулей $\mathcal{M}_S$ пучков на поверхностях S естественно приводит к рассмотрению гиперкелеровых симплектических разрешений особенностей, более того все они являются пространствами представлений оснащенных колчанов

$$Q \text{ - колчан с прошлого слайда } \Rightarrow R_Q \text{ гиперкелерово симплектическое разрешение.}$$

Накаджима исследовал некоторый широкий класс оснащенных колчанов Q, содержащий колчаны из предыдущих примеров. Многообразия Накаджимы R_Q снабжаются канонической структурой гиперкелеровой симплектического разрешения особенностей

$$Q \text{ - колчан Накаджимы } \Rightarrow R_Q \text{ - гиперкелерово многообразие.}$$

Многообразия Накаджимы включают, помимо модулей пучков и инстантонов на поверхностях, важный класс кокасательных пространств к многообразиям флагов в типе А

$$T^*(F_{n_1,\ldots,n_k}) = R_{Q_{n_1,\ldots,n_k}}.$$

Теория Громова-Виттена R_{Q_S} описывает голоморфные отображения C в R_{Q_S}, то есть

$$DT(X) = DT(C \times S) \longleftrightarrow GW(R_{Q_S}).$$

Наличие струтуры гиперкелерова симплектического разрешения особенностей накладывает сильные ограничения на геометрию многообразия. О подсчете голоморфных кривых на многообразиях Накаджимы получены различные результаты (Окуньков+), в том числе об

- эквивариантной теории Громова-Виттена,
- эквиваринатной квантовой K-теории,
- теории разностных квантовых уравнений,
- и программе зеркальной симметрии.

Сегодня мы займемся гиперкелеровой геометрией многообразий Накаджимы.

Часть I Гиперкелерова геометрия

Предполагается, что будет еще вторая часть доклада, посвященная эквивариантной теории Громова-Виттена на многобразиях Накаджимы и связи с теорией Дональдсона-Томаса.

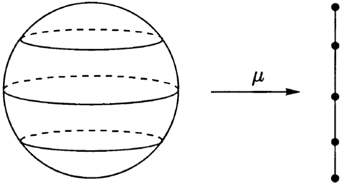


Рис. 5.1. Действие S^1 на S^2

Замечание

Рассмотрим комплексное многообразие M. На касательном расслоении TM действует оператор J, $J^2 = -Id$, заданный в координатах как дифференциал умножения на $\sqrt{-1}$:

$$\forall p \in M, \forall v \in T_pM\ J(v) := d(\phi^{-1}) \circ (\times\sqrt{-1}) \circ d\phi(v), \text{ где}$$

$$p \in U \subset M \text{ голоморфная карта на } M,\ \phi : U \to \mathbb{C}^n :\ \phi(p) = 0.$$

Оператор $J \in End(TM)$ называется **интегрируемой почти комплексной структурой**, *связанной с M. Он не зависит от выбора координатной карты из атласа. Напомним, что*

$$f \in \mathcal{O}(M) \Leftrightarrow \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0 \Leftrightarrow df \circ J = \sqrt{-1} df,\ \text{так как } J(dz) = \sqrt{-1} dz,\ J(d\bar{z}) = -\sqrt{-1} d\bar{z}.$$

Определение

Келеровым многообразием *размерности $\dim_{\mathbb{C}} = n$ называется такая тройка (M, J, ω), что*

- *M комплексное многообразие, J связанная почти-комплексная структура;*
- *$\omega \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$ замкнутая невырожденная: $d\omega = 0$, $\iota.\omega : TM \xrightarrow{\approx} T^*M \Leftrightarrow \omega^{\wedge n} > 0$;*
- *тензор $\rho(\cdot, \cdot) := \omega(J\cdot, \cdot)$ определяет риманову метрику на многообразии M.*

Для $J \in End(TM)$, $J^2 = -Id$ и $\omega \in \Omega^2(M)$ с этими соотношениями следующее равносильно

$$J \text{ интегрируемо} \Leftrightarrow \nabla_{\rho}^{LC}(J) = 0.$$

Несколько конструкций

Конструкция

Стартуя с келеровых многообразий, мы можем построить новые примеры. В частности

- *келерова структура может быть ограничена на открытое подмногообразие;*
- *келерова структура поднимается на накрытие келерова многообразия;*
- *произведение келеровых многообразий келерово;*
- *келерова структура спускается на M/G, если комплексная группа Ли G действует на M собственно, биголоморфными изометриями, так что фактор является многообразием*

$$G \times M \to M, \ \forall x \in M: \ G(x) \approx G/H.$$

Замечание

Рассмотрим подмногообразие N келерова многообразия (M, J, ω). Тогда выполнено

$$J(TN) \subset TN \Leftrightarrow \omega|_N \text{ невырожденно.}$$

Таким образом, ограничение $(\omega|_N, J|_N)$ индуцирует келерову структуру на комплексных подмногообразиях келерова многообразия $N \subset M$. В частности, голоморфное отображение

$$f : M \to B, \ M_b := f^{-1}(b),$$

задает семейство келеровых многообразий M_b, параметризованное $b \in B - Critv(f)$.

Плюрисубгармонические функции

Определение

Функция $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *на комплексном* (M, J) *называется* **плюрисубгарминической**, *если*

$$\forall p \in M,\ \forall v \in T_pM - \{0\} \text{ выполнено неравенство}$$

$$-dd^{\mathbb{C}} F_p(v, Jv) > 0, \text{ где } d^{\mathbb{C}} F := dF \circ J.$$

Замечание

В локальных координатах $\{z_1, \dots, z_n\}$ *форма* $-dd^{\mathbb{C}} F_p(v, Jv)$ *записывается в виде матрицы*

$$-dd^{\mathbb{C}} F_p(v, Jv) = 2\sqrt{-1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j\right)_{(i,j)}(v, Jv) = 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j\right)_{(i,j)}(v, v).$$

Пример

- *На эрмитовом пространстве* (V, h) *функция* $|v|^2 := \rho(v, v)$ *плюрисубгармонична;*
- *ограничение* $F|_N$ *плюрисубгармоничной функции* $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *с комплексного многообразия* (M, J) *на комплексное подмногообразие* $N \subset M$ *плюрисубгармонично,*
- *любая исчерпывающая плюрисубгармоническая функция происходит из ограничения* $|v|^2$ *на замкнутое подмногообразие* (V, h)*, т.е.* M *с такой функцией* F *аффинно.*

Келеров потенциал

Определение

Плюрисубгармоническая функция F на M определяет келерову структуру $(M, J, -\frac{1}{2}dd^{\mathbb{C}}F)$.
Келеров потенциал (M, J, ω) *это исчерпывающая функция* $F \in \mathcal{C}^{\infty}(M) : -\frac{1}{2}dd^{\mathbb{C}}F = \omega$.

Замечание

На компактном многообразии M невырожденная форма ω не может быть точна, так как

$$\langle [M], [\omega]^n \rangle = \langle [M], [\Omega] \rangle = \int_M \Omega = Vol(M) > 0, \text{ где } \Omega = \omega^{\wedge n} \text{ индуцированная форма обьема.}$$

Таким образом, на M нет плюрисубгармонических функций и потенциала. Локально, келеров потенциал всегда существует и единственен с точностью до прибавления функции

$$h \in \mathcal{C}^{\infty}(M) : \ \partial\bar{\partial}h = 0.$$

Функция h может быть представлена как $Re(f)$ для некоторой голоморфной функции.

Замечание

Все описанные операции на келеровых многообразиях, кроме фактора, сохраняют свойство иметь потенциал. У нас нет хорошего источника компактных келеровых многообразий. Ниже мы опишем конструкцию келеровой редукции и получим много примеров.

Определение

Симплектоморфизм (M, J, ω) *это диффеоморфизм многообразия* M, *сохраняющий* ω.

$$Symp(M) := \{\phi \in Diff(X) | \ \phi^*\omega = \omega\}.$$

Симплектическое векторное поле *это поле, поток которого лежит в симплектоморфизмах*

$$X \in \mathfrak{symp}(M) \Leftrightarrow \phi_X^t \in Symp(M).$$

Замечание

Векторное поле $X \in \mathcal{X}(M)$ *симплектическое тогда и только тогда, когда* $\iota_X\omega$ *замкнута:*

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega) + \iota_X d\omega = d\iota_X\omega.$$

Для $H \in \mathcal{C}^\infty(X)$ *рассмотрим симплектическое поле* X_H, ω*-двойственное* dH: $\iota_{X_H}\omega = dH$. *Оно* J*-перпендикулярно* ρ*-градиенту* H, $grad_\rho H = -JX_H$ *так как* $\iota_{-JX_H}\rho = \iota_{X_H}\omega = dH$.

Определение

X_H *называется* **гамильтоновым полем** *функции* H. *Поток* $\phi^1_{X_H}$ *порождает* $Ham(M)$:

$$Ham(M) := \langle \phi^1_{X_H} | \ H \in \mathcal{C}^\infty(M) \rangle \subset Symp(M), \ \mathfrak{ham}(M) \subset \mathfrak{symp}(M).$$

Определение

Редуктивная группа $G = U_{\mathbb{C}}$ *это связная комплексная группа Ли, являющаяся комплексификацией компактной вещественной группы Ли* U, *т.е такая, что* $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \otimes \mathbb{C}$.
Келерово действие *редуктивной группы* $G = U_{\mathbb{C}}$ *на* (M, J, ω) *это гомеоморфизм*

$$\Psi : G \to Biholom(M)|\ \Psi(U) \subset Simp(M).$$

Фундаментальное векторное поле *это дифференциал ограничения* $U \to Diff(M)$ *в* Id:

$$\xi \in Hom(T_e U, T_e Diff(M)) = Hom(\mathfrak{u}, \mathcal{X}(M)) = \mathcal{X}(M) \otimes \mathfrak{u}^*,$$

$$\forall x \in M, g \in \mathfrak{u}\ \langle g, \xi_x \rangle := \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(exp(gt) \cdot x).$$

Поле ξ *определяет гомоморфизм алгебр Ли* $\mathfrak{u} \to \mathcal{X}(M)$ *относительно скобки Ли.*
Отображением момента *для келерова действия называется* $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{u}^*)$, *такое, что*

$$grad_\rho \mu = -J\xi \Leftrightarrow d\mu = \iota_\xi \omega \Leftrightarrow \forall g \in \mathfrak{u} :\ X_{\langle g, \mu \rangle} = \xi(g).$$

Отображение μ **эквиваринтно**, *если оно переставляет* Ψ *и коприсоединенное действие* $Ad^*_{\mathfrak{u}}$

$$\mathcal{L}_\xi \mu = ad^*_{\mathfrak{u}} \mu \Leftrightarrow \forall p \in M,\ \forall g \in U :\ \mu(g \cdot p) = Ad^*_g(\mu(p)).$$

Действие $Ad^*_{\mathfrak{u}}$ *определено как* $Ad^*_{\mathfrak{u}}(g) := -(D_e A_g)^*$, *для* $A : U \to Aut(U)$, $A_g(h) := ghg^{-1}$.

Критерий существования отображения моментов

Определение

Скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ *это скобка Ли на алгебре функций* $\mathcal{C}^\infty(M)$, *определенная как*

$$\forall f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)\ \{f, h\} := -\omega(X_f, X_h).$$

Экивариантность отображения моментов μ *равносильно согласованности со скобкой Ли*

$$\{\mu,\mu\} = -\omega(\xi,\xi) = -\mathcal{L}_\xi \mu = -ad^*\mu = -\mu(ad^*_{\mathfrak{u}}) = \mu(ad_{\mathfrak{u}}).$$

Замечание

Заметим, что μ *это поднятие* $\xi : \mathfrak{u} \to \mathfrak{symp}(M)$ *в* $\mathcal{C}^\infty(M)$ *в комплекск алгебр Ли*

$$0 \to (H^0(M,\mathbb{R}), triv) \to (\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}) \xrightarrow{H \mapsto X_H} (\mathfrak{symp}(M), [\cdot,\cdot]) \xrightarrow{X \to [\iota_X \omega]} (H^1(M,\mathbb{R}), triv) \to 0.$$

Существование поднятия равносильно $[\iota_\xi \omega] = 0$*, это зануление 1-коцикла* $\mathfrak{u}$ *в* $H^1(M)$*. Препятствие к согласованности со скобкой это 2-коцикл* $\mathfrak{u}$ *в* $H^0(M)$*, Таким образом*

$$[H^1(\mathfrak{u}, H^1(M,\mathcal{R})) = H^2(\mathfrak{u}, H^0(M,\mathcal{R})) = 0] \Rightarrow [\exists \mu \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathfrak{u}) :\ d\mu = \iota_\xi\omega,\ \mathcal{L}_\xi\mu = ad^*_{\mathfrak{u}}\mu].$$

Следовательно, отображение моментов существует на любом односвязном M*. Его можно выбрать эквивариантным, если* $H^i(\mathfrak{u}) = 0$ $i \leq 1$*, например для полупростой группы Ли* U*. (Экививариантное) отображение моментов определено с точностью до (центра)* $\mathfrak{u}^*$*.*

Гамильтоновы поля для многообразий с потенциалом

Замечание

Пусть $G = U_{\mathbb{C}}$ *действует биголоморфизмами на многообразии с келеровым потенциалом*

$$(M, J, \omega), \ \omega = -(1/2)dd^{\mathbb{C}}F.$$

U *сохраняет* ω *тогда и только тогда, когда* $L := \mathcal{L}_\xi F \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{u}^*)$ *плюригармонична:*

$$\mathcal{L}_\xi \omega = -(1/2)dd^{\mathbb{C}}L | \ \xi \in \mathfrak{symp}(M) \otimes \mathfrak{u}^* \Leftrightarrow \mathcal{L}_\xi(\omega) = 0 \Leftrightarrow -dd^{\mathbb{C}}L = 0.$$

Мы можем усреднить F *по действию* U*, чтобы получить новый* U*-инвариантный потенциал для* ω*. Тогда* L *равна* 0 *и* $\mu := (1/2)\mathcal{L}_{J\xi}F$ *это эквивариантное отображение моментов*

$$2\iota_\xi\omega = -\iota_\xi(dd^{\mathbb{C}}F) = -\mathcal{L}_\xi(d^{\mathbb{C}}F) + d(\iota_\xi d^{\mathbb{C}}F) = -d^{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_\xi F) + d(\iota_{J\xi}dF) = -d^{\mathbb{C}}L + 2d\mu \Rightarrow \iota_\xi\omega = d\mu$$

Пример

Для унитарного действия на эрмитовом пространстве отображение моментов пишется явно

$$\Psi : U \to U(V, h), \ \omega = -\frac{1}{2}dd^{\mathbb{C}}|v|^2, \ L = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}\iota_\xi\omega, \ \textit{так как}$$

$$\forall g \in \mathfrak{u} : \ \langle g, \mu\rangle(v) = \mathcal{L}_{\langle g, \xi\rangle}\mu(v) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{Jg}|v|^2 = \frac{1}{2}\rho(J\langle g, \xi_v\rangle v, v) = \frac{1}{2}\omega(v, \langle g, \xi_v\rangle) = -\frac{1}{2}\omega(gv, v).$$

1.3 Действие U на T^*U

Конструкция

Для компактной группы Ли U с формой Киллинга tr рассмотрим структуру группы на T^*U

$$\widehat{U} := T^*U = U \ltimes \mathfrak{u}^* = (U \times \mathfrak{u},\ (g_1, X_1) \circ (g_2, X_2) = (g_1 \cdot g_2,\ Ad^*(g_2^{-1})X_1 + X_2).$$

Каноническая форма θ на $\widehat{U} = T^*U$ в тривиализации $T\widehat{U} = \widehat{U} \times (\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^*)$ имеет вид

$$\forall g \in U,\ v \in T_g^*U,\ l \in T_{(g,v)}(T^*U),\ \theta_{(g,v)}(l) := \pi^* v_{(g,v)}(l) = \langle D\pi_{(g,v)}(l), v\rangle,$$

$$\forall X \in \mathfrak{u}^*,\ (Y, Z) \in \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^*,\ \theta_{(g,X)}(Y, Z) = \langle Y, X\rangle.$$

Форма tr определяет почти-комплексную структуру на $\widehat{U}$, заданную $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$. Она интегрируема, так как согласована с вложением $\widehat{U} \subset G := U_{\mathbb{C}}$. На $\widehat{U}$ задана функция

$$F \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{U}):\ F(g, X) := tr(X, X),\ -\frac{1}{2} d^{\mathbb{C}} F = \theta.$$

F плюрисубгармонична, так как $\omega = d\theta$-каноническая симплектическая форма. G действует на $\widehat{U}$ слева биголоморфизмами, с фундаментальным полем ξ и отображением моментов μ

$$\xi \in \mathcal{X}(\widehat{U}) \otimes \mathfrak{u}^*,\ \xi_{(g,X)}(Y) = Y \oplus 0 \Rightarrow \langle Y, \mu(g, X)\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{J\xi(Y)} F(g, X) = \langle Y, X\rangle.$$

Таким образом действие келерово с эквивариантным отображением момента $\mu(g, X) = X$. Для $U = (V, +)$ как группы по сложению вычисление продолжает работать и $\mu(q, p) = p$.

Орбиты коприсоединенного действия

Обозначения

Для $g \in \mathfrak{u}^*$ **орбита коприсоединенного действия** *$\mathcal{O}_g$ есть фактор $\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)$ по U*

$$\mathcal{O}_g := Ad^*(U)(g) \approx \mu^{-1}(\mathcal{O}_g)/U.$$

Конструкция

Форма tr определяет связность Эресмана на главном U-расслоении $\pi : \mu^{-1}(\mathcal{O}_g) \to \mathcal{O}_g$

$$\forall x \in \mu^{-1}(\mathcal{O}_g)\ T_x(\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)) = T_x(U \cdot x) \oplus (T_x(U \cdot x))^{\perp tr} \xrightarrow[\approx]{D\pi} \mathfrak{u} \oplus T_{\mu(x)}\mathcal{O}_g.$$

Аналогично, метрика, заданная формой tr, позволяет расщепить $T\widehat{U}|_{\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)}$ в сумму

$$T\widehat{U}|_{\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)} = (T(\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)))^{\perp tr} \oplus T(\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)) = N_{\widehat{U}/\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)} \oplus T(\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)).$$

Нормальное расслоение $\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)$ в $\widehat{U}$ совпадает с $grad_{tr}\mu(\mathfrak{stab}_g)$, следовательно

$$\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^* \approx \mathfrak{u} \oplus J(\mathfrak{stab}_g) \oplus T\mathcal{O}_g.$$

Таким образом, мы вложили $T\mathcal{O}_g$ в $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^*$ ортогонально подпространству $\mathfrak{u} \oplus J(\mathfrak{stab}_g)$. Мы получили изоморфизм $T\mathcal{O}_g \approx \mathfrak{u}^*/J(\mathfrak{stab}_g)$, который приходит из главного $Stab_g$ расслоения

$$Stab_g \to U \to \mathcal{O}_g.$$

Определение

Формой Кириллова-Костанта-Сурье *на орбите* $\mathcal{O}_g$ *называется* $\omega_{\mathcal{O}_g} \in \Omega^2(\mathcal{O}_g, \mathbb{R})$

$$\forall h \in \mathcal{O}_g \ \forall f_1, f_2 \in T_h\mathcal{O}_g \ \omega_{\mathcal{O}_g,h}(f_1, f_2) = tr([f_1, f_2], h).$$

Предложение

Форма $\omega_{\mathcal{O}_g}$ *замкнута и невырождена (см. конспект курса* **Гамильтонова редукция***).*

Замечание

Образ вложения $T\mathcal{O}_g \to \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^*$, *заданного разложением на пространстве* $T\widehat{U}|_{\mu^{-1}(\mathcal{O}_g)}$

$$\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^* \approx \mathfrak{u} \oplus J(\mathfrak{stab}_g) \oplus T\mathcal{O}_g$$

не сохраняется оператором J *(кроме тривиального случая* Ad^**-инвариантного* g*). Ниже мы обобщим нашу конструкцию на произвольные келеровы действия, то есть снабдим фактор*

$$Z_g = \mu^{-1}(g)/U, \ Ad^*g = g$$

(который может быть чем-то интересным) структурой келерова многообразия.

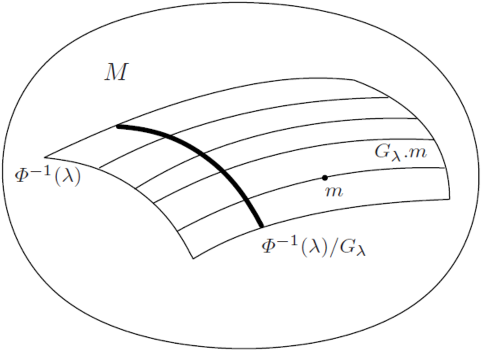


Fig. 5.1. The orbits of the stabilizer group G_λ in the preimage $\Phi^{-1}(\lambda)$.

Замечание (Гильемин-Стернберг)

Для келерова действия $G = U_{\mathbb{C}}$ на (M, J, ω) с эквивариантным отображением момента μ и $x \in M$ обозначим U-стабилизатор x за $Stab_x$. Тогда выполнено $Im(d\mu_x) = Ann(\mathfrak{stab}_x) \subset \mathfrak{u}^*$.

Доказательство.

$$\forall v \in T_x M,\ \langle \mathfrak{stab}_x, d\mu_x(v) \rangle = \omega(\langle \mathfrak{stab}_x, \xi_x \rangle, v) = 0 \ \Rightarrow Im(d\mu_x) \subset Ann(\mathfrak{stab}_x);$$

$$d\mu_x(v)(\mathfrak{u}) = \omega(\xi_x(\mathfrak{u}), v) = \omega(T_x(U \cdot x), v) \Rightarrow \ker(d\mu_x) = (T_x(U \cdot x))^{\perp \omega};$$

$$\dim Im(d\mu_x) = \dim T_x M / ker(d\mu_x) = \dim T_x M / T_x(U \cdot x))^{\perp \omega} = \dim(T_x(U \cdot x)) = \dim(Ann(\mathfrak{stab}_x)).$$

□

Если действие U на $Z_{\mathcal{O}_g} := \mu^{-1}(\mathcal{O}_g)$ локально-свободно, то $Z_{\mathcal{O}_g}$ - гладкое многообразие:

$$\forall x \in Z_{\mathcal{O}_g} :\ \mathfrak{stab}_x = \{0\} \Rightarrow \mu(x) \notin Critv(\mu).$$

Определение

Келерова редукцией (M, J, ω) *по G с эквивариантным отображением момента μ это*

$$M_{red} = M//_{\mathcal{O}_g} U := Z_{\mathcal{O}_g}/U,\ Z_{\mathcal{O}_g} = \mu^{-1}(\mathcal{O}_g).$$

Если действие U на $Z_{\mathcal{O}_g}$ свободно, то $Z_{\mathcal{O}_g}$ и M_{red} являются гладкими многообразиями.

Форма Марсдена-Вайнштейна

Конструкция

Пусть действие U на $Z_{\mathcal{O}_g}$ свободно. Тогда M_{red} гладко и задано главное U-расслоение

$$U \to Z_{\mathcal{O}_g} \to M_{red}.$$

В точке $x \in Z_{\mathcal{O}_g}$ последовательность $T_x(U \cdot x) \to T_x Z_{\mathcal{O}_g} \to T_{[x]} M_{red}$ точна, так что

$$T_{[x]} M_{red} \approx T_x Z_{\mathcal{O}_g} / (T_x(U \cdot x)) \approx T_{\mu(x)} \mathcal{O}_g \oplus \ker d\mu_x / (T_x(U \cdot x)) =$$

$$\approx T_{\mu(x)} \mathcal{O}_g \oplus (T_x(U \cdot x))^{\perp\omega} / (T_x(U \cdot x)).$$

Воспользуемся этим, чтобы определить замкнутую 2-форму **Марсдена-Вайнштейна** ω_{red} *на*

$$\forall (\xi_1, [\eta_1]), (\xi_2, [\eta_2]) \in T_{[x]}(Z_g/U),\ \omega_{red,[x]}([\xi], [\eta]) := \omega_{\mathcal{O}_g, \mu(x)}(\xi_1, \xi_2) + \omega_x(\eta_1, \eta_2).$$

Замечание (Марсден-Вайнштейн-Майер)

Покажем невырожденность 2-форма ω_{red} на M_{red}. Так как $\omega_{\mathcal{O}_g}$ невырожденно, достаточно разобраться с индуцированным корректно определенным, кососимметричным спариванием

$$\widehat{\omega_x} \in \Lambda^2(W^{\perp\omega_x}/W), \text{ где } W = T_x(U \cdot x).$$

Любой элемент из ядра $\iota_* \omega_x|_{W^\perp}$ лежит в $(W^\perp)^\perp = W$, так что $\widehat{\omega_x}$ невырождено.

Комплексная структура на M_{red}

Предложение (Хитчин, Карлхеде, Линдстрем, Рочек)

Для Ad^*-инвариантного элемента $g \in \mathfrak{u}^*$ ограничение J с M на $M_{red} = M//_g U$ определяет комплексную структуру J_{red}, для которой $(M, J, \omega)_{red}$ является келеровым многообразием.

Доказательство.

Риманова метрика ρ определяет связность Эресмана на расслоении $\pi : Z_g \to M_{red}$, т.е.

$$\forall x \in Z_g : \; T_x Z_g = T_x(U \cdot x) \oplus (T_x(U \cdot x))^{\perp \rho} \xrightarrow[\approx]{D\pi} \mathfrak{u} \oplus T_x M_{red}.$$

Нормальное расслоение $N_{M/Z_g} \approx (T_{Z_g})^{\perp \rho}$ порождено $\mathrm{grad}_\rho \mu(\mathfrak{u}) = -J\xi(\mathfrak{u})$. Таким образом

$$\forall x \in Z_g : \; T_x M \approx J\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u} \oplus T_x M_{red} = \mathfrak{u} \otimes \mathbb{C} \oplus T_x M_{red}.$$

Следовательно J индуцирует почти-комплексную структуру J_{red} на M_{red}. Она интегрируема, так как выполнено $\nabla^{LC}_{\rho_{red}}(J_{red}) = \nabla^{LC}_\rho(J)|_{T_x M_{red}} = 0$, следовательно $(M, J, \omega)_{red}$ келерово. □

Мы построили келеров фактор (M, J, ω) по действию G! Так как поднятие каждой функции с M_{red} на M коммутирует с μ, (на философском уровне) это обобщение теоремы Нетер.

Замечание

Обобщение этого утверждения на $M//_{\mathcal{O}_g} U$ не верно для орбиты $\mathcal{O}_g$, если $\dim \mathcal{O}_g \neq 0$.

2.2 GIT фактор

Определение

Пусть M аффинное алгебраическое многообразие с алгебраическим действием группы G

$$M = Spec(M[X]).$$

Замыкание любой G-орбиты $\overline{\mathcal{O}_x}$ содержит единственную замкнутую орбиту. Замкнутые орбиты параметризованы **категорным фактором** *$M/G := Spec\mathbb{C}[M]^G$ так что*

$$\pi : M \to M/G,\ \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}_x} \cap \overline{\mathcal{O}_y} \neq \emptyset.$$

Любой G-инвариантный морфизм $\phi : M \to N$ пропускается через эту проекцию $\phi = \widehat{\phi} \circ \pi$. **GIT-фактор Мамфорда**, *отвечающий характеру $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ это многообразие*

$$M/_{\chi}^{GIT} G = Proj(\mathbb{C}[M \times \mathbb{C}]^G) = Proj(S),\ \text{где}\ S := \bigoplus H^0(L^k)^G,\ k \geq 0,$$

а L это тривиальное линейное расслоение над M с G-эквивариантной структурой, заданной

$$L = M \times \mathbb{C} \to M\ \forall (x, \lambda) \in L:\ g \cdot (x, \lambda) := (g \cdot x, \chi(g) \cdot \lambda).$$

Пример

Многообразие M можно эквивариантно вложить в векторное пространство V, на котором группа действует линейно. А именно, существует эквивариантная сюрьекция на $\mathbb{C}[M]$ из любого G-инвариантного подпространства $\mathbb{C}[M]$, порождающего всю алгебру.

Описание фактора

Замечание

Для линеаризаци действия G на M с помощью тривиального характера $\chi = 1$ имеем

$$S = \mathbb{C}[M]^G \otimes \mathbb{C}[z] \Rightarrow M/^{GIT}_{\chi=1}G = M/G.$$

С другой стороны, для произвольного действия и сюрьективного характера χ имеем

$$S = \mathbb{C}[M]^K, \text{ где } K := \ker\chi \Rightarrow M/^{GIT}_{\chi}G = (M/K)/^{GIT}_{id}\mathbb{C}^*.$$

Замечание

Рассмотрим самый важный случай $G = \mathbb{C}^*$, $\chi = id$. Мы можем геометрически описать $M/^{GIT}_{id}\mathbb{C}^*$ следующим образом. Рассмотрим категорный фактор $\hat{M} := M \times \mathbb{C}/\mathbb{C}^*$ по действию, заданному линеаризацией. Действие $\mathbb{C}^*$ вдоль слоев L переносится на $\hat{M}$. Тогда

$$M/^{GIT}_{id}\mathbb{C}^* = (\hat{M} - \hat{M}^{\mathbb{C}^*})/\mathbb{C}^*, \text{ где } \hat{M}^{\mathbb{C}^*} \text{ - неподвижные точки.}$$

Пример

Пусть действие $\mathbb{C}^*$ притягивающее, то есть стягивает M на множество неподвижных своих точек $N = M^{\mathbb{C}^*}$. Тогда многообразие $Proj(\mathbb{C}[M])$ описывается как $(M - N)/\mathbb{C}^*$. Например,

$$\mathbb{C}^{n+1}/^{GIT}_{id}\mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^n.$$

Стабильные орбиты

Определение

Точка $x \in M$ называется **χ-полустабильной** *для действия G, если $\exists f \in S_{d>0} : f(x) \neq 0$.*
Полустабильная точка $x \in M$ называется **χ-полистабильной**, *если $\mathcal{O}_x$ замкнута в M^{ss}.*

Замечание

Для точки $x \in M$ и характера χ-полустабильность можно охарактеризовать как:

$$x \in M^{ss} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}_{(x,1)}} \cap (M \times \{0\}) = \emptyset,$$

$$x \in M^{ps} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{(x,1)} \text{ замкнуто.}$$

В частности, точка x полустабильна тогда и только тогда, когда единственная замкнутая орбита $\pi(x)$ в замыкании $\pi(x) \subset \overline{\mathcal{O}_{(x,1)}}$ сама является полистабильной.

Предложение (Критерий Гильберта-Мамфорда)

Точка x полустабильна если она полустабильна для всех однопрарметрических подгрупп

$$\forall \lambda : \mathbb{C}^* \to G \text{ если } [\exists y = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x] \text{ то } [m = deg(\chi \circ \lambda) \geq 0], \text{ где } \chi \circ \lambda(t) = t^m.$$

Следовательно, χ-полустабильность это условие на характер, заданный ограничением $\chi|_U$.

Теорема Мамфорда

Предложение (Мамфорд)

Рассмотрим аффинное многообразие M с алгебраическим действием G и характер χ. Тогда

- *GIT-фактор $M/_{\chi}^{GIT}G$ является категорным фактором M_{χ}^{ss};*
- *его точки параметризуют множество полистабильных орбит;*
- *подмножество орбит M^s/G, имеющих конечный стабилизатор, открыто;*
- *более того, многообразие M^s/G гладкое.*

Замечание

Эту теорема дает конструкцию GIT-фактора, совсем не апеллирующую к алгебраической геометрии. Действительно, $M/_{\chi}^{GIT}G$ это просто множество полистабильных орбит

$$x \in M^{ps} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{(x,1)} \text{ компактно}, \ M/_{\chi}^{GIT}G = M^{ps}/G.$$

Тогда не очевидным становится существование комплексной структуры на M^s/G.

2.3 Теорема Кемпа-Несс

Предложение (Кемп-Несс)

Для келерова действия на (M, J, ω), уважающего потенциал $F: \ \mathcal{L}_\xi F = 0$ и характера χ

$$\mu := 1/2\mathcal{L}_{J\xi} F, \ \zeta := (i/2) d_e \chi|_{\mathfrak{u}} \in \mathfrak{u}^*.$$

Тогда χ-полистабильность может быть охарактеризована следующим образом

$$\exists g \in G: \ \mu(g \cdot x) = -\zeta \Rightarrow x \in M_\chi^{ps} \Rightarrow \exists! g \in G/U: \ \mu(g \cdot x) = -\zeta.$$

Следствие

Из теоремы Мамфорда и теоремы Кемпа-Несс следует существование биголоморфизма

$$M/_\chi^{GIT} G \approx M_\chi^{ps}/G \approx M//_\zeta G.$$

Это позволяет построить алгебраическую структуру на $M//_\zeta G$ и келерову на $M/_\chi^{GIT} G$.

Замечание

Группа G действует на L келерово, уважая потенциал $\widehat{F}(x, \lambda) := F(x) + |\lambda^2|$, с отображением моментов $\widehat{\mu} := \mu + \zeta$. Таким образом, теорема Кемпа-Несс утверждает, что

$$\widehat{\mu}^{-1}(0) \cap \mathcal{O}_{(x,1)} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}_{(x,1)} \text{ замкнута } \Rightarrow \widehat{\mu}^{-1}(0) \cap \mathcal{O}_{(x,1)} = gUx.$$

Функция Кемпа-Несс

Определение

Функция Кемпа-Несс $p_x \in \mathcal{C}^\infty(G/U)$ *точки* $x \in M^{ss}$ *определяется как* $p_x(g) := \widehat{F}(g \cdot (x, 1))$.

Предложение

Критическая точка функции Кемпа-Несс определяет пересечение орбиты с $\widehat{\mu}^{-1}(0)$*:*

$$g \in Crit(p_x) \Leftrightarrow \widehat{\mu}(g \cdot (x, 1)) = 0.$$

Кроме того, единственная возможная $Stab_{(x,1)}$ *орбита* $Crit(p_x)$ *это глобальный минимум.*

Доказательство.

Единица является критической точкой $e \in Crut(p_x)$ *тогда и только тогда, когда* $\widehat{\mu}(x, 1) = 0$*:*

$$D_e p_x = \mathcal{L}_{J\xi} \widehat{F}(x, 1) = \widehat{\mu}.$$

Теперь мы получили утверждение $\forall g \in Crit(p_x)$*, так как* $p_x(g) = p_{g \cdot x}(e)$*. Заметим, что*

$$\forall \xi \in J\mathfrak{u} - \mathfrak{stab}_{(x,1)},\ \partial_\xi^2 p_x > 0,\ \text{так как } J \text{ плюрисубгармонична}$$

т.е. p_x *выпукла вверх на дополнении до* $\mathfrak{stab}_{(x,1)}$*, так что единственной ее критической точкой может быть глобальный минимум. Два глобальных минимума можно соединить геодезической, касающейся* $\mathfrak{stab}_{(x,1)}$*, так что все они лежат на одной* $Stab_{(x,1)}$*-орбите.* $\square$

Доказательство теоремы Кемпа-Несс

Предложение

Орбита $\mathcal{O}_{(x,1)} \subset L$ *группы* G *замкнута тогда и только тогда, когда* p_x *достигает минимума.*

Доказательство в одну сторону.

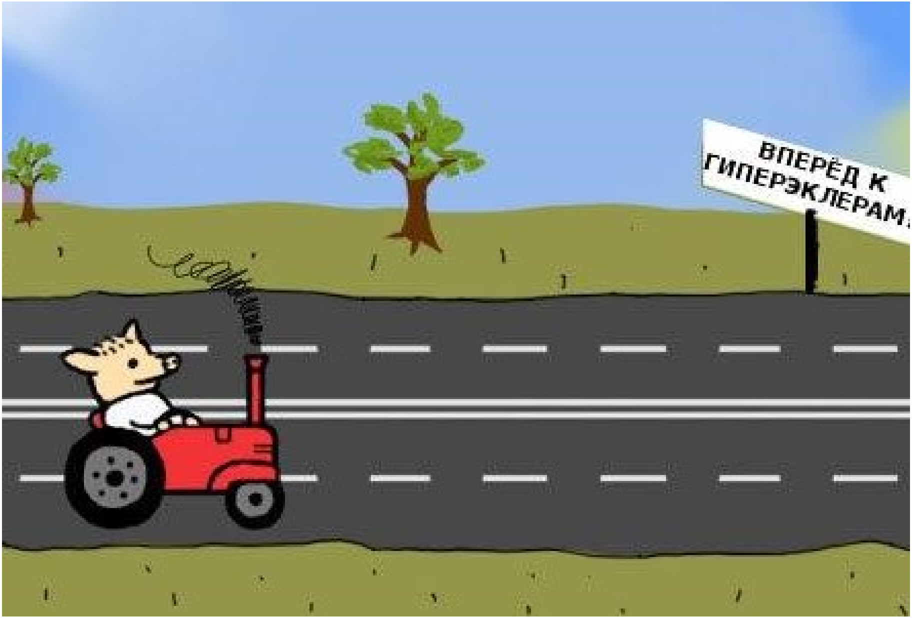
Функция p_x *спускается на* $\mathcal{O}_{(x,1)}$. *Если орбита замкнута, то* p_x *достигает минимума, так как функция* $\widehat{F} \geq F$ *ограничена снизу (по определению, потенциал исчерпывающий).* □

Lemma

Пусть p_x *достигает минимума в* e. *Тогда функция* $\widetilde{p_x} : Stab_{(x,1)} \backslash G / U \to \mathbb{R}$ *собственная.*

Вывод доказательства в другую сторону из леммы.

Пусть g *- минимум* p_x. *Тогда* $\widetilde{p_{g \cdot x}}$ *собственна. Рассмотрим* $g_i(x,1) \to (y, \lambda) \in L$. *Тогда* $\widetilde{p_{g \cdot x}}(g_i)$ *ограничена, следовательно* g_i *лежат на компакте в* $\mathcal{O}_{(x,1)}$ *и тоже имеет предел.* □


ВПЕРЁД К
ГИПЕРЭКЛЕРАМ