1 Фиксация обозначений

$$\Delta_{\lambda i\dot\alpha}(x) = a_{\lambda i\dot\alpha} + b^{\alpha}_{\lambda i} x_{\alpha\dot\alpha} \qquad \bar\Delta^{\lambda\dot\alpha}_i(x) = \bar a^{\lambda\dot\alpha}_i + \bar x^{\alpha\dot\alpha}\bar b^{\lambda}_{i\alpha} \qquad \bar\Delta = \Delta^\dagger \tag{1}$$

$$\bar\Delta U = \bar U\Delta = 0 \tag{2}$$

$$\bar\Delta^{\lambda\dot\alpha}_i \Delta_{\lambda i\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}(f^{-1})_{ij} \tag{3}$$

$$\bar\Delta = \begin{pmatrix} B_1 - z_1 & B_2 - z_2 & I \\ -B_2^\dagger + \bar z_2 & B_1^\dagger - \bar z_1 & -J^\dagger \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$A_{\alpha\dot\alpha} = \bar U \partial_{\alpha\dot\alpha} U \tag{5}$$

2 Нулевые моды фермионов в поле инстантона

Нулевая мода фермиона, преобразующегося по присоединенному представлению имеет вид:

$$\lambda_\alpha = \bar U(Mf\bar b_\alpha - b_\alpha f\bar M)U \tag{6}$$

Доказательство. Для начала докажем пару полезных тождеств:

$$\begin{aligned} \bar\nabla^{\alpha\dot\alpha}U = (\bar\partial^{\alpha\dot\alpha} + A^{\alpha\dot\alpha})U = (U\bar U + \Delta f\bar\Delta)(\bar\partial^{\alpha\dot\alpha} + A^{\alpha\dot\alpha})U = \\ = UA^{\alpha\dot\alpha} - UA^{\alpha\dot\alpha} + \Delta f\bar\Delta\bar\partial^{\alpha\dot\alpha}U = -\Delta f\bar\partial^{\alpha\dot\alpha}\bar\Delta U \end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично получается:

$$\bar\nabla^{\alpha\dot\alpha}\bar U = -\bar U\bar\partial^{\alpha\dot\alpha}\Delta f\bar\Delta \tag{8}$$

$$\bar\partial^{\alpha\dot\alpha} f = -f\bar\partial^{\alpha\dot\alpha}(\bar\Delta\Delta)f = -f\bar b^{\alpha}\Delta^{\dot\alpha} f = -f\bar\Delta^{\dot\alpha} b^{\alpha} f \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \bar\nabla^{\alpha\dot\alpha}\lambda_\alpha = (\bar\partial^{\alpha\dot\alpha} + [A^{\alpha\dot\alpha}, *])\lambda_\alpha = \bar U\left\{ M\bar\partial^{\alpha\dot\alpha} f\bar b_\alpha - Mf\bar b_\alpha\Delta f\bar\partial^{\alpha\dot\alpha}\bar\Delta - \bar\partial^{\alpha\dot\alpha}\Delta f\bar\Delta M f\bar b_\alpha - \right. \\ \left. - b_\alpha\bar\partial^{\alpha\dot\alpha} f\bar M + \bar\partial^{\alpha\dot\alpha}\Delta f\bar\Delta b_\alpha f\bar M + b_\alpha f\bar M\Delta f\bar\partial^{\alpha\dot\alpha}\bar\Delta \right\} U = \\ = \bar U\left\{ b^\alpha f(\bar\Delta^{\dot\alpha} M + M\Delta^{\dot\alpha}) f\bar b_\alpha \right\} U \end{aligned} \tag{10}$$

□

Отсюда следует фермионное уравнение ADHM:

$$\bar\Delta^{\dot\alpha} M + \bar M\Delta^{\dot\alpha} = 0 \tag{11}$$

Или явно расписывая компоненты:

$$\bar M^\lambda_i a_{\lambda j\dot\alpha} = -a^\lambda_{i\dot\alpha} M_{\lambda j} \qquad \bar M^\lambda_i b^\alpha_{\lambda j} = b^{\alpha\lambda}_i M_{\lambda j} \tag{12}$$

Вводя параметризации $M, \bar{M}$:

$$M = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_I \end{pmatrix} \qquad \bar{M} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\psi_1 \\ \psi_J \end{pmatrix} \tag{13}$$

Получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} [\psi_1, B_2] - [\psi_2, B_1] + I\psi_J + J\psi_I & = 0 \\ [\psi_1, B_1^\dagger] + [\psi_2, B_2^\dagger] + \psi_I I^\dagger - J^\dagger \psi_J & = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Посчитаем количество нулевых мод: имеем $2k(N+k)$ Грассмановых переменных, удовлетворяющих $2k^2$ условиям. Следовательно, имеем:

$$\dim \mathfrak{M}_{k,N}^{\mathrm{Adj}} = 2k(N+k) - 2k^2 = 2kN \tag{15}$$

В соотвествии с теоремой об индексе.

3 Действие преобразований суперсимметрии на ADHM пространстве

Для вычисления Некрасовской статсуммы используется твистованная теория Янга-Миллса. Напомним определение твистованного оператора $\overline{\mathcal{Q}}$ и то, как фермионные поля переписываются в терминах дифференциальных форм.

$$\overline{\mathcal{Q}} = \varepsilon^{A\dot{\alpha}} Q_{A\dot{\alpha}} \qquad \psi^\mu = \bar{\sigma}^{\mu A\alpha}\psi_{A\alpha} \qquad \bar{\psi} = \varepsilon^{A\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{A\dot{\alpha}} \qquad \bar{\psi}^{\mu\nu} = \bar{\sigma}^{\mu\nu}_{\dot{\alpha}A}\bar{\psi}^{A\dot{\alpha}} \tag{16}$$

Правила преобразования для параметров $ADHM$ следуют из преобразований суперсимметрии на полях:

$$\overline{\mathcal{Q}} A_{\alpha\dot{\alpha}} = i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}A}\lambda^A_\alpha \tag{17}$$

Определим δ_{mod} :

$$\delta_{\mathrm{mod}}\Delta_{\lambda i\dot{\alpha}} = i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}A} M^A_{\lambda i} \tag{18}$$

Действуя на U получаем:

$$\delta_{\mathrm{mod}} U = (\bar{U}U + \bar{\Delta} f \Delta)\delta_{\mathrm{mod}} U = \bar{U}\zeta - \bar{\Delta} f \bar{M} U \tag{19}$$

Первый член в последнем выражении - это калибровочное преобразование $\delta_\zeta U = -U\zeta$ с $\zeta = \bar{U}\delta_{\mathrm{mod}} U$. Как будет видно из последующих выкладок :

$$\overline{\mathcal{Q}} = \delta_{\mathrm{mod}} + \delta_\zeta \tag{20}$$

$$\overline{\mathcal{Q}} U = -\Delta f \bar{M} U \qquad \overline{\mathcal{Q}} U = -\bar{U} M f \bar{\Delta} \tag{21}$$

Убедимся, что $\overline{\mathcal{Q}}$ правильно воспроизводит преобразования суперсимметрии:

$$\overline{\mathcal{Q}} A = (\overline{\mathcal{Q}}\bar{U})dU + \bar{U}d(\overline{\mathcal{Q}}U) = -\bar{U}Mf\bar{\Delta}dU - \bar{U}d(\Delta f \bar{M} U) = \bar{U}(Mfd\bar{\Delta} - d\Delta f \bar{M})U = i\lambda \tag{22}$$

Расписывая в компонентах действие δ_{mod}, получаем:

$$\delta a_{\dot\alpha} = i\bar\xi_{\dot\alpha A} M^A \qquad \delta \bar a^{\dot\alpha} = i\bar\xi^{\dot\alpha}_A M^A \tag{23}$$

Или в терминах B_i, ψ_i:

$$\delta_{\text{mod}} B_i = \psi_i \qquad \delta_{\text{mod}} I = \psi_I \qquad \delta_{\text{mod}} J = \psi_J \tag{24}$$

Далее будет иногда удобно переходить к обозначениям:

$$a_{\lambda j\dot\alpha} = a_{(u+i\alpha)j\dot\alpha} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\dot\alpha,ij} \\ w_{\dot\alpha,uj} \end{pmatrix} \qquad \bar a_j^{\lambda\dot\alpha} = \bar a_j^{(u+i\alpha)\dot\alpha} = \begin{pmatrix} h_j^{\alpha\dot\alpha,i} & \bar w_j^{\dot\alpha,u} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Полный вывод нулевых мод для скалярного поля достаточно обьемный и громоздкий, для интересующихся можно посмотреть в 4 главе и дополнении работы [2], [1]. Выражение для скалярного поля на фоне инстантона имеет вид:

$$\phi_a = -\frac{1}{4}\bar\Sigma_{aAB}\bar U M^A f \bar M^B U + \bar U \begin{pmatrix} \phi_a^0 & 0_{[N]\times[2k]} \\ 0_{[2k]\times[N]} & \varphi_a 1_{[2]\times[2]} \end{pmatrix} U \tag{26}$$

Где $\bar\Sigma_{aAB}$ определена как:

$$\bar\Sigma_{aAB} = \varepsilon_{AB}\bar\Sigma_a \qquad \bar\Sigma_a = (-i, 1) \tag{27}$$

Предполагается, что $SU(N)$ нарушена до $U(1)^{N-1}$. ϕ_a - вакуумного средние для диагонализованного ϕ:

$$\phi_a^0 = \text{diag}\left((\phi_a^0)_1, (\phi_a^0)_2, \dots (\phi_a^0)_N\right) \tag{28}$$

А φ_a:

$$\varphi_a = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{4}\bar\Sigma_{aAB}\bar M^A M^B + I\phi_a^0 I^\dagger + J^\dagger \phi_a^0 J\right) \tag{29}$$

И оператор $\mathbf{L}$ определен, как:

$$\mathbf{L}\cdot\Omega = \frac{1}{2}\{II^\dagger + J^\dagger J, \Omega\} + [h_{\alpha\dot\alpha}, [h^{\alpha\dot\alpha}, \Omega]] \tag{30}$$

Преобразования суперсимметрии на фермионных нулевых модах же имеют вид:

$$\delta\lambda(M^A) = -i\sigma_a^{AB}(\nabla\phi_a)\bar\xi_B \tag{31}$$

Отсюда следуют преобразования коллективных координат на ADHM:

$$\delta M^A = 2i\Sigma_a^{AB}\mathcal{C}_{a\dot\alpha}\bar\xi_B^{\alpha} \qquad \delta\bar M^A = 2i\Sigma_a^{AB}\bar\xi_{\dot\alpha B}\mathcal{C}_a^{\dot\alpha} \tag{32}$$

Где $\mathcal{C}_{a\dot\alpha}, \mathcal{C}_a^{\dot\alpha}$ определяются как:

$$\mathcal{C}_{a\dot\alpha} = \begin{pmatrix} \phi_a^0 & 0 \\ 0 & \varphi_a \end{pmatrix} a_{\dot\alpha} - a_{\dot\alpha}\phi_a \qquad \mathcal{C}_a^{\dot\alpha} = \bar a^{\dot\alpha}\begin{pmatrix} \phi_a^0 & 0 \\ 0 & \varphi_a \end{pmatrix} - \phi_a \bar a^{\dot\alpha} \tag{33}$$

Отсюда получается действие оператора $\overline{\mathcal{Q}}$:

$$\overline{\mathcal{Q}}\psi^A = -2\varepsilon^{\dot\alpha A}(w_{\dot\alpha}\phi + \phi^0 w_{\dot\alpha}), A = (I, J) \qquad \overline{\mathcal{Q}}\psi^A = -2\varepsilon^{\dot\alpha A}[h_{\alpha\dot\alpha}, \phi], A = (1, 2) \tag{34}$$

Или переписывая снова в терминах B_i, ψ_i получаем:

$$\overline{\mathcal{Q}}\psi_i = [\phi, B_i] \qquad \overline{\mathcal{Q}}\psi_I = \phi I - I\phi^0 \qquad \overline{\mathcal{Q}}\psi_J = -J\phi + J\phi^0 \tag{35}$$

4 Ω - бэкграунд

$$\overline{\mathcal{Q}}_\Omega = \overline{\mathcal{Q}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Omega^\mu{}_\nu x^\nu Q_\mu \tag{36}$$

Выбор Ω - соответствует выбору комплексной структуры на $\mathbb{R}^4$, например:

$$z_1 = x_0 - ix_3 \qquad z_2 = x_2 - ix_1 \tag{37}$$

Следующий выбор дает:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

5 Окончательный вид действия оператора $\overline{\mathcal{Q}}$

Так как на пространстве модулей инстантонов должны выполняться ADHM уравнения, добавим в действие два мультиплета $(\mu_\mathbb{R}, H_\mathbb{R})$ и $(\mu_\mathbb{C}, H_\mathbb{C})$ в качестве Лагранжевых множителей, соответсвующие действительному и комплексному отображению момента. В настоящем разделе мы следуем работам [3], [4]. Задаваемое Ω действие тора $\mathbb{T}^2$ на B_1, B_2, I, J имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} B_1 \to e^{i\varepsilon_1}B_1 \qquad & B_2 \to e^{i\varepsilon_2}B_2 \\ I \to e^{-i\varepsilon_+}I \qquad & J \to e^{-i\varepsilon_+}J \\ \mu_\mathbb{R} \to \mu_\mathbb{R} \qquad & \mu_\mathbb{C} \to e^{i\varepsilon}\mu_\mathbb{C} \end{aligned} \tag{39}$$

С учетом Ω - бэкграунда, действие $\overline{\mathcal{Q}}$ на пространстве модулей инстантонов имеем вид, где введены обозначения $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}B_{1,2} = \psi_{1,2}, \qquad & \bar{Q}\psi_{1,2} = [\phi, B_{1,2}] + i\varepsilon_{1,2}B_{1,2} \\ \bar{Q}I = \psi_I, \qquad & \bar{Q}\psi_I = \phi I - Ia - i\varepsilon_+ I \\ \bar{Q}J = \psi_J, \qquad & \bar{Q}\psi_J = -J\phi + aJ - i\varepsilon_+ J \\ \bar{Q}\chi_\mathbb{R} = H_\mathbb{R}, \qquad & \bar{Q}H_\mathbb{R} = [\phi, \chi_\mathbb{R}] \\ \bar{Q}\chi_\mathbb{C} = H_\mathbb{C}, \qquad & \bar{Q}H_\mathbb{C} = [\phi, \chi_\mathbb{C}] + i\varepsilon\chi_\mathbb{C} \\ \bar{Q}\eta = \lambda, \qquad & \bar{Q}\lambda = [\phi, \lambda] \end{aligned} \tag{40}$$

По сравнению с недеформированным Ω случаем добавляются слагаемые, порожденные действием $\mathbb{T}^2$ 39. Действие на $H_\mathbb{C}$ следует из дейсвтия на $\mu_\mathbb{C}$ и инвариатности действия относительно тора. Инстантонная статсумма в терминах АДХМ параметров и введеных ранее Лагранжевых множителей имеет вид:

$$Z_k(a;\varepsilon) = \int \frac{\mathcal{D}\phi}{\mathrm{Vol}\,(G_D)}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}H\mathcal{D}\chi\mathcal{D}B_1\mathcal{D}B_2\mathcal{D}I\mathcal{D}J\mathcal{D}\psi\mathrm{e}^{i\bar{Q}(\chi\cdot\mu + t\chi\cdot H + \psi\cdot V(\lambda))} \tag{41}$$

Где члены с Лагранжевыми множителитями записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \chi \cdot \mu = & \ \operatorname{Tr}\left\{\chi_{\mathbb{R}}\mu_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\left(\chi_{\mathbb{C}}^{\dagger}\mu_{\mathbb{C}} + \chi_{\mathbb{C}}\mu_{\mathbb{C}}^{\dagger}\right)\right\} \\ \chi \cdot H = & \ \operatorname{Tr}\left\{\chi_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\left(\chi_{\mathbb{C}}^{\dagger}H_{\mathbb{C}} + \chi_{\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}}^{\dagger}\right)\right\} \end{aligned} \tag{42}$$

А векторное поле на дуальном пространстве к группе, определяемое действием $\overline{\mathcal{Q}}$ на коллективных бозонных и грассмановых координатах 40 имеет следующий вид:

$$\psi{\cdot}V(\lambda) = \operatorname{Tr}\left\{\psi_1\left[\lambda, B_1^{\dagger}\right] + \psi_2\left[\lambda, B_2^{\dagger}\right] + \bar{\psi}_1\left[\lambda, B_1\right] + \bar{\psi}_2\left[\lambda, B_2\right] + \psi_I\lambda I - I^{\dagger}\lambda\bar{\psi}_I - J\lambda\bar{\psi}_J + \psi_J\lambda J^{\dagger}\right\} \tag{43}$$

Список литературы

[1] Nicholas Dorey и др. «Multi-instanton calculus and the AdS / CFT correspondence in N=4 superconformal field theory». в: *Nucl. Phys. B* 552 (1999), с. 88—168. DOI: `10.1016/S0550-3213(99)00193-5`. arXiv: `hep-th/9901128`.

[2] Nick Dorey и др. «The Calculus of many instantons». в: *Phys. Rept.* 371 (2002), с. 231—459. DOI: `10.1016/S0370-1573(02)00301-0`. arXiv: `hep-th/0206063`.

[3] Nikita A. Nekrasov. «Seiberg-Witten prepotential from instanton counting». в: *Adv. Theor. Math. Phys.* 7.5 (2003), с. 831—864. DOI: `10.4310/ATMP.2003.v7.n5.a4`. arXiv: `hep-th/0206161`.

[4] Sergey Shadchin. «On certain aspects of string theory/gauge theory correspondence». Other thesis. февр. 2005. arXiv: `hep-th/0502180`.