Содержание

План доклада №1, "Гамильтонова редукция: примеры".

Темы: Симплектические многообразия. Примеры симплектических многообразий: кокасательное расслоение к многообразию и орбита коприсоединенного действия группы Ли. Гамильтоновы векторные поля, примеры их вычисления.

В докладе рассказывается о симплектических многообразиях и конструкциях, связанных с ними. Цель доклада — ввести основные понятия симплектической геометрии, такие как симплектические многообразия (с примерами), симплектические и гамильтоновы векторные поля, скобка Пуассона и т.д.

1 Симплектические многообразия

Определение 1.1. *Симплектическим многообразием* называется пара (M^{2n}, ω), где M^{2n} — гладкое 2n-мерное вещественное многообразие, ω — замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на M^{2n}.

Найдем условие замкнутости 2-формы в координатах:

$$\alpha = \sum_{i,j} A_{ij} dx^i \wedge dx^j \tag{1.1}$$

$$d\alpha = d(A_{ij} dx_i \wedge dx_j) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0 \tag{1.2}$$

Откуда следует условие

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} = 0 \tag{1.3}$$

Где $i \neq j \neq k$. Проверка существенно упрощается, если $A_{ij} \equiv C_{ij} \in \mathbb{R}$, или если $\dim M = 2$.
Для проверки невырожденности формы можно использовать любое из эквивалентных определений:

1. ω невырождена, если матрица этой формы в координатах невырождена
2. $\omega(X, Y) = 0 \, \forall Y \to X = 0$.
3. Отображение $\tilde{\omega} : T_pM \longrightarrow T_p^*M$, $(\tilde{\omega}(X))(Y) = \omega(X, Y)$ - изоморфизм векторных пространств.

Определение 1.2. Диффеоморфизм $\psi : M \longrightarrow M$ называется *симплектоморфизмом*, если $\psi^*(\omega) = \omega$.

Замечание: $\forall p \in M \quad (T_pM, \omega_p)$ — симплектическое векторное пространство, т.е. векторное пространство с невырожденной билинейной антисимметричной формой. Из линейной алгебры известно, что ω может быть невырождена только в случае, когда $\dim M$ четно. Таким образом, симплектические многообразия всегда четномерны.

****Замечание:*** симплектические многообразия обладают канонической ориентацией (на неориентируемых многообразиях нельзя ввести структуру симплектического многообразия) ω^n — ориентирующая форма.

Примеры:
1) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, обозначение для координат $(p_1 ... p_n, q_1 ... q_n)$. В силу постоянства координатных функций этой формы $d\omega = 0$. Матрица этой формы в канонических координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Невырождена, поэтому $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ - симплектическое многообразие. Оказывается, что все симплектические многообразия локально симплектоморфны данному подходящей размерности.

2) $(\mathbb{T}^{2n}, \omega)$, $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} d\theta_i \wedge d\psi_i$, θ, ψ - угловые координаты. В силу $d(\theta + C_1) \wedge d(\psi + C_2) = d\theta \wedge d\psi$ эта форма корректно определена на все торе. Локально все устроено как в примере 1, $(\mathbb{T}^{2n}, \omega)$ - симплектическое многообразие.

3) Двумерное ориентируемое риманово многообразие с формой объёма, (M^2, g), $\omega = Vol_g$. Действительно, g — положительно определенная квадратичная форма (а следовательно, невырожденная).

$dg = 0$, т.к. $\dim M = 2$. Примером может послужить двумерная единичная сфера с формой объема $\sin\theta\, d\varphi \wedge d\theta$.

4)* $(\mathbb{S}^{2n}, \omega), n > 1$ не обладают симплектической структурой (пример четномерного ориентируемого многообразия, на котором нельзя ввести симплектическую структуру)

Для интересующихся: $H^2_{DR}(S^{2n}) = 0$ при $n > 1$. Пусть симплектическая структура существует, тогда $\omega = d\alpha$ - точная форма. Тогда и ω^n — точная форма. Тогда по формуле Стокса

$$\int\limits_M \omega^n = \int\limits_M d\alpha = 0 \tag{1.5}$$

В то же время ω^n — форма объема, т.е. $\int\limits_M \omega^n \neq 0$.

Теорема 1.1. (Дарбу) Любое симплектическое многообразие локально симплектоморфно некоторой окрестности многообразия из примера 1) соответствующей размерности.

Замечание: теорема Дарбу говорит, что единственный локальный инвариант симплектического многообразия — его размерность (в отличие, например, от римановых многообразий, где существует понятие тензора кривизны). Другими словами, любые два симплектических многообразия локально симплектоморфны.

1.1 Каноническая симплектическая структура кокасательного расслоения

Пусть X — n-мерное многообразие, $T^*X = M$ — его кокасательное расслоение. На M можно ввести структуру многообразия, рассматривая карты вида $(Q, P) = (q_1...q_n, p_1...p_n)$, где Q — координатная окрестность X, $p = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(dq^i)_x$ — элемент кокасательного пространства T^*X_x. Рассмотрим заданную в такой карте 2-форму

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{1.6}$$

Пусть есть две пересекающиеся карты (Q, P) и $(\tilde{Q}, \tilde{P})$, на их пересечении:

$$\alpha = \tilde{p}_i d\tilde{q}_i = \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_i} p_l \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} dq_j = \delta_{lj} p_l dq_j = p_j dq_j \tag{1.7}$$

Используя законы преобразования:

$$d\tilde{q}_i = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} dq_j \tag{1.8}$$

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_i} p_l \tag{1.9}$$

Таким образом α корректно определена на всем M. Каноническая симплектическая структура кокасательного расслоения $\omega = d\theta$. В силу $d^2 = 0$, ω замкнута, координатные выражения аналогичны Примеру 1. Таким образом, (M, ω) — симплектическое многообразие. На самом деле в Примере 1 мы рассмотрели каноническую симплектическую структуру кокасательного расслоения $\mathbb{R}^n$.
Можно попробовать определить ω бескоординатно.

Определение 1.3. Пусть X — n-мерное многообразие, $T^*X = M$ — его кокасательное расслоение, $\pi : M \longrightarrow X$ — каноническая проекция, $\pi(q, p) = q$. Пусть $d\pi_x$ — производная отображения π в точке $x = (q, p)$ (линейный оператор $d\pi_x : T_xM \longrightarrow T_qX$), $d\pi_x^* : T_q^*X \longrightarrow T_x^*M$ — сопряженное отображение.

Определение 1.4. определим поточечно *форму Лиувилля на* M:

$$\theta_x = (d\pi_x)^* p \tag{1.10}$$

Иными словами

$$\theta_x(u) = (d\pi_x)^* p(u) = p(d\pi_x(u))$$

Каноническая симплектическая структура кокасательного расслоения $\omega = d\theta$. В координатах получим то же самое:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{1.11}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{1.12}$$

Кокасательное расслоение конфигурационного пространства есть фазовое пространство в гамильтоновой механике. На гладких функциях на фазовом пространстве можно ввести операцию:

$$\{f, g\} = \omega^{-1}(df, dg) \tag{1.13}$$

Эта операция кососимметрична, билинейна и удовлетворяет тождеству Якоби. Она полезна при поиске интегралов движения механической системы, с помощью которых можно понизить порядок системы уравнений. В дальнейшем мы более подробно изучим свойства скобки Пуассона.

1.2 Инвариантая симплектическая структура коприсоединенных орбит действия группы Ли

Определение 1.5. *представление группы Ли* — пара (V, ψ), V — векторное пространство, $\psi : G \longrightarrow GL(V)$ — гомоморфизм (гладкий). Таким образом, это действие группы Ли линейными преобразованиями на V, которое гладко зависит от элемента группы.

Определение 1.6. Пусть $\psi_g : G \longrightarrow G$, $\psi_g(h) = ghg^{-1}$. Сопоставим ψ_g линейное преобразование $Ad_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $Ad_g = d(\psi_g)_{id}$. Отображение $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$, $Ad(g) = Ad_g$ называется *присоединенным представлением* группы Ли G.

Определение 1.7. отображение $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g})$, заданное формулой $ad_X(Y) = [X, Y]$ называется присоединенным представлением алгебры Ли.

Определение 1.8. замкнутая подгруппа $GL(n, \mathbb{C})$ называется матричной группой Ли.

Пример: посмотрим, что представляет собой присоединенное представление матричной группы Ли G. Каждому элементу алгебры Ли $A \in \mathfrak{g}$ соответствует однопараметрическая подгруппа $\exp(tA)$. Чтобы узнать образ A при $Ad_X \in GL(\mathfrak{g})$ достаточно выяснить какому элементу алгебры соответсвует однопараметрическая подгруппа:

$$X \exp(tA) X^{-1} = \exp(XAX^{-1}) \tag{1.14}$$

Таким образом, присоединенное представление матричной группы Ли $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ задается формулой $Ad_X(Y) = XYX^{-1}$.

Докажем для матричных групп Ли некоторые важные свойства этих представлений :

1) ad является производной отображения Ad. Для этого достаточно продифференцировать

$$Ad_{\exp(tX)} Y = \exp(tX) Y \exp(-tX). \tag{1.15}$$

2) $Ad(\exp(tX)) = \exp(tad_X)$ (следует 1 из из вида непрерывных однопараметрических подгрупп)

3) $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$ (раскрыв это выражение, можно получить тождество Якоби)

4) $[Ad_Z X, Ad_Z Y] = Ad_Z([X,Y])$ (легко получить, раскрыв по определению)

5) $ad_X([Y,Z]) = [ad_X(Y), Z] + [Y, ad_X(Z)]$ (раскрыв это выражение, можно получить тождество Якоби)

Примеры вычисления присоединенных представлений:
Вычислим присоединное представление группы Ли $SL(2,\mathbb{R})$. Это трехмерная группа Ли, ее алгебра Ли — матрицы 2×2 с нулевым следом. Базис алгебры:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть $g \in SL(2,\mathbb{R})$, причем:

$$g = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \ , y_1y_4 - y_2y_3 = 1 \tag{1.16}$$

Тогда действие Ad_g на базисных векторах:

$$Ad_g(X_1) = \begin{pmatrix} -y_1y_3 & y_1^2 1 \\ -y_3^2 & y_1y_3 \end{pmatrix} \ Ad_g(X_2) = \begin{pmatrix} x_2x_4 & -x_2^2 \\ x_4^2 & -x_2x_4 \end{pmatrix} \ Ad_g(X_3) = \begin{pmatrix} y_1y_4 + y_2y_3 & -2y_2y_2 \\ 2y_3y_4 & -y_1y_4 - y_2y_3 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Тогда в выбранном базисе

$$Ad_g = \begin{pmatrix} y_1^2 & -y_2^2 & -2y_1y_2 \\ -y_3^2 & y_4^2 & 2y_3y_4 \\ -y_2y_3 & y_2y_4 & y_1y_4 + y_2y_3 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Исследуем присоединенное представление группы SU_2. Генераторы алгебры $\mathfrak{su}_2$ — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

С коммутационными соотношениями

$$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\varepsilon_{kml}\sigma_l \tag{1.20}$$

Присоединенное представление

$$Ad : SU(2) \longrightarrow GL(\mathfrak{su}_2) \tag{1.21}$$

Задается формулой $Ad_X Y = XYX^{-1}$. Отождествим $\mathfrak{su}_2$ с $\mathbb{R}^3$:

$$x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \longrightarrow (x,y,z) \tag{1.22}$$

Заметим, что

$$\det(x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3) = \det \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

Таким образом SU_2 действует на $\mathbb{R}^3$ линейными преобразованиями, сохраняющими длины векторов:

$$\det(XYX^{-1}) = \det(XX^{-1})\det Y = \det Y \tag{1.23}$$

Явная формула для присоединенного представления в выбранном базисе:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{pmatrix} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C} \quad x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1$$

$$Ad_X = \begin{pmatrix} Re(x_1^2 - x_2^2) & Re(-ix_1^2 - ix_2^2) & -2Re(x_1x_2) \\ -Im(x_1^2 - x_2^2) & Im(ix_1^2 + ix_2^2) & 2Im(x_1x_2) \\ x_2\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_1 & ix_2\bar{x}_1 - ix_1\bar{x}_2 & x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, Ad есть непрерывный (даже гладкий) гомоморфизм, учитывая связность SU_2 (топологически это трехмерная сфера), получаем, что:

$$Ad : SU_2 \longrightarrow SO(3)$$

Из явного координатного выражения можно найти ядро этого гомоморфизма, должно выполняться:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \tag{1.24}$$

$$|x_1|^2 - |x_2|^2 = 1 \tag{1.25}$$

Следовательно $x_2 = 0$, $|x_1| = 0$. Далее:

$$Re(x_1^2) = 1 \tag{1.26}$$

Откуда следует $x_1 = \pm 1$. Таким образом, ядро гомоморфизма Ad — $\pm E$.
Покажем сюръективность этого гомоморфизма. В силу дискретности ядра соответствующее отображение алгебр Ли (присоединенное представление алгебры):

$$ad : \mathfrak{su}_2 \longrightarrow \mathfrak{so}_3$$

Является инъективным. Так как размерности даннных векторных пространств совпадают, то это изоморфизм. В силу того, что $SO(3)$ компактна, она порождается экспоненциальным отображением, а значит, в силу $Ad(\exp(tX)) = \exp(tad(X))$ гомоморфизм сюрьективен.
В итоге каждому элементу $SO(3)$ соответствует 2 элемента SU_2, являющихся диаметрально противоположными точками трехмерной сферы. Тогда Ad есть двулистное накрытие.

С присоединенным представлением связано также коприсоединенное представление:

Определение 1.9. Пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, сопоставим элементу группы g линейное отображение $Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ по правилу:

$$\langle Ad_g^*(\alpha), \eta\rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}}\eta\rangle \tag{1.27}$$

полученное отображение $Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$ называется *коприсоединённым представлением группы Ли.*

В правой части стоит именно g^{-1} для того чтобы Ad^* был гомоморфизмом. Аналогично определим коприсоединнёное представление $\mathfrak{g}^*$ $ad^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow End(\mathfrak{g}^*)$

$$\langle ad^*(\xi)\alpha, \eta\rangle = -\langle \alpha, [\xi, \eta]\rangle \tag{1.28}$$

Несложно проверить, что ad^* есть производная Ad^*. Далее используется обозначение $ad^*(\xi) = \xi^*$

Определение 1.10. заметим, что присоединенное и коприсоединенное представления группы Ли G являются действиями этой группы на $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ соответственно. Орбиты действия $Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$ называются *коприсоединенными орбитами.* Коприсоединенная орбита элемента $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ есть $Ad_G\alpha = G\alpha = \mathcal{O}_\alpha$.

Пример: найдём коприсоединенные орбиты группы Ли $SO(3)$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}_3$ состоит из всез кососимметрических матриц 3×3, $\mathfrak{so}_3 \cong (\mathbb{R}^3, [\cdot,\cdot])$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.29}$$

Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с $\mathbb{R}^3$.
Присоединенное представление Ad действует на $\mathfrak{g}$ вращениями, $Ad_X Y = XYX^{-1}$. Для коприсоединенного представления в координатах:

$$(Ad_g^*\xi)^T X = \xi Ad_{g^{-1}} X \tag{1.30}$$

Откуда

$$Ad_g^* = (Ad_{g^{-1}})^T = -Ad_{g^{-1}} \tag{1.31}$$

Таким образом, коприсоединенные орбиты — двумерные сферы в $\mathbb{R}^3$. Фактически в этом примере орбиты присоединенного и коприсоединенного представления совпали, группа $SO(3)$ действует вращениями на своей алгебре.

Поработаем с коприсоединенными орбитами ненулевых элементов. Рассмотрим орбиту элемента α. Разобьем рассуждения на шаги:

1. Из теории групп известно, что стабилизатор элемента α есть подгруппа G. В данном случае $Stab(\alpha) = \psi^{-1}(\alpha)$, $\psi : G \longrightarrow \mathfrak{g}^* \quad \psi(g) = Ad_g^*\alpha$ — гладкое отображение, т.е. $Stab(\alpha)$ — замкнутая подгруппа.

2. Замкнутая подгруппа H группы Ли G является ее подгруппой Ли[1]

3. Левые смежные классы G/H можно наделить структурой гладкого многообразия[2] так, что отображение проекции $\pi : G \longrightarrow G/H$ является гладкой субмерсией, причем $\dim G/H = dimG - dimH$, $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{h}$.

4. Используя изоморфизм $G/Stab(\alpha) \cong G\alpha$, $gStab(\alpha) \longrightarrow g\alpha$ можно перенести гладкую структуру на орбиту, превратив ее в гладкое многообразие

Итак, мы наделили коприсоединенную орбиту $\mathcal{O}_\alpha$ структурой гладкого многообразия. Выясним как устроено касательное пространство к O_α. В силу того, что $O_\alpha \subset \mathfrak{g}^*$, $T_\beta O_\alpha \subset \mathfrak{g}^*$. Рассмотрим $\psi : G \longrightarrow \mathcal{O}_\alpha \quad g \longrightarrow g\alpha$. Найдем образ касательного пространства нейтрального элемента при данном отображении:

$$\frac{d}{dt} Ad^*_{\exp(t\xi)}\alpha = ad^*_\xi \alpha \tag{1.32}$$

Заметим, что $\dim O_\alpha = \dim G - \dim H$, в то время как $\dim ad_g^*\alpha = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim G - \dim H$. Таким образом касательное пространство в каждой точке орбиты порождается векторными полями из $\mathfrak{g}$ как $ad_g^*\alpha$. Этим представление мы будем в дальнейшем часто пользоваться.

Замечание Группа Ли действует на коприсоединенных орбитах $g_0 : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow \mathcal{O}_\alpha$, $\omega_{g_0}(g\alpha) = (g_0 g)\alpha$.

Наша конечная цель — ввести на коприсоединенных орбитах группы Ли g-инвариантную симплектическую структуру (т.е., чтобы g_0 было симплектоморфизмом). Мы исследовали устройство касательного пространства к орбите, теперь зададим некоторую дифференциальную 2 форму. Последовательно проверим, что она замкнутая, невырожденная и g-инвариантная, превратив O_α в симплектическое многообразие.

Определение 1.11. Рассмотрим 2-форму на $\mathcal{O}_\alpha$, $\omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) = \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$. Эта форма называется формой Костанта-Кириллова. В силу того, что касательное пространство в каждой точке орбиты порождается элементами из $\mathfrak{g}$ в указанном выше смысле, это корректно определенная гладкая 2-форма на $\mathcal{O}_\alpha$

[1] очень нетривиальное утверждение, для матричных групп Ли было доказано Джоном фон Нейманом в 1929, для общего случая Эли Картаном в 1930

[2] Подробности можно посмотреть в [3]. Обратите внимание, что стабилизатор, вообще говоря, не является нормальной подгруппой.

Далее буква g обозначает умножение всей группы на элемент g (для орбиты соответственно на $Ad_g^*\alpha$), g_* примененная к вектору есть прямой образ вектора при отображении g, примененная к форме есть обратный образ (pullback) при отображении g^{-1}. Далее ξ, $\eta \in \mathfrak{g}$, $\xi_*, \eta_* \in \mathfrak{g}^*$, $\xi_* = ad_\xi^*\alpha$, $\eta_* = ad_\eta^*\alpha$.

G-инвариантность:

$$(g_*\omega)_\alpha(\xi_*, \eta_*) = \omega(\alpha)_{Ad^*(g)^{-1}\alpha}(g_*^{-1}\xi_*, g_*^{-1}\eta_*) = \omega(\alpha)_{Ad^*(g)^{-1}\alpha}((Ad(g)^{-1}\xi)_*, (Ad(g)^{-1}\eta)_*) = \tag{1.33}$$

Здесь мы использовали свойство эквивариантности $g_*\xi_* = (Ad(g)\xi)_*$, из g-эквивариантности сопоставления $G \longrightarrow G_\alpha$ (достаточно в коммутативной диаграме перейди к производной).

$$= \langle Ad^*(g)^{-1}\alpha, [Ad(g)^{-1}\xi, Ad(g)^{-1}\eta]\rangle = \langle Ad^*(g)^{-1}\alpha, Ad(g)^{-1}[\xi, \eta]\rangle = \langle \alpha, [\xi, \eta]\rangle = \omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) \tag{1.34}$$

Здесь мы использовали упомянутый факт $[Ad(g)\xi, Ad(g)\eta] = Ad(g)[\xi, \eta]$ Фактически g — инвариантность означает независимость структуры симплектического многообразия на $\mathcal{O}_\alpha$ от выбора элемента орбиты α.

Невырожденность: из формулы для коприсоединенного представления следует, что $\omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) = 0$ $\forall \eta_* \in T_\alpha\mathcal{O} \Leftrightarrow \xi_* = 0$.
Действительно,

$$\omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) = \langle \alpha, [\xi, \eta]\rangle = -ad_\xi^*\alpha(\eta) = 0\,\forall\eta \Longrightarrow ad_\xi^*\alpha = 0 = \xi_* \tag{1.35}$$

Теорема 1.2. Пусть ω — 2-форма на гладком многообразии M, X, Y, Z - векторные поля на M, такие что $L_X\omega = L_Y\omega = L_Z\omega = 0$. Тогда выполнено:

$$L_X(\omega(Y, Z)) + L_Y(\omega(Z, X)) + L_Z(\omega(X, Y)) = 2(\omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y)) \tag{1.36}$$

Доказательство: получается применением правила Лейбница к каждому слагаемому:

$$L_X(\omega(Y, Z)) = (L_X\omega)(Y, Z)) + \omega(L_XY, Z) + \omega(L_XY, Z) \tag{1.37}$$

и условия $L_X\omega = L_Y\omega = L_Z\omega = 0$.

Замкнутость: поскольку касательное пространство к каждой точке орбиты порождается полями $ad^*(\mathfrak{g})\alpha$, то достаточно проверить условие $d\omega(X_*, Y_*, Z_*) = 0\ \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

$$d\omega(X_*, Y_*, Z_*) = i_{X_*}i_{Y_*}i_{Z_*}d\omega = -i_{X_*}i_{Y_*}di_{Z_*}\omega = i_{X_*}di_{Y_*}i_{Z_*}\omega = L_{X_*}(\omega(Y_*, Z_*)) \tag{1.38}$$

$$d\omega(X_*, Y_*, Z_*) = d\omega(Y_*, Z_*, X_*) = d\omega(Z_*, X_*, Y_*) \tag{1.39}$$

$$3d\omega(X_*, Y_*, Z_*) = L_{X_*}(\omega(Y_*, Z_*)) + L_{Y_*}(\omega(Z_*, X_*)) + L_{Z_*}(\omega(X_*, Y_*)) = \tag{1.40}$$

$$= 2(\omega([X_*, Y_*], Z_*) + \omega([Y_*, Z_*], X_*) + \omega([Z_*, X_*], Y_*)) \tag{1.41}$$

Осталось показать

$$\omega([X_*, Y_*], Z_*) + \omega([Y_*, Z_*], X_*) + \omega([Z_*, X_*], Y_*) = 0 \tag{1.42}$$

Используем для коприсоединенного представления

$$[X_*, Y_*] = [X, Y]_* \tag{1.43}$$

Используем определение формы ω:

$$\langle \alpha, [[X_*, Y_*], Z_*]\rangle + \langle \alpha, [[Y_*, Z_*], X_*]\rangle + \langle \alpha, [[Z_*, X_*], Y_*]\rangle = \tag{1.44}$$

$$= \langle \alpha, [[X_*, Y_*], Z_*] + [[Y_*, Z_*], X_*] + [[Z_*, X_*], Y_*] \rangle = \tag{1.45}$$

$$\langle \alpha, ([[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y])_* \rangle = 0 \tag{1.46}$$

используя тождество Якоби.

Полная проверка формы ω оказалась достаточно непростой. Мы определили 2-форму ω на коприсоединенной орбите группы Ли G, проверили, что ω корректно определена, невырождена и замкнута. Таким образом, $(\mathcal{O}, \omega_\alpha)$ — симплектическое многообразие.

2 Векторные поля на симплектических многообразиях

Гамильтоновы и симплектические векторные поля

Теорема 2.1. симплектическая структура на многообразии задает канонический изоморфизм расслоений $\theta : TM \longrightarrow T^*M$, $\theta(p, u) = (p, \omega(u, \cdot))$ в силу невырожденности ω.

Если есть векторное поле X, то ему можно сопоставить 1-форму $i_X\omega$. Если же есть 1-форма α, то ей можно сопоставить векторное поле Y так, чтобы $i_Y\omega = \alpha$. Такое векторное поле найдется в силу невырожденности ω (в координатах это будет выглядеть так: надо разложить строку координат α по строкам матрицы ω).

Теорема 2.2. Векторное поле X называется симплектическим, если оно сохраняет симплектическую структуру $L_X\omega = 0$. Учитывая замкнутость ω и формулу Картана, получаем $di_X\omega = 0$.

Теорема 2.3. Любой гладкой функции на симплектическом многообразии можно сопоставить гладкое векторное поле $i_{X_H}\omega(Y) = dH(Y)$. Такие векторные поля X_H называются гамильтоновыми.

Лемма 2.1. Любое гамильтоново векторное поле является симлектическим

Пример: приведем пример симплектического, но не гамильтонового векторного поля

Рассмотрим координатную карту на торе φ, ψ, где $\varphi \in [0, 2\pi), \psi \in [0, 2\pi)$. Пусть в этой карте задана симлектическая структура $d\varphi \wedge d\psi$. Эта форма инвариантна относительно сдвигов $d(\varphi+\alpha) \wedge d(\psi+\beta) = d\varphi \wedge d\psi$, невырождена и замкнута, поэтому эту форму можно корректно продолжить на весь тор, таким образом $(\mathbb{T}^2, \omega)$ — симплектическое многообразие. Тогда условие симплектичности можно записать как $L_X\omega = 0$. Пусть задано векторное поле на торе $a_1(\varphi, \psi)\partial_\varphi + a_2(\varphi, \psi)\partial_\psi$, где $a_1(\varphi, \psi), a_2(\varphi, \psi)$ — гладкие 2π-периодические функции на отрезке $[0, 2\pi]$. По формуле Картана с учетом замкнутости ω:

$$L_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega = di_X\omega = d((i_X d\varphi) \wedge d\psi - d\varphi \wedge i_X(d\psi)) = d(a_1(\varphi, \psi))d\psi - a_2(\varphi, \psi))d\varphi) = \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi}\, d\varphi \wedge d\psi + \frac{\partial a_2}{\partial \psi}\, d\varphi \wedge d\psi = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi} = -\frac{\partial a_2}{\partial \psi} \tag{2.3}$$

В то же время это поле не должно быть гамильтоновым, т.е. $!\exists$ гладкой функции H на торе, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = a_1(\varphi, \psi) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -a_2(\varphi, \psi) \tag{2.5}$$

Другими словами форма $a_1(\varphi,\psi)d\psi - a_2(\varphi,\psi)d\varphi$ должна быть замкнутой, но не быть точной. Попробуем подобрать такие функции a_1 и a_2.
Рассмотрим $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Замкнутость формы следует из свойства дифференциала $d^2 = 0$, допустим, что она точна, тогда ее интеграл по любой гладкой замкнутой кривой должен быть равен 0. Однако интеграл этой формы по окружности ($\psi \in [0, 2\pi)$ + точка) равен:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\psi = 2\pi \neq 0 \tag{2.6}$$

Таким образом, векторное поле ∂_φ является симплектическим, но не является гамильтоновым.

Утверждение: связь симплектических и гамильтоновых векторных полей с точными и замкнутыми формами на многообразии, с когомологиями де Рама.
В.п. является симплектичным $\Leftrightarrow i_X(\omega)$ — замкнутая форма. В.п. является гамильтоновым $\Leftrightarrow i_X(\omega)$ — точная форма. В силу невырожденности ω имеется соответствие:

$$\{\text{точные формы на } M\} \longleftrightarrow \{\text{гамильтоновы в.п. на } M\} \tag{2.7}$$

$$\{\text{замкнутые формы на } M\} \longleftrightarrow \{\text{симплектические в.п. на } M\} \tag{2.8}$$

Таким образом имеется изоморфизм $Symp(M)/Ham(M) \cong H^1_{DR}$.

Напоминание: Векторное поле X представляет собой дифференциальный оператор на алгебре гладких функций на многообразии, т.е. является $\mathbb{R}$-линейным отображением $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, удовлетворяющим правилу Лейбница

Определение 2.1. скобка Ли векторных полей $[X, Y] = XY - YX$

Замечание: XY не является векторным полем (дифференцированием алгебры $C^\infty(M)$).

Лемма 2.2. скобка Ли симплектических векторных полей - гамильтоново векторное поле

Доказательство:

$$i_{[X,Y]}\omega = i_{L_XY}\omega = L_Xi_Y\omega - i_YL_X\omega = L_Xi_Y\omega = i_Xdi_Y\omega + di_Xi_Y\omega = di_Xi_Y\omega == -d(\omega(X,Y)) \tag{2.9}$$

В силу симплектичности векторных полей $L_X\omega = 0$, $L_Y\omega = 0$
Следствие: $(Ham(M), [\cdot,\cdot]) \subset (Symp(M), [\cdot,\cdot]) \subset (Vect(M), [\cdot,\cdot])$

Пример вычисления гамильтоновых векторных полей

Случай коприсоединенных орбит
У нас есть группа Ли G, действующая на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ присоединенным Ad представлением, на двойственном $\mathfrak{g}^*$ — коприсоединенным Ad^*. Мы ввели форму Костанта-Кириллова на коприсоединенных орбитах $\mathcal{O} = Ad^*(\mathfrak{g})\alpha \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*$ по формуле $\omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) = \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$.
Каждому элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ соответствует гладкая функция на $\mathfrak{g}^*$ — $H_\xi(u) = \langle u, \xi \rangle$.

Лемма 2.3. отображение $\xi \longrightarrow H_\xi$, $\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})$ G-эквивариантно.

Доказательство: G действует на $\mathfrak{g}$ коприсоединенным представлением, действие на $C^\infty(\mathcal{O})$ порождено действием на орбитах.

$$g_*(H_\xi(\alpha)) = H_\xi(Ad^*(g)^{-1}\alpha) = \langle Ad^*(g)^{-1}\alpha, \xi \rangle = \langle \alpha, Ad(g)\xi \rangle = H_{Ad(g)\xi} \tag{2.10}$$

Следствие: дифференцируя $\exp(t\eta)_*H_\xi = H_{Ad(\exp(t\eta))\xi}$ при $t = 0$, получаем, что $-dH_\xi(\eta) = H_{[\eta,\xi]}$.

Лемма 2.4. имеет место равенство $(dH_\xi)^\# = \xi_*$

Доказательство: необходимо показать $\omega(\xi_*, \eta_*) = dH_\xi(\eta_*)$. По определению $\omega(\xi_*, \eta_*) = H_{[\xi,\eta]}$. С другой стороны $H_{[\xi,\eta]} = dH_\xi(\eta_*)$. Таким образом, гамильтоново поле, соответствующее функции H_ξ есть ξ_*.

3 Скобка Пуассона и связь с теоретической механикой

Определение 3.1. скобкой Пуассона двух гладких функций $f, g \in C^\infty(M)$ называется:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{3.1}$$

Свойства скобки Пуассона:
1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (кососимметричность)
2) билинейность
3) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}$ - тождество Якоби
4) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ тождество Пуассона.
Таким образом $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ - алгебра Пуассона.

Тождество Пуассона:

$$\{f, gh\} = \omega(X_f, X_{gh}) = \omega(X_f, hX_g + gX_h) = \{f, g\}h + g\{f, h\} \tag{3.2}$$

$$i_{X_{gh}}\omega = d(gh) = hdg + gdh = hi_{X_g}\omega + gi_{X_h}\omega \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. отображение $\psi : (C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}) \longrightarrow (Ham(M), [\cdot,\cdot]),\ f \longrightarrow X_f$ - антигомоморфизм алгебр Ли, т.е. $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

Доказательство:

$$i_{X_{\{f,g\}}} = d\{f, g\} = d(\omega(X_f, X_h)) = -[X_f, X_h] \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. в канонических локальных координатах скобка Пуассона записывается:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. запись уравнений Гамильтона через скобку Пуассона
Уравнения движения гамильтоновой с системы с функцией Гамильтона H записываются в виде:

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix} = X_H \quad \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\\ \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Можно записать через скобку Пуассона $\dot{g}_i = \{q_i, H\}$, $\dot{p}_i = -\{p_i, H\}$

Лемма 3.4. критерий интеграла движения $\{f, H\} = 0$

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t)) = \{f, H\} \tag{3.7}$$

Определение 3.2. два интеграла движения f, g находятся в инволюции $\{f, g\} = 0$

Отсылка к линейной алгебре: сколько может быть линейно независимых коммутирующих интегралов движения у гамильтоновой системы? $(n, \dim M = 2n)$

Определение 3.3. гамильтонова система с n независимыми интегралами в инволюции называется интегрируемой (по Лиувиллю)

Список литературы

[1] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*, 2008.
[2] И. Лосев. *Лекции в НМУ по отображению моментов.* Лекции 1 — 2.
[3] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, 2015.

Контакты автора

Кенжаев Тимур

- kenzhaev.td@phystech.edu
- kenzhaev_t_d@mail.ru
- vk.com/id434946347