Аннотация

В работе рассматривается рациональная система Калоджеро–Мозера получаемая редукцией из фазового пространства, соответствующего кокасательному расслоению алгебры $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Приводится решение уравнений движения.

1 Введение.

Целью данной работы является иллюстрация основных принципов работы механизма гамильтоновой редукции на примере рациональной и тригонометрической систем Калоджеро–Мозера. В обоих случаях последовательно приводятся: фазовое пространство, гамильтониан редуцируемой системы, его уравнения движения, его симметрия (за счёт которой и становится возможной редукция), отображение момента, отображение проекции на редуцированное пространство, гамильтониан редуцированной системы, решение её уравнений движения с помощью решения уравнений движения нередуцированной системы.

Рассматриваемые фазовые пространства имеют вид кокасательного расслоения к алгебре Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ для рационального случая и кокасательного расслоения к группе Ли $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ для тригонометрического случая. В соответствии с этим, координаты точек удобно записывать в виде матриц, на которые, при этом, могут налагаться некоторые дополнительные условия (пример – бесследовость). Иными словами, мы работаем с симплектическим многообразием как с вложенным в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. После редукции происходит переход к уже стандартной записи координат на фазовом пространстве как пары строк/столбцов чисел, на которые, однако, также наложены условия ($\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n p_i = 0$). Иными словами, мы переходим к многообразию, вложенному в $\mathbb{R}^{2n}$.

Выделим чуть менее формально и более явно основную идею:

У нас есть симплектическое пространство *малой* $(2(n-1))$ размерности и некоторый **сложный** (в смысле уравнений движения) гамильтониан. Для того чтобы найти решение в этом случае мы находим симплектическое пространство, **большой** $(2n^2-2)$ размерности, и с *простым* гамильтонианом, обладающим симметрией, так, что первая система получается из второй гамильтоновой редукцией. После этого, решаем для нередуцированной системы уравнения движения, затем проецируем решения на редуцированное пространство. Таким образом мы получим решение уравнений движения первой системы.

2 Рациональная система Калоджеро–Мозера.

2.1 Фазовое пространство.

Пусть задана некоторая матричная группа Ли G и соответствующая ей алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим $\mathfrak{g}$ как конфгурационное пространство. Тогда $T^*\mathfrak{g}$ наделяется стандартной симплектической структурой. Поскольку $\mathfrak{g}$ – линейное пространство, то оно сразу же покрывается одной картой (диффеоморфно $\mathbb{R}^n$) $T^*\mathfrak{g}$ тривиализуется и диффеоморфмно $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$. Пользуясь формой Картана–Киллинга (полагаем её невырожденной), отождествляем $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, таким образом получаем симплектическую структуру на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Рассмотрим случай $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{R}) \quad (G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$.

В этом случае скалярное произведение может быть выбрано как: $(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$. Соответственно, в базисе матричных единиц оно имеет вид: $g_{(ij)(kl)} = \delta_{il}\delta_{jk}$.

Явный вид скалярного произведения позволяет понять как работает спаривание между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$: $E_{ij} \mapsto E^{ij}$, если рассматривать и то и то как пространство матриц, то спаривание – это транспонирование.

Приведём теперь каноническую 1-форму и индуцируемую ей симплектическую структуру:

$$\theta = \sum_{(ij)} Y_{(ji)} dX_{(ij)} = \mathrm{Tr}(Y dX) \tag{2.1a}$$

$$\omega = d\theta = \mathrm{Tr}(dY \wedge dX) \tag{2.1b}$$

Таким образом наше симплектическое многообразие можно ассоциировать с набором пар бесследовых матриц $n \times n$: (x, y)

2.2 Гамильтониан. Симметрия.

Теперь рассмотрим в данном пространстве Гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Y^2) \tag{2.2}$$

Можно выписать уравнения движения:

$$\dot{X} = Y \tag{2.3a}$$
$$\dot{Y} = 0 \tag{2.3b}$$

Приведём вычисление:

$$dH = \mathrm{Tr}(YdY) \tag{2.4a}$$
$$-\iota_{V_H}\omega = dH \tag{2.4b}$$
$$\tag{2.4c}$$

Разобьём гамильтоново векторное поле: $V_H = V_H^{(X)} + V_H^{(Y)}$, тогда:

$$-\iota_{V_H}\omega = \mathrm{Tr}(-V_H^{(Y)}dX + V_H^{(X)}dY) = \mathrm{Tr}(YdY) \tag{2.5a}$$
$$V_H^{(X)} = Y \tag{2.5b}$$
$$V_H^{(Y)} = 0 \tag{2.5c}$$

Что и даёт уравнения движения.

Рассмотрим теперь действие на группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ на $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ произведением присоединённых представлений:

$$(X, Y) \mapsto (gXg^{-1}, gYg^{-1}) \tag{2.6}$$

Проверим, что группа действиует симплектоморфизмами:

$$g^*(\omega) = d(g^*(\theta)) = d(\mathrm{Tr}(gYg^{-1}d(gXg^{-1}))) = d(\mathrm{Tr}(gYdXg^{-1})) = d(\mathrm{Tr}(YdX)) = d\theta = \omega \tag{2.7}$$

Гамильтониан инвариантен при таком преобразовании:

$$\Phi_g^*(H)(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(gYg^{-1}gYg^{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(gY^2g^{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Y^2) = H(X,Y) \tag{2.8}$$

2.3 Гамильтонова редукция.

2.3.1 Построение векторного поля, ассоциированного с элементом алгебры.

Пусть задан элемент алгебры $\xi \in \mathfrak{g}$ и соответствующая ему кривая g_t:

$$g_0 = e$$
$$\frac{d}{dt}(g_t)|_{t=0} = \xi$$

Тогда при заданном действии группы на многообразии по элементу алгебры строится векторное поле:

$$V_\xi(p) = \frac{d}{dt}(g_t(p))|_{t=0} \tag{2.9}$$

В матричном случае можно писать более явно: $g_t = \exp(\xi t)$

$$g_tXg_t^{-1} = X + [\xi, X]t + O(t^2)$$

Соответственно:

$$\frac{d}{dt}(g_tXg_t^{-1}, g_tYg_t^{-1}) = ([\xi, X], [\xi, Y]) \tag{2.10}$$

2.3.2 Гамильтоновость действия. Отображение момента.

Нам необходимо показать, что каждое получаемое векторное поле на самом деле является строго гамильтоновым и, более того, можно выбирать гамильтонианы так, чтобы скобка Пуассона была согласована с коммутатором в алгебре. Пользуемся следующей общей коструктукцией: если задана 1-форма θ, такая, что $\omega = d\theta$, при том инвариантная относительно действия группы, то гамильтониан можно построить как:

$$H_\xi(p) = \theta(p)(V_\xi(p)) \tag{2.11}$$

Приведём формулу для нашего случая:

$$H_\xi(X,Y) = \mathrm{Tr}(YdX)([\xi,X],[\xi,Y]) = \mathrm{Tr}(Y[\xi,x]) = -\mathrm{Tr}(Y[X,\xi]) \tag{2.12}$$

Тем самым построено и отображение момента:

$$\mu(X,Y)(\xi) = -\mathrm{Tr}(Y[X,\xi]) = -\mathrm{Tr}([Y,X]\xi) = \mathrm{Tr}([X,Y]\xi) \tag{2.13}$$

Таким образом, мы видим, что элементу $\mu(X,Y)$ при отображении $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ с помощью формы Киллинга сопоставляется $[X,Y]$. С другой стороны, мы помним, что в координатах это отображение задаётся транспонированием, следовательно и обратное будет задано транспонированием. Значит:

$$\mu(X,Y) = [X,Y]^T \tag{2.14}$$

2.3.3 Значение момента.

Зафиксируем значение момента $\mu = c$, тогда, согласно общей конструкции, найдя стабилизатор данного значения G_c, мы сможем построить приведённое фазовое пространство как $M_c = \mu^{-1}(c)/G_c$. Введём вектор $e = (1,...,1)$. Тогда определим:

$$c = e \otimes e - \mathbb{1} \tag{2.15a}$$

$$c_{ij} = 1 - \delta_{ij} \tag{2.15b}$$

Данный шаг на первый взгляд кажется не мотивированным. Приведём следующую цепь рассуждений:

Утверждение 1. *Данная матрица диагонализуется и имеет $n-1$-кратно вырожденное собственное значение -1 и 1-кратно вырожденное собственное значение $n-1$.*

Доказательство: Обозначи собственное подпространство матрицы c соответствующее значению λ как V_λ. Рассмотрим матрицу $A(\lambda) = c - \lambda E$. Тогда $\dim(V_\lambda) = \dim(Ker(A(\lambda))) = n - rg(A(\lambda))$ Заметим, что $(A(-1))_{ij} = 1$, значит $rg(A(-1)) = 1$, значит $\dim(V_{-1}) = n-1$. Остаётся заметить, что $e = (1,...,1)$ - собственный вектор со значением $n-1$. Таким образом все n значений в спектре исчерпаны. □

Следствие 1.1. *Стабилизатор c при построенном действии 2.6 G_c изоморфен $GL(n-1)$.*

Доказательство. Доказательство: Рассмотрим действие 2.6, но уже группы $GL_n(\mathbb{R})$. Тогда, если мы найдём его стабилизатор, в силу $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \le GL_n(\mathbb{R})$, достаточно будет пересечь его с $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Обозначим стабилизатор c в $GL_n(\mathbb{R})$ как $\tilde{G}_c$, в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ как G_c.

Заметим, что матрица c диагонализуется[1], то есть может быть представлена как $c = hrh^{-1}$, где $h \in GL(n)$, $r = diag(n-1,-1,...,-1)$. Тогда непосредственно проверяется, что $g \in \tilde{G}_c \Leftrightarrow h^{-1}gh \in G_r$. Таким образом построен изоморфизм стабилизаторов. Значит достаточно доказать утверждение для r вместо c. Непосредственно из правил матричного умножения видно, что если стандартно вложить $GL(1)\times GL(n-1)$ в $GL(n)$ как подгруппу матриц блочного вида, то она будет содержаться в стабилизаторе $\tilde{G}_r$. Остаётся доказать обратное вложение. Но это напрямую следует из следующего описания: g стабилизирует r при присоединённом действии тогда и только тогда когда коммутирует с ним. Но умножение на диагональную матрицу слева - суть - умножение строк на соответствующие числа на диагонали, а справа – умножение столбцов. Значит для стабилизирующего элемента g_{ij} зануляются при условии $\lambda_i \neq \lambda_j$. Но в данном случае $\lambda_1 \neq \lambda_i \forall i > 1$, а значит $g_{1i} = g_{i1} = 0$. Что доказывает, что стабилизирующий элемент имеет блочный вид. Таким образом стабилизатор в $GL_n(\mathbb{R})$ изоморфен $GL_1(\mathbb{R}) \times GL_{n-1}(\mathbb{R})$. Заметим теперь, что среди найденных блочным матриц (M_1, M_{n-1}) лежат в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ те и только те, для которых $M_1 = (\det(M_{n-1})^{-1})$. Таким образом $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}_c$ отождествляется с $GL_{n-1}(\mathbb{R})$. □

Следствие 1.2.

$$\dim(M_c) = 2(n-1) \tag{2.16}$$

Доказательство: Действительно: $\dim(G_c) = (n-1)^2$, а значит для приведённого фазового пространства:

$$\dim(M_c) = \dim(M) - \dim(G) - \dim(G_c) = 2n^2 - (n^2-1) - (n-1)^2 = 2(n-1) \tag{2.17}$$

□

Из приведённых рассуждений можно видеть, что выбор c обусловлен структурой стабилизатора, которая позволяет получить данную размерность приведённого фазового пространства.

[1] Из построения в предыдущем доказательстве или из симметричности.

2.3.4 Гамильтониан Калоджеро.

Пусть X диагонализуется матрицей g, то есть можно записать:

$$X = gQ(q)g^{-1} \tag{2.18a}$$

$$Y = gL(q,p)g^{-1} \tag{2.18b}$$

Где $Q(q) = diag(q_1, ..., q_n)$, p – некоторый, пока не ясный до конца набор переменных. Полагаем также, что все q_i различны.

Утверждение 2. *Можно выбрать $g : g \in G_c$. При этом условие $q_i > q_{i+1}$ фиксирует g с точностью до знака*

Доказательство: Пусть $X = \tilde{g}Q\tilde{g}^{-1}$ Тогда:

$$[Q, \tilde{g}^{-1}Y\tilde{g}] = \tilde{g}^{-1}c\tilde{g} = f \otimes f' - E$$

Где $f = \tilde{g}^{-1}e, \quad f' = \tilde{g}^{+}e$.
Тогда так как Q – диагональная, коммутатор с ней не может иметь ненулевых диагональных элементов, значит:

$$f_i(f')^*_i = 1$$

То есть $f'_i = ((f)^*_i)^{-1}$ Рассмотрим теперь матрицы:

$$F = diag(f_1, ..., f_n)$$
$$g = \tilde{g}F$$

Тогда:

$$gQg^{-1} = \tilde{g}FQF^{-1}\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}Q\tilde{g}^{-1} = X$$

Кроме того:

$$\begin{aligned} gcg^{-1} &= \tilde{g}Fe \otimes eF^{-1}\tilde{g}^{-1} - E = \tilde{g}f \otimes ((F^{-1}e))^*\tilde{g}^{-1} - E = \\ &= \tilde{g}(f \otimes f')\tilde{g}^{-1} - E = (\tilde{g}\tilde{g}^{-1}e) \otimes ((\tilde{g}^{-1})^{+}\tilde{g}^{+}e) - E = e \otimes e - E = c \end{aligned}$$

Таким образом $g \in \tilde{G}_c$.

Заметим, что перечисленные условия продолжат выполняться и после умножения матрицы g на ненулевое число, а значит можно привести её определитель к единичному, таким образом: $g \in G_c$. □

Таким образом выбирая $g \in G_c$, получим:

$$[Q(q), L(p,q)] = [g^{-1}Xg, g^{-1}Yg] = g^{-1}[X,Y]g = g^{-1}cg = g^{-1}gcg^{-1}g = c \tag{2.20}$$

Переписывая их в терминах элементов матриц получаем:

$$(q_i - q_j)L_{ij}(p,q) = 1 - \delta_{ij} \tag{2.21}$$

Видим, что при $i = j$ уравнение всегда выполнено, потому на диагонали L могут стоять любые числа, такие, что $y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, то есть $\sum_{i=1}^n p_i = 0$ (их и обозначим $(p_1, ..., p_n)$). При $i \neq j$ получим:

$$L_{ij} = \frac{1}{q_i - q_j}$$

Таким образом общий вид решения:

$$L_{ij}(p,q) = \delta_{ij}p_i + \frac{1 - \delta_{ij}}{q_i - q_j} \tag{2.22}$$

Данный набор (p,q) – это динамические переменные на приведённом фазовом пространстве. Действительно, в силу 2.18: $X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ Отображение редукции можно строить следующим образом:

$$\pi : (X,Y) \mapsto (Q(q), L(p,q)) \tag{2.23}$$

Симплектическая форма при этом переходит в:

$$\tilde{\omega} = \mathrm{Tr}(dL(p,q) \wedge dQ(q)) = \sum_i dp_i \wedge dq_i \tag{2.24}$$

Преобразование Гамильтониана задаётся так:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(p,q) &= H((X,Y) : \pi(X,Y) = (p,q)) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(gL(p,q)g^{-1}gL(p,q)g^{-1}) = \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(L^2(p,q)) = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i p_i^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{(q_i-q_j)^2} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Заметим, что хотя в гамильтониане указано $2n$ переменных, на самом деле динамическими из них являются только $2(n-1)$, поскольку предполагается выбор системы центра масс, то есть калибровки в которой $\sum_i q_i = \sum_i p_i = 0$.

Утверждение 3. *Набор $J_k = \mathrm{Tr}(L^k)$ есть набор интегралов движения системы, находящихся в инволюции, то есть $\{J_i, J_j\} = 0$*

Доказательство:

$$\mathrm{Tr}(L^k(t)) = \mathrm{Tr}((g(t)Y(0)g^{-1}(t))^k) = \mathrm{Tr}(g(t)Y^k(0)g(t)^{-1}) = \mathrm{Tr}(Y^k(0)) \tag{2.26}$$

Из чего следует, что это действительно интегралы движения.

$$\{\mathrm{Tr}(L^i), \mathrm{Tr}(L^j)\} = \{\mathrm{Tr}(Y^i), \mathrm{Tr}(Y^j)\} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial Y_{ij}} \wedge \frac{\partial}{\partial X_{ji}} (\mathrm{Tr}(Y^i), \mathrm{Tr}(Y^j)) = 0 \tag{2.27}$$

Что и даёт инволютивность. Заметим, что во втором вычислении был использован факт, что скобка Пуассона функций для редуцированной системы равна скобке Пуассона соответствующих им G-инвариантных функций на всём фазовом пространстве. □

Замечание 3.1. *В разделе 2.4 мы также докажем что функци I_k – функционально независимы. Таким образом полученная система – интегрируема по Лиувиллю.*

2.3.5 Решение уравнений движения для рациональной системы Каложеро.

Воспользуемся, тем, что закон движения для нередуцированной системы легко интегрируется:

$$X(t) = at + b \tag{2.28a}$$
$$Y(t) = a \tag{2.28b}$$

С другой стороны $Q(q(t)) = Spec\{X(t)\} = Spec\{at + b\}$. Пусть $g(t)$ - матрица, из утверждения 2, диагонализующая $X(t)$. Тогда:

$$q_i(t) = Spec\{at + b\}_i = g(t)(at + b)g^{-1}(t) \tag{2.29a}$$
$$p_i(t) = (g(t)ag(t)^{-1})_{ii} \tag{2.29b}$$

Замечание 3.2. *Найдя закон движения $q_i(t)$, проще извлечь $p_i(t)$ непосредственно из уравнения движения: $p_i = \dot{q}_i$*

2.4 Другой способ редукции и самодуальность системы КМ.

2.4.1 Основные определения.

Определение 1. *Пусть на симплектическом многообразии (M, ω) задан некоторый гамильтониан $H(p, q)$.*
Переменными действие-угол для данного гамильтониана называется система координат $\{I_i, \varphi^j\}_{i,j=1}^n$, такая, что:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dI_i \wedge d\varphi^i \tag{2.30}$$
$$\frac{\partial H}{\partial \varphi^j} = 0 \tag{2.31}$$

Далее будем полагать, что в координатах $\{p_i, q^j\}$ симплектическая форма будет иметь вид:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i \tag{2.32}$$

Будем обозначать отображение, меняющее местами координаты и импульсы как: $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(p_1, ..., p_n, q^1, ..., q^n) = (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$$

Определение 2. *Пусть H - некоторый гамильтониан, $\psi : (p_i, q^j) \mapsto (I_i, \varphi^j)$ – преобразование к переменным действие-угол: $\frac{\partial}{\partial \varphi^j}\left((\psi^{-1})^*(H)\right) = 0$. Тогда гамильтониан $\hat{H}$ называется дуальным к H, если $\mathbb{P} \circ \psi^{-1} \circ \mathbb{P}$ – преобразование к переменным действие-угол для $\hat{H}$.*

2.4.2 Редукция к переменным действие-угол.

Заметим, что рассуждения, приведённые при получении гамильтониана Калоджеро можно провести абсолютно также, диагонализуя матрицу Y вместо X^2:

$$gYg^{-1} = I \tag{2.33}$$

$$gXg^{-1} = \Phi \tag{2.34}$$

Не повторяя выкладок[3], приведём результаты:

$$I_{ij} = \delta_{ij} I_i \tag{2.35}$$

$$\Phi_{ij} = \varphi^i \delta_{ij} + \frac{1 - \delta_{ij}}{I_i - I_j} \tag{2.36}$$

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\varphi^i \tag{2.37}$$

$$\tilde{H}(I_i, \varphi^j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i^2 \tag{2.38}$$

Как мы видим, при такой редукции мы получаем гамильтониан системы свободных частиц, данная система может быть очевидным образом проинтегрирована:

$$\Phi(t) = \Phi(0) + I(0)t \tag{2.39}$$

$$I(t) = I(0) \tag{2.40}$$

Заметим, что в обоих случаях в редуцированной системе движение происходит на многообразии

$$\mu^{-1}(c)/G_c$$

(согласно общей конструкции). Можно смотреть на две различные процедуры редукции как на два способа выбрать координаты на этом многообразии. Построим преобразование, позволяющее переходить от одних координат к другим, для этого воспользуемся тем, что мы знаем, как по известным координатам $\{p_i, q^j\}$ строить некоторый элемент орбиты действия G_c: $(Q(p,q), L(p,q))$, теперь остаётся спроецировать его согласно только что построенной процедуре редукции:

$$L(p,q) \mapsto gL(p,q)g^{-1} = I(I_i, \varphi^j) = diag(I_i) \tag{2.41}$$

$$Q(p,q) \mapsto gQ(p,q)g^{-1} = \Phi(I_i, \varphi^j) \tag{2.42}$$

В силу того, что после перехода гамильтониан преобразуется к виду 2.38, а симплектическая структура к 2.37, по определению мы нашли преобразование гамильтониана к переменным действие-угол. Будем обозначать его: $\psi : \{p_i, q^j\} \mapsto \{I_i, \varphi^j\}$, либо $I_i(p,q), \varphi^j(p,q)$

Применяя обратное преобразование к закону движения 2.39-2.40 мы получим закон движения для системы КМ.

Замечание 3.3. *В построенных координатах действие-угол интегралы движения J_k из утверждения 3 имеют вид: $\sum_{i=1}^{n}(J_i)^n$. Они в свою очередь функционально независимы (определитель соответствующей матрицы Якоби пропорционален определителю Вандермонда), тем самым получена функциональная независимость этих интегралов движения (так как невырожденная замена координат не влияет на функциональную (не)зависимость).*

2.4.3 Самодуальность системы КМ.

Утверждение 4. *Система КМ дуальна самой себе в смысле определения 2.*

Доказательство.

$$(\mathbb{P} \circ \psi \circ \mathbb{P})^*(H_{CM})(p,q) = \mathbb{P}^*(H_{CM})(\psi(q,p)) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(L^2(\varphi(q,p), I(q,p)))\right) =$$

Заметим теперь, что: $L_{ij}(I, \varphi) = \Phi_{ij}(\varphi, I)$ (из сравнения формул 2.22 и 2.36), следовательно:

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\Phi^2(I(q,p), \varphi(q,p))) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Q^2(q,p)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

[2] Заметим, что из уравнений движений матрица Y постоянна и, следовательно, постоянна диагонализующая матрица
[3] они будут отличаться только обозначениями

Тем самым, полученный гамильтониан не зависит от координат (q_i), при этом при преобразовании координат ψ симплектическая форма сохраняет канонический вид. Отображения $\mathbb{P}$ меняют знак симплектической формы относительно канонического вида, поскольку таких преобразования два, в итоге мы получим преобразование, сохраняющее канонический вид симплектической формы.

Таким образом, согласно определению 2 гамильтониан H_{CM} дуален гамильтониану H_{CM} (то есть себе). $\square$

Список литературы

[1] Переломов А. М. **Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли**. –М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1990.–240 с. – ISBN 5-02-013826-6.

[2] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov **Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras**. PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters) 71, No. 5 (1981) 313–400.

[3] Olivier Babelon, Denis Bernard, Michel Talon **Introduction to Classical Integrable Systems** – Cambridge University Press – ISBN: 9780521822671

Контакты автора:

e-mail: grigorev.aa@phystech.edu