

# Комбинаторные формулы и бозон-фермионное соответствие

Гаврилова Светлана

Май 2020

## 1 Бозон-фермионное соответствие

**Теорема 1.** (*Изоморфизм пространств Фока*). *Соответствие*

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}, x_1, x_2, x_3, \dots], |u\rangle \mapsto \Phi(|u\rangle) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l \langle l | e^{H(x)} |u\rangle, \quad (1)$$

является изоморфизмом векторных пространств, и

$$\Phi(H_n |u\rangle) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi(|u\rangle), & \text{если } n > 0, \\ -n x_{-n} \Phi(|u\rangle), & \text{если } n < 0. \end{cases} \quad (2)$$

## 2 Производящая функция двумерных диаграмм Юнга, вычисление характера пространства Фока, тождество тройного произведения Якоби

Количество разбиений числа  $n$  на слагаемые равно количеству двумерных диаграмм Юнга из  $n$  клеток. Их производящую функцию легко найти из простых наблюдений за коэффициентами:

**Предложение.**

$$P(q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^j + q^{2j} + q^{3j} + \dots) \quad (3)$$

*Доказательство.* Действительно, чтобы набрать  $q^n$  из правой части, надо рассмотреть все представления  $n$  в виде  $n = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots$ , где  $k_i$  — целые неотрицательные числа. Такие представления числа  $n$  находятся в биекции с обычными разбиениями  $n$  на слагаемые. Для этого обозначим  $m_i = k_i + k_{i+1} + \dots$ , тогда  $n = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$  и  $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \dots$ .  $\square$

**Определение.** *Определим характер пространства Фока как производящую функцию размерностей пространств  $\mathcal{F}_l^{(d)}$  ( $l$  — заряд,  $d$  — энергия)*

$$ch\mathcal{F} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{d \geq l^2/2} \dim(\mathcal{F}_l^{(d)}) t^l q^d \quad (4)$$

**Предложение.**

$$ch\mathcal{F} = \prod_{\substack{j > 0 \\ j \in \mathbb{Z} + 1/2}} (1 + tq^j)(1 + t^{-1}q^j) \quad (5)$$

*Доказательство.* После выбора естественного базиса  $e$  ясно, что это производящая функция имеет вид:  $\sum_e t^{l(e)} q^{d(e)}$ , где  $l(e)$  и  $d(e)$  — заряд и энергия соответственно. Каждый базисный элемент можно записать как некоторые операторы рождения, применённые к вакуумному состоянию. Остаётся заметить, что при  $j > 0$  фермион  $\psi_{-j}$  добавляет 1 к заряду и  $j$  к энергии, а  $\psi_j^*$  добавляет  $-1$  к заряду и  $j$  к энергии.  $\square$

Посчитаем характер бозонного пространства Фока, используя построенный изоморфизм.

Прообраз элемента  $z^l x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$  имеет заряд  $l$  и энергию  $l^2/2 + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot j$ . Действительно, это верно для  $z^l$  (его прообразом является  $|l\rangle$ ), а оператор  $H_n$  имеет заряд 0 и энергию  $-n$ .  
Так,

$$ch\mathcal{F} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} t^l \sum_{\text{мономы } x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots} q^{l^2/2 + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot j} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} t^l q^{l^2/2} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1}. \quad (6)$$

Приравняв посчитанные двумя способами характеры, получаем:

$$\prod_{\substack{j>0 \\ j \in \mathbb{Z} + 1/2}} (1 + tq^j)(1 + t^{-1}q^j)(1 - q^j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} t^l q^{l^2/2}. \quad (7)$$

Заменой  $t$  на  $tq^{1/2}$  получается

**Теорема 2.** *Тройное тождество Якоби.*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + tq^j)(1 + t^{-1}q^{j-1})(1 - q^j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} t^l q^{l(l+1)/2} \quad (8)$$

Приведём другое доказательство этого тождества.

*Доказательство.* Тождество тройного произведения вывести из следующего соответствия (которое нам понадобится и после): сопоставим каждой двумерной диаграмме Юнга фермионное состояние

$$|\mu\rangle = \prod_{j=1}^d \psi_{-a_j}^* \psi_{-b_j} |0\rangle,$$

где

$$a_i = \mu_i - i + \frac{1}{2}, \quad b_i = \mu_i^t - i + \frac{1}{2},$$

то есть  $a_i$  и  $b_i$  — это площадь срезанного столбика над и под диагональю соответственно, а  $d$  — количество клеток, которые разрезает диагональ.

Это сопоставление задаёт биекцию между диаграммами Юнга и диаграммами Майя с нулевым зарядом, причём количество клеток в диаграмме Юнга отвечает энергии соответствующей диаграммы Майя (со знаком минус).

Тогда

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} t^l q^{l^2/2} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{\text{диаграммы Майя с зарядом } 0} t^l q^{l^2/2} q^{(-\text{энергия диаграммы})}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{j>0 \\ j \in \mathbb{Z} + 1/2}} (1 + tq^j)(1 + t^{-1}q^j) &= \sum_{r=0}^{\infty} t^r \sum_{s=0}^{\infty} t^{-s} \sum_{0 < i_1 \leq \dots \leq i_r} q^{i_1 + \dots + i_r} \sum_{0 < j_1 \leq \dots \leq j_s} q^{j_1 + \dots + j_s} = \\ &= \sum_{\text{диаграммы Майя с зарядом } l = r - s} t^l q^{(-\text{энергия диаграммы})}. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенство правых частей выражений (9) и (10) следует из того, что есть биекция из множества диаграмм с нулевым зарядом в множество диаграмм с зарядом  $l$ , отнимающая от энергии каждого элемента  $l^2/2$ . Эта биекция есть снос "нуля" на  $|l|$  в соответствующую сторону. Так, мы доказали равенство левых частей выражений (9) и (10), то есть (с точностью до замены  $t$  на  $tq^{1/2}$ ) нужное тождество.  $\square$

### 3 Вычисление производящей функции трёхмерных диаграмм Юнга при помощи вертексных операторов

**Определение.** Плоское разбиение числа  $n$  — это двумерный массив  $\pi_{i,j}$  с  $i, j > 0$  из целых неотрицательных чисел, в сумме дающих  $n$ , такой что числа по строкам и столбцам не возрастают, то есть  $\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$  и  $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$ .

Если над плоским разбиением над каждой клеткой  $(i, j)$  построить столбик из  $\pi_{i,j}$  кубиков, то получится трёхмерная диаграмма Юнга. Каждой трёхмерной диаграмме Юнга соответствует последовательность двумерных диаграмм  $\{\mu(t)\}$ , которые получаются разрезанием диаграммы вдоль диагональных плоскостей  $x_2 - x_1 = t$ .

Мы говорим, что двумерные диаграммы Юнга  $\mu$  и  $\nu$  перемежаются (обозначение:  $\mu \succ \nu$ ), если  $\mu_1 \geq \nu_1 \geq \mu_2 \geq \nu_2 \geq \dots$ . Нетрудно видеть, что последовательность  $\{\mu(t)\}$  действительно может быть получена из трёхмерной диаграммы Юнга описанным способом тогда и только тогда, когда  $\mu(t) \prec \mu(t+1), t < 0$  и  $\mu(t) \succ \mu(t+1), t \geq 0$  (см Рис. 1).

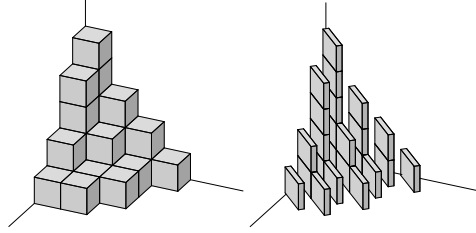


Рис. 1:

Введём половины вертексных операторов

$$\Gamma_+(z) = \exp \sum_{n>0} \frac{z^{-n} H_n}{n} \quad (11)$$

$$\Gamma_-(z) = \exp \sum_{n>0} \frac{z^n H_{-n}}{n} \quad (12)$$

**Лемма 1.**

$$\Gamma_-(1)|\mu\rangle = \sum_{\nu \succ \mu} |\nu\rangle \quad (13)$$

$$\Gamma_+(1)|\mu\rangle = \sum_{\nu \prec \mu} |\nu\rangle \quad (14)$$

*Доказательство.* В предыдущем докладе были доказано, что вертексные операторы действуют на базисе следующим образом:

$$\Gamma_-(z)|\mu\rangle = \sum_{\nu \succ \mu} z^{|\nu-\mu|} |\nu\rangle \quad (15)$$

$$\Gamma_+(z)|\mu\rangle = \sum_{\nu \prec \mu} z^{-|\mu-\nu|} |\nu\rangle \quad (16)$$

При подстановке  $z = 1$  получаем нужное выражение. □

**Замечание.** Это значит, что в некотором смысле  $\Gamma_-$  и  $\Gamma_+$  являются операторами перехода перемежающихся диаграмм Юнга.

Пусть  $L_0$  — оператор градуировки, то есть  $q^{L_0}|\mu\rangle = q^{|\mu|}|\mu\rangle$ , а  $Z$  — производящая функция трёхмерных диаграмм Юнга, тогда, двигаясь с нулевой диаграммы к центру (с обеих сторон), можно написать:

$$Z = \left\langle \left( \prod_{t=0}^{\infty} q^{L_0} \Gamma_+(1) \right) q^{L_0} \left( \prod_{t=-\infty}^{-1} \Gamma_-(1) q^{L_0} \right) \right\rangle. \quad (17)$$

**Предложение 1.** Формулу (17) можно переписать в виде

$$Z = \left\langle \prod_{n>0} \Gamma_+(q^{-n+\frac{1}{2}}) \prod_{n>0} \Gamma_-(q^{n-\frac{1}{2}}) \right\rangle. \quad (18)$$

*Доказательство.* Для доказательства потребуется следующее коммутационное соотношение:

$$q^{\alpha L_0} \Gamma_{\pm}(1) q^{-\alpha L_0} = \Gamma_{\pm}(q^{\alpha}). \quad (19)$$

Действительно, при помощи формул (15) и (16) нетрудно убедиться, что эти операторы одинаково действуют на базисных элементах.

Тогда можно представить  $q^{L_0}$  в середине выражения (17) как  $q^{L_0/2} \cdot q^{L_0/2}$  и разнести его в обе стороны от середины к краям, пользуясь коммутационными соотношениями. Получим (18).  $\square$

**Предложение 2.**

$$\Gamma_+(u)\Gamma_-(v) = (1 - v/u)^{-1} \Gamma_-(v)\Gamma_+(u) \quad (20)$$

*Доказательство.* Так как  $[H_n, H_m] = n\delta_{n+m}$ , имеем

$$\exp\left(\frac{u^{-n}H_n}{n}\right)\exp\left(\frac{v^m H_{-m}}{m}\right) = \exp\left(n\delta_{n+m} \frac{u^{-n}}{n} \frac{v^m}{m}\right)\exp\left(\frac{v^m H_{-m}}{m}\right)\exp\left(\frac{u^{-n}H_n}{n}\right).$$

Переставив по этому правилу компоненты  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , получим

$$\Gamma_+(u)\Gamma_-(v) = \left(\exp \sum_{n>0} \frac{u^{-n}H_n}{n}\right)\left(\exp \sum_{m>0} \frac{v^m H_{-m}}{m}\right) = \prod_{n>0} e^{\frac{(v/u)^n}{n}} \Gamma_-(v)\Gamma_+(u) = (1 - v/u)^{-1} \Gamma_-(v)\Gamma_+(u). \quad (21)$$

$\square$

**Теорема 3.** Формула МакМагона.

$$Z = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-j} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + \dots \quad (22)$$

*Доказательство.* Так как  $\Gamma_+(z)|0\rangle = |0\rangle$ , а  $\langle 0|\Gamma_-(z) = \langle 0|$ , переставляя  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  по формуле (20), получим:

$$Z = \prod_{n>0, m>0} (1 - q^{n+m-1})^{-1} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-j} \quad (23)$$

$\square$