Модели, переходы в моделях, теоремы о переходах в моделях.

Задача и её высокотемпературный предел.

Рассмотрим бытовую статфизическую теорию про спины на двумерной решетке:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos\left(\varphi_i - \varphi_j\right) \tag{1}$$

Изучим два предела этой модели: высокие и низкие температуры. В прошлом докладе, вероятно, было упомянуто, что вся наука строится на статсумме следующего вида:

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-\beta H[\varphi(\mathbf{x})]} = \prod_i \left[\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_i}{2\pi}\right] \exp\left(-\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos\left(\varphi_i - \varphi_j\right)\right) \tag{2}$$

Рассмотрим предел высоких температур (малых β), раскладывая экспоненту:

$$Z = \prod_i \left[\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_i}{2\pi}\right] \prod_{\langle i,j \rangle} \left(1 - \beta J \cos\left(\varphi_i - \varphi_j\right)\right) \tag{3}$$

Как устроен порядок системы в этом приближении? Вычислим коррелятор:

$$\langle \mathbf{S}(0) \cdot \mathbf{S}\left(\mathbf{r}\right) \rangle = \langle \cos(\varphi_0 - \varphi_r) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_i \left[\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_i}{2\pi}\right] \cos(\varphi_0 - \varphi_r) \prod_{\langle i,j \rangle} \left(1 - \beta J \cos\left(\varphi_i - \varphi_j\right)\right) \tag{4}$$

Используем два простых факта:

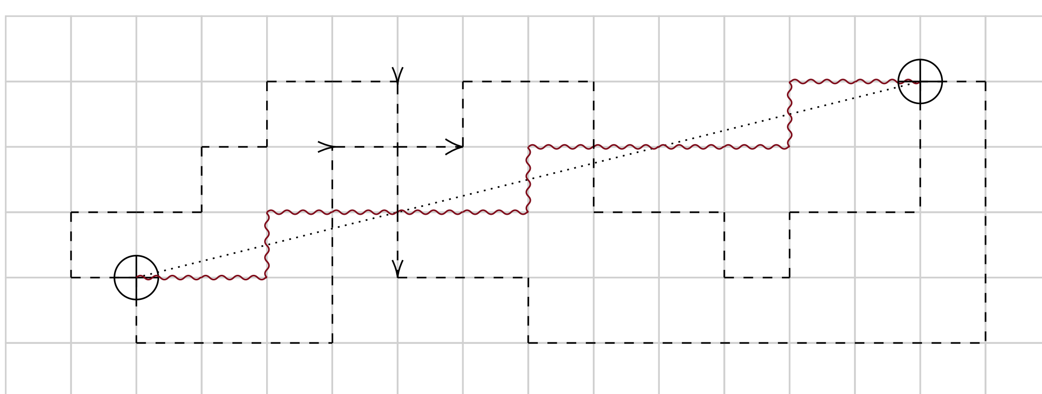
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{2\pi} \cos(\varphi_i - \varphi_j) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_j}{2\pi} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \cos(\varphi_j - \varphi_k) = \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_k)}{2} \tag{5}$$

Отсюда ясно, что ненулевой вклад приходит только от произведения квадратов косинусов.Чтобы $\cos(\varphi_0 - \varphi_r)$ возвелся в квадрат, нам нужно проинтегрировать по тем «путям», который идут из точки 0 в точку r. Пояснение:

$$Z \cdot \langle \cos\left(\varphi_r - \varphi_0\right) \rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_0 \dots \mathrm{d}\varphi_r}{(2\pi)^r} \beta J \cos\left(\varphi_0 - \varphi_1\right) \cdot \beta J \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \dots \beta J \cos\left(\varphi_{r-1} - \varphi_r\right) \cdot \cos\left(\varphi_r - \varphi_0\right) =$$

$$= \frac{(\beta J)^r}{2^{r-1}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_0 \mathrm{d}\varphi_r}{(2\pi)^2} \cos(\varphi_0 - \varphi_r)\cos(\varphi_0 - \varphi_r) = \left(\frac{\beta J}{2}\right)^r = e^{-r/\zeta}, \quad \zeta = \left[\log\left(\frac{2}{\beta J}\right)\right]^{-1}$$

So: в высокотемпературном режиме порядок экспоненциально затухает. В принципе, из-за большого количества «кратчайших путей» должна быть и предэкспонента, но для нас её наличие не будет важно. Картинка:



Низкотемпературный предел.

Исследуем теперь вторую возможность. При низких температурах естественно положить, что соседние спины находятся близко и почти параллельны. $\cos(\varphi_i - \varphi_j) \approx 1 - (\varphi_i - \varphi_j)^2/2$ и $\varphi_i - \varphi_{i+1} \approx \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x$. В итоге имеем гамильтониан:

$$H = \frac{J}{2} \int \mathrm{d}^2 x \, \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \tag{6}$$

При таком разложении потерялась периодичность, пока оставим это. Выясним, чем выделен $2D$ случай, изучив эту систему в n-мерии. В эффективном гамильтониане (6) в n-мерии появится размерный множитель, связанный с пространственным шагом решетки a:

$$H = \frac{Ja^{2-n}}{2} \int \mathrm{d}^n x \, \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \tag{7}$$

Посмотрим, как здесь устроена корреляция, т.е. вычислим $\langle \cos(\varphi_r - \varphi_0) \rangle$:

$$\langle \cos(\varphi_r - \varphi_0) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi \, \cos(\varphi_r - \varphi_0) \; e^{-\beta F[\varphi(\mathbf{x})]} = \mathrm{Re} \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left[i(\varphi(0) - \varphi(\mathbf{r})) - \frac{\beta J a^{2-n}}{2} \int \mathrm{d}^n x \, \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \right]}{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left[- \frac{\beta J a^{2-n}}{2} \int \mathrm{d}^n x \, \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \right]} \tag{8}$$

В качестве гранусловий будем считать, что поля убывают на бесконечности. Разложимся на Фурье-моды:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}}; \quad \varphi(0) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \, \varphi_{\mathbf{k}}; \quad \int \mathrm{d}^n x \, \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} k^2 \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \tag{9}$$

Мера преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{D}\varphi \equiv \mathcal{N}' \prod_{\mathbf{x}} \mathrm{d}\varphi(\mathbf{x}) \longmapsto \mathcal{N} \prod_{\mathbf{k}} \mathrm{d}\varphi^*_{\mathbf{k}} \mathrm{d}\varphi_{\mathbf{k}} = \mathcal{D}\varphi^*_{\mathbf{k}} \mathcal{D}\varphi_{\mathbf{k}} \tag{10}$$

Действительно, $\varphi_{\mathbf{k}}$ - это уже комплексная величина, и интегрирование по всем конфигурациям $\varphi_{\mathbf{k}}$ должно сводиться к интегрированию по $\mathbb{C}$ для всех $\mathbf{k}$. При условие $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ накладывает связь $\varphi^*_{\mathbf{k}} = \varphi_{-\mathbf{k}}$. Подставим:

$$\langle \cos(\varphi_r - \varphi_0) \rangle = \mathrm{Re} \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi^*_{\mathbf{k}} \mathcal{D}\varphi_{\mathbf{k}} \exp\left[\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \big(i\varphi_{\mathbf{k}} (1 - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) - \frac{\beta J a^{2-n}}{2} k^2 \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \big) \right]}{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi^*_{\mathbf{k}} \mathcal{D}\varphi_{\mathbf{k}} \exp\left[\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \big(- \frac{\beta J a^{2-n}}{2} k^2 \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \big) \right]} \tag{11}$$

В числителе под интегралом стоит $-\xi \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} - i\alpha\varphi_{\mathbf{k}}$, где $\xi = \dfrac{\beta J a^{2-n}}{2} k^2$, $\alpha = -(1 - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})$. Сделаем вот такую сдвижку: $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} - \dfrac{i\alpha^*}{2\xi}, \quad \tilde{\varphi}_{-\mathbf{k}} = \varphi_{-\mathbf{k}} + \dfrac{i\alpha}{2\xi}$. Получаем вот что:

$$\mathrm{Re}(\xi \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} \tilde{\varphi}_{-\mathbf{k}}) = \xi \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} + \frac{\alpha^* \alpha}{4\xi} + \mathrm{Re}\Big(\frac{i\alpha}{2} \varphi_{\mathbf{k}} - \frac{i\alpha^*}{2} \varphi_{-\mathbf{k}} \Big) = \xi \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} + \frac{\alpha^* \alpha}{4\xi} + \mathrm{Re}(i\alpha\varphi_{\mathbf{k}}) \tag{12}$$

Получаем следующее:

$$\langle \cos(\varphi_r - \varphi_0) \rangle = \mathrm{Re} \cancelto{1}{\frac{\displaystyle\int \mathcal{D}\tilde{\varphi}^*_{\mathbf{k}} \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} \exp\left[\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \big(- \frac{\beta J a^{2-n}}{2} k^2 \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} \tilde{\varphi}_{-\mathbf{k}} \big) \right]}{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi^*_{\mathbf{k}} \mathcal{D}\varphi_{\mathbf{k}} \exp\left[\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \big(- \frac{\beta J a^{2-n}}{2} k^2 \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \big) \right]}} \exp\Big(- \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{\alpha^* \alpha}{4\xi} \Big) \tag{13}$$

Помимо коррелятора, мы посчитали и $\langle S_x \rangle = \langle \cos(\varphi_0) \rangle$, что соответствует $\varphi_r = 0$ или $\alpha = -1$ в полученной формуле. Итоговые ответы:

$$\langle S_x \rangle = \exp\left[- \frac{T \mathcal{S}_n}{2Ja^{2-n}} \int\limits_{1/L}^{1/a} \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^n} \, k^{n-3} \right], \quad \langle \mathbf{S}(0) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \exp\left[- \frac{T}{Ja^{2-n}} \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{1 - \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^2} \right]$$

Асимптотики

Посмотрим на эту формулу поближе:

$$\langle \cos(\varphi_r - \varphi_0) \rangle = \exp\left[-\frac{T}{Ja^{2-n}} \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} \right] \tag{14}$$

Значение среднего определяется прежде всего интегралом, который надо как-то регуляризовать. Берем его от L^{-1} до a^{-1}, где $L \to \infty$ - размер ящика, $a \to 0$ - шаг решетки, и получаем такие асимптотики на больших r:

	$n = 1$	$n = 2$	$n > 2$
Интеграл в $\langle S_x \rangle$	$\sim L$	$\sim \ln\left(\frac{L}{a}\right)$	$\sim \frac{a^{2-n}}{n-2}$
$\langle S_x \rangle$	$\sim \exp\left(-\frac{TL}{2\pi Ja}\right)$	$\sim \left(\frac{L}{a}\right)^{-T/4\pi J}$	$\sim \exp\left(-C_n \cdot \frac{T}{J}\right)$
Интеграл в $\langle \mathbf{S}(0) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle$	$\sim r/2$	$\sim \ln(r/L)$	$\sim \frac{1}{n-2} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{n-2}$
$\langle \mathbf{S}(0) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle$	$\sim \exp\left(-\frac{T}{2Ja} r\right)$	$\sim \left(\frac{r}{L}\right)^{-T/2\pi J}$	$\sim \exp\left(-\tilde{C}_n \cdot \frac{T}{J}\right)$

Задача 1. *Получите эти асимптотики из интегрального представления коррелятора.*

Мы видим следующее:

- На высоких температурах в $n = 2$ коррелятор $\sim \exp(-r/\zeta)$, где ζ - конечная длина корреляции.
- Для $n > 2$ есть дальний порядок, для $n = 1$ он экспоненциально затухает, а вот в $n = 2$ затухание степенное, эффективно это означает, что $\zeta \to \infty$.
- Мысль: между большими и малыми T должен быть фазовый переход.
- Для $n \leq 2$ *нет упорядоченной фазы, нет намагниченности*, а значит и фазового перехода. Это проявление теоремы Мермина-Вагнера, которая сформулирована ниже.
- Как так?

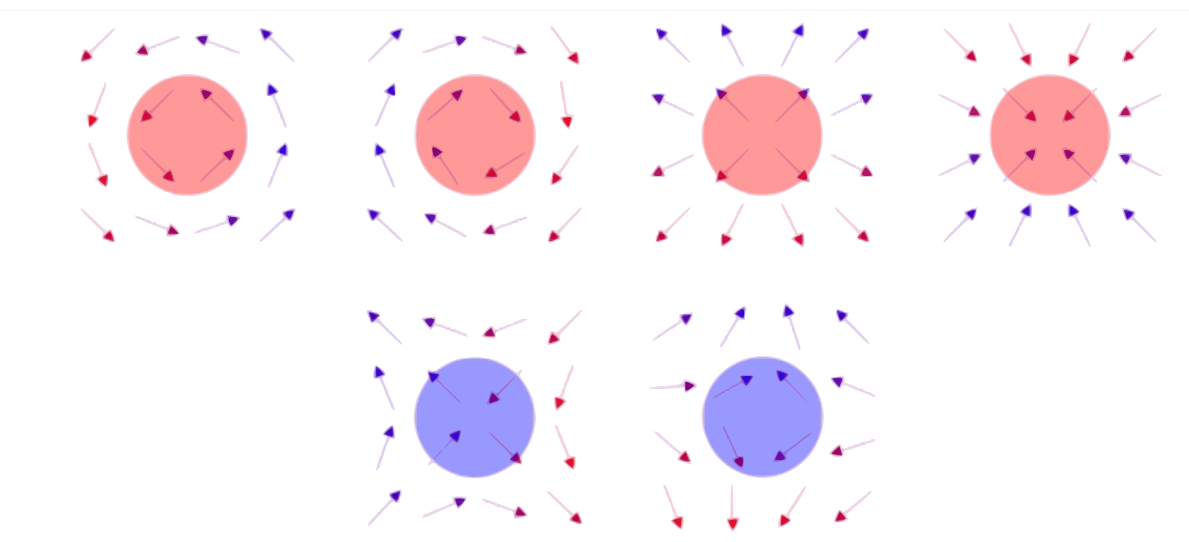


Рис. 1: Верхний ряд - вихри ($n > 0$), нижний - антивихри ($n < 0$) для разных φ_0. Интуиция: $\mathbf{S} = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$

Вихри.

Чтобы устранить наше противоречие, попробуем выяснить, что мы упустили. Для этого посмотрим на «классические решения» нашей системы. Имеем:

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi} = 0 \implies \Delta\varphi = 0 \tag{15}$$

Есть скучное решение $\varphi(\mathbf{x}) = const$. Но есть и весёлое решение (см. картинку выше):

$$\text{Гранусловие:} \quad \oint \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \implies \varphi = n \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_0 \tag{16}$$

Задача 2. *Осознайте картинку к решению (16).*

Это решения, в которых φ наматывается вокруг некоторой точки n раз. Заметим, что в предыдущем разделе мы замели периодичность φ под ковер, и считали интегралы только по «прямым» траекториям с $n = 0$. Именно поэтому мы «потеряли» фазовый переход. Ясно, что для вихрей $|\nabla\varphi| = n/r$. Тогда из (6) легко получить:

$$E = \frac{J}{2}\int \mathrm{d}^2x\, \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = \pi n^2 J \log\left(\frac{L}{a}\right) + E_c \tag{17}$$

Здесь мы вновь ввели ту же самую регуляризацию: размер системы L и шаг решетки a, E_C - загадочная энергия ядра вихря. Посчитаем ещё больцмановскую энтропию $\mathcal{S} = \log\Omega$. Всего $(L/a)^2$ узлов решётки, т.е. $(L/a)^2$ способов посадить вихрь. Отсюда $\mathcal{S} = 2\log(L/a)$. Свободная энергия:

$$F = E - TS = E_c + (\pi n^2 J - 2T)\log\left(\frac{L}{a}\right) \tag{18}$$

Отсюда вытекает следующая картина:

$T < T_c$	$T_c = \dfrac{\pi n^2 J}{2}$	$T > T_c$
$F \to \infty$ при $L \to \infty$, образование вихрей подавлено	Точка невозврата, БКТ-переход	$F \to -\infty$ при $L \to \infty$, новые вихри понижают свободную энергию

Вихри не просто есть. Они взаимодействуют. Рассмотрим суперпозицию:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = n_1 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_0^{(1)} + n_2 \arctan\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) + \varphi_0^{(2)}, \quad x_0^2 + y_0^2 = R^2$$

Энергия такой конфигурации (интеграл набирается при $\cos\theta \sim 1$):

$$E = \frac{J}{2}\int \mathrm{d}^2x\, (\nabla(\varphi_1 + \varphi_2))^2 = E_1 + E_2 + J\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_a^L \mathrm{d}r\, r\, \frac{n_1 \cdot n_2}{r \cdot \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} \sim E_1 + E_2 + 2\pi J n_1 n_2 \int_a^L \frac{\mathrm{d}r}{|r - R|} \approx$$
$$\approx \pi J n_1^2 \log\left(\frac{L}{a}\right) + \pi J n_2^2 \log\left(\frac{L}{a}\right) + 2\pi J n_1 n_2 \log\left(\frac{L}{R}\right) = \pi J\,(n_1 + n_2)^2 \log\left(\frac{L}{a}\right) - \underbrace{2\pi J n_1 n_2 \log\left(\frac{R}{a}\right)}_{\text{взаимодействие}}$$

При $n_1 + n_2 = 0$ зависимость $\sim \log L$ исчезает! Энергия таких «связанных состояний» отрицательна, они выгодны. Получается своего рода газ диполей. А о его свойствах в следующем докладе.