Косые функции Шура

Как известно, s_λ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения $\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\mu,\nu}$. Тогда, так как каждая симметрическая функцияf однозначно определяется своим скалярным произведением с s_λ

$$f = \sum_\lambda \langle f, s_\lambda \rangle s_\lambda, \tag{0.1}$$

то имеет место

Определение. *Косыми функциями Шура* $s_{\lambda/\mu}$ называются симметрические функции, которые опрделяются из равенства

$$\left\langle s_{\lambda/\mu}, s_v \right\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_v \rangle, \tag{0.2}$$

что эквивалентно

$$s_\mu s_v = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda \tag{0.3}$$

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_v c^\lambda_{\mu\nu} s_v \tag{0.4}$$

Покажем, что определения эквивалентны. С одной стороны

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda \langle s_\lambda, s_\mu s_v \rangle s_\lambda, \tag{0.5}$$

и введём обозначение $\langle s_\lambda, s_\mu s_v \rangle = c^\lambda_{\mu\nu}$. С другой стороны

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu \left\langle s_{\lambda/\mu}, s_v \right\rangle s_\nu = \sum c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu. \tag{0.6}$$

Заметим, что коэффициенты $c^\lambda_{\mu\nu}$ не зануляются только при $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$.

Покажем, что это опрделение эквивалентно определению косых полиномов Шура через тождество Якоби-Труди. Таким образом, мы будем иметь 3 эквивалентных опрделения.
Пусть $x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...)$. Тогда верно

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda,\nu} c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu(x) s_\lambda(y) = s_\mu(y) \sum_\nu s_\nu(x) s_\nu(y) \tag{0.7}$$

Как известно,

$$\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y), \tag{0.8}$$

тогда, из формулы (0.5) следует

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = s_\mu(y) \sum_v h_v(x) m_v(y). \tag{0.9}$$

Пусть теперь $y = (y_1, ..., y_n)$. Тогда можно использовать $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\lambda}$

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) = \sum_v h_v(x) m_v(y) a_{\mu+\delta}(y). \tag{0.10}$$

Пусть последовательнсть α является перестановкой разбиения ν, будем обозначать это $\alpha = \sigma(\nu)$, тогда

$$\sum_v h_v(x) m_v(y) a_{\mu+\delta}(y) = \sum_\nu h_\nu(x) \sum_{\alpha=\sigma(\nu)} y^\alpha \sum_{\omega\in S_n} \varepsilon(\omega) y^{\omega(\mu+\delta)} = \sum_\nu \sum_{\alpha=\sigma(\nu)} h_\nu(x) \sum_{\omega\in S_n} \varepsilon(\omega) y^{\alpha+\omega(\mu+\delta)}, \tag{0.11}$$

Так как суммирование ведётся по α, которые являются перестановками ν, а ν пробегают всевозможные разбиения, то можно сделать суммирование по всевозможным перестановкам всевозможных разбиений, т.е. $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) = \sum_\alpha h_\alpha(x) \sum_{w\in S_n} \varepsilon(w) y^{\alpha+w(\mu+\delta)}. \tag{0.12}$$

В сумме слева рассмотрим коэффициент при $y^{\lambda+\delta}$, т.е. $s_{\lambda/\mu}$. Отсюда получаем выражение для косых функций Шура

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_w \sum_{s_n} \varepsilon(w) h_{\lambda+\delta-w(\mu+\delta)} = \det \left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j} \right)_{1\leqslant i,j\leqslant n'}. \tag{0.13}$$

Числа Костки

Сначала напомним определение косых полустандартных таблиц.

Определение. *Косой полустандартной таблицей Юнга* формы λ/μ называется массив $T = (T_{ij})$ положительных целых чисел формы λ/μ (r.e.$1 \leqslant i \leqslant \ell(\lambda), \mu_i < j \leqslant \lambda_i$)

Определение. Таблица T имеет *тип* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, если имеется α_i чисел равных i.

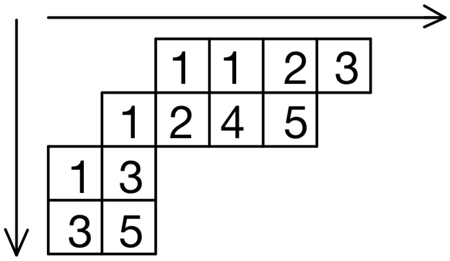


Рис. 1: Таблица T типа $\alpha = (4, 2, 3, 1, 2, 0, 0, 0, ...)$

Заметим, что одному типу таблицы может соотвествовать несколько таблиц, например

Рис. 2: Обе таблицы имеют тип $\alpha = (1, 2, 1, 0, 0, ...)$

Введём обозначение $x^T = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_i^{\alpha_i} ...$. Запишем косые полиномы Шура через косые полустандартные таблицы

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T, \tag{0.14}$$

где суммирование ведётся по всем полустандартным таблицам T формы λ/μ. Теперь скомбинируем в отдельные суммы таблицы, которые соответствуют одному типу

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\alpha K_{\lambda/\mu,\alpha} x^\alpha. \tag{0.15}$$

Теперь вспомним, что $m_\lambda = \sum_\alpha x^\alpha$, где α – перестановка разбиения λ. Тогда скомбинируем все последовательности α^i, которые соотвествуют перестановке *одного* разбиения (например, $\alpha = (2, 2, 3, 0, 0, ...)$ и $\beta = (2, 3, 2, 0, 0, ...)$ – перестановки разбиения $\lambda = (322)$) в отдельные суммы

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\alpha^1 = \sigma(\lambda_1)} K_{\lambda/\mu,\alpha^1} x^{\alpha^1} + \sum_{\alpha^2 = \sigma(\lambda_2)} K_{\lambda/\mu,\alpha^2} x^{\alpha^2} + ... = \sum_\lambda \sum_{\alpha^i = \sigma(\lambda)} K_{\lambda/\mu,\alpha^i} x^{\alpha^i}. \tag{0.16}$$

Покажем, что коэффициенты $K_{\lambda/\mu,\alpha^i}$ для всех α_i, которые являются перестановками одного разбиения *одинаковы*. Это значит, что надо показать, что каждому такому типу таблицы (т. е. перестановке данного разбиения) соответствует одинаковое количество таблиц. Идея состоит в следующем.

Упражнение. Показать, что, если существует тип $\alpha = (...\alpha_i, \alpha_{i+1}, ...)$, то существует $\alpha' = (...\alpha_{i+1}, \alpha_i, ...)$ (т. е. разрешены элементарные транспозиции).

Так как любую перестановку можно получить из элементарных транспозиций, то мы покажем, что действительно существуют все перестановки данного типа. Таким образом, мы установим взамимооднозначное соответствие между таблицами, которые соответствуют типу, являющемуся перестановкой данного разбиения. Итого, имеет место формула

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu K_{\lambda/\mu,\nu} m_\nu, \tag{0.17}$$

где $K_{\lambda/\mu,\nu}$ по построению – количество таблиц формы λ/μ и *веса* ν (весом таблицы мы называем упорядоченный по невозрастанию тип таблицы, т.е. разбиение, которое соответствует данному типу). Домножим это равенство скалярно на $h_{\nu'}$, и в силу ортонормированности $\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\mu,\nu}$ получим

$$\langle s_{\lambda/\mu}, h_\nu \rangle = \sum_{\nu'} K_{\lambda/\mu,\nu'} \delta_{\nu,\nu'} = K_{\lambda/\mu,\nu}. \tag{0.18}$$

Формула Пиери

Определение 1. *Горизонтальной полосой* называется косая диаграмма, у которой никакие две клетки не находятся в одном столбце.

Пример 1.

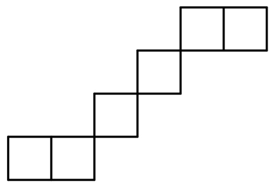


Рис. 3: Горизонатльная полоса $\lambda/\mu = 6432/432$

Прежде чем сформулировать основную теорему, проделаем некоторые вычисления.

Предложение 1. Для разбиения $\lambda = (n)$, $n \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$s_{(n)} = h_{(n)}. \tag{0.19}$$

Доказательство. Из формулы для полиномов Шура через полные симметрические функции

$$s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \tag{0.20}$$

следует, во-первых, что при $\mu = 0$

$$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}. \tag{0.21}$$

Теперь заметим, что при $\lambda = (n)$ на главная диагональ матрицы будет иметь вид $\mathrm{diag} = (h_{(n)}, 1, 1, ..., 1)$, (т.к. $h_0 = 1$), а ниже этой диагонали будут стоять нули (так как мы условились что $h_r = 0$ при $r < 0$). Таким образом $\det = h_{(n)}$, откуда следует исходная формула.

□

Теорема 1. (***Формула Пиери***)

$$s_\nu s_n = \sum_\lambda s_\lambda,$$

где суммирование ведётся по всем разбиениям λ таким, что λ/ν - горизонтальная полоса.

Доказательство. Согласно определению косых полиномов Шура

$$\langle s_\nu s_n, s_\lambda \rangle = \langle s_n, s_{\lambda/\nu} \rangle, \tag{0.22}$$

далее, из формулы (0.3)

$$\langle s_n, s_{\lambda/\nu} \rangle = \langle h_n, s_{\lambda/\nu} \rangle = K_{\lambda/\nu,n}. \tag{0.23}$$

Прежде всего заметим, что необходимо, чтобы $|\lambda/\nu| = n$, иначе $K_{\lambda/\nu,n} = 0$. Также заметим, что согласно опрделению косых получтандартных таблиц, целые числа в стобцах расположены строго по возрастанию, а так как мы имеем в распоряжении только 1, то никакой столбец не должен содержать более одной клетки. Таким образом, получили горизонтальную полосу. Очевидно, что существует единственная горизонтальная полоса λ/ν типа n, значит $K_{\lambda/\nu,n} = 1$. Откуда приходим к исходной формуле.

□

Пример 2. На рисунке показаны способы добавить горизонтальную полосу размера 2 к диаграмме

Исходное разложение имеет вид

$$s_{331}s_2 = s_{531} + s_{432} + s_{4311} + s_{333} + s_{3321}. \tag{0.24}$$

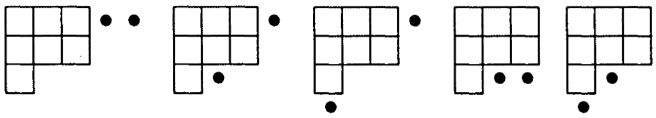


Рис. 4: $\nu = (331),\ n = 2$

Действие p_r

Определение 2. Косая диаграмма λ/μ называется *связной*, если внутренность диаграммы λ/μ, рассматриваемой как объединение целых клеток, является связным открытым множеством.

Например, диаграмма $(21)/(1)$ не является связной.

Определение 3. *Косой крюк* – это связная диаграмма, не содержащая квадратов 2×2.

Определение 4. *Высота* $\mathrm{ht}(B)$ косого крюка B определяется, как количество строк, уменьшенное на 1.

Пример 3.

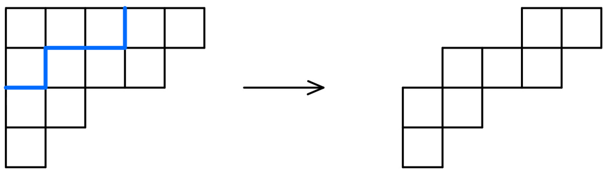


Рис. 5: *Косой крюк* $\lambda/\mu = 5421/31$ высоты 3

Установим связь между косыми крюками и симметрическими функциями.

Теорема 2. (***Действие*** p_r) Для любых $\mu \in Par$, $r \in \mathbf{N}$ выполняется

$$s_\mu p_r = \sum_\lambda (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)} s_\lambda,$$

где суммирование ведётся по всем разбиениям $\lambda \supseteq \mu$, для которых λ/μ является косым крюком размера r.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, w \in \mathfrak{S}_n$. Все функции зависят от $x_1, \ldots, x_n$.

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_w w(x^\alpha), \tag{0.25}$$

где

$$\varepsilon_w = \begin{cases} 1, & \text{если } w - \text{ чётная перестановка} \\ -1, & \text{если } w - \text{ нечётная перестановка.} \end{cases} \tag{0.26}$$

Иначе это можно записать, как $a_\alpha = \det\left(x_i^{\alpha_j}\right)_{i,j=1}^n$. Отсюда видно, что $a_\alpha = 0$, кроме случая, когда все α_i различны. Тогда представим a_α в виде

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta}, \quad \lambda \in \mathrm{Par},\ \ell(\lambda) \leqslant n,\ \delta = (n-1, n-2, \ldots, 0). \tag{0.27}$$

Домножим (0.13) на p_r

$$a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{j=1}^n a_{\mu+\delta+r\epsilon_j}, \tag{0.28}$$

где ϵ_j — последовательность с единицей в позиции j и с нулями во всех остальных позициях. Покажем, что эта формула верна

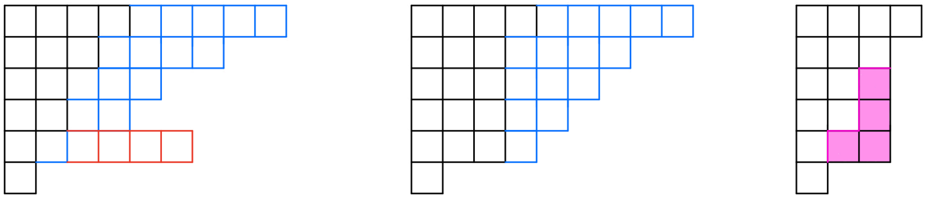
$$\sum_{j=1}^n a_{\mu+\delta+r\epsilon_j} = \sum_{j=1}^n \sum_\omega \epsilon(\omega) x^{\omega(\mu+\delta+r\epsilon_j)} = \sum_{j=1}^n \sum_\omega \epsilon(\omega) x_1^{\mu_{\omega(1)}+\delta_{\omega(1)}} \ldots x_i^{\mu_{\omega(j)}+\delta_{\omega(j)}+r\epsilon_{\omega(j)}} \ldots x_n^{\mu_{\omega(n)}+\delta_{\omega(n)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_\omega \epsilon(\omega) x_1^{\mu_{\omega(1)}+\delta_{\omega(1)}} \ldots x_i^{\mu_{\omega(j)}+\delta_{\omega(j)}+r} \ldots x_n^{\mu_{\omega(n)}+\delta_{\omega(n)}} = \sum_{i=1}^n x_i^r \sum_\omega \epsilon(\omega) x^{\omega(\mu+\delta)} = a_{\mu+\delta} p_r \tag{0.29}$$

Расположим элементы последовательности $\mu+\delta+r\epsilon_j$ в убывающем порядке. Если в ней имеется два равных элемента, то она не вносит вклад в сумму (0.14). В противном случае найдутся некоторые $p \leqslant q$, для которых

$$\mu_{p-1}+n-p+1 > \mu_q+n-q+r > \mu_p+n-p. \tag{0.30}$$

Тогда $a_{\mu+\delta+r\epsilon_j} = (-1)^{q-p}a_{\lambda+\delta}$, где



$$\lambda = (\mu_1,\dots,\mu_{p-1},\mu_q+p-q+r,\mu_p+1,\dots,\mu_{q-1}+1,\mu_{q+1},\dots,\mu_n)\,. \tag{0.31}$$

Проиллюстрируем полученное на примере. На рисунке синим обозначена последовательность $\delta=(5,4,3,2,1,0)$, красным обозначена последовательность $r\epsilon_j = 4\cdot\epsilon_5 = (0,0,0,0,4,0)$, чёрным слева обозначено разбиение $\mu=(4,3,2,2,1,1)$, а чёрным справа – разбиение $\lambda=(4,3,3,3,3,1)$. Отсюда мы видм, что получены одинаковые, с точностью до перестановки, последовательности $(\lambda+\delta)$ и $(\mu+\delta+4\cdot\epsilon_5)$. Заметим, что полученная косая диаграмма λ/μ образует косой крюк длины 4 и высоты 3.
Значит сдвижка $\mu_q+p-q+r,\mu_p+1,\dots,\mu_{q-1}+1$ нужна для того, чтобы не менять разьиение δ (это нам нужно, чтобы затем поделить на a_δ).
Такие разбиения λ - в точности те, для которых λ/μ является крюком B размера r, высота которого $ht(B)=q-p$. Отсюда следует

$$a_{\mu+\delta}p_r = \sum_\lambda (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)}a_{\lambda+\delta}, \tag{0.32}$$

и поделив на a_δ, приходим к исходной формуле.

□

Пример 4. На рисунке изображены все возможные крюки размера 3, которые можно добавить к (63321)

$$s_{63321}p_3 = s_{93321}+s_{66321}-s_{65421}-s_{63333}-s_{633222}+s_{63321111} \tag{0.33}$$

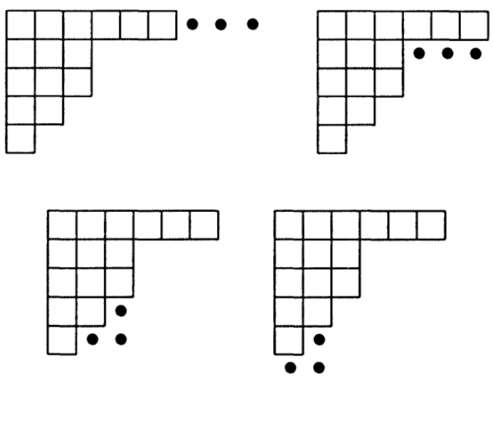


Рис. 6: $\lambda/63321$