План доклада по теме
"Симметрические функции и бозон-фермионное соответствие"
Пространства Фока

1 Фермионное пространство Фока

Def. Пусть $V-$ векторное пространство с выбранным базисом $\{v_m : m \in \mathbb{Z} + 1/2\}$. **Фермионным пространством Фока** (пространством состояний) $\mathcal{F}$ называется $\bigwedge^{\infty/2} V$ – векторное пространство с базисом, состоящим из элементов вида

$$\psi = v_{m_1} \wedge v_{m_2} \wedge v_{m_3} \wedge ... \tag{1}$$

где

$$1)\ m_1 < m_2 < ... \tag{2a}$$

$$2)\ m_{k+1} = m_k + 1 \text{ при } k \gg 0 \tag{2b}$$

Вектор, соответствующий $\mathbf{m} = m_1, m_2, ...$, будем обозначать $|\mathbf{m}\rangle$.

Def. Каждому состоянию $|\mathbf{m}\rangle$ сопоставим диаграмму (которую также будем обозначать $|\mathbf{m}\rangle$), состоящую из черных и белых камней, выстроенных вдоль вещественной оси и занумерованных полуцелыми числами, так что черные камни расположены в числах $\mathbf{m}$. Такие диаграммы называются **диаграммами Майя**.

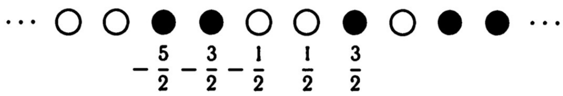

Рис. 1: Диаграмма Майя с зарядом 0 и энергией 7.

Для диаграмм Майя можно определить заряд и энергию:
(**заряд** $|\mathbf{m}\rangle$) = (количество белых камней с положительными номерами)
– (количество черных камней с отрицательными номерами)

(**энергия** $|\mathbf{m}\rangle$) = (сумма положительных номеров белых камней)
– (сумма отрицательных номеров черных камней)

Будем обозначать векторное подпространство $\mathcal{F}$, порожденное базисными векторами с зарядом l как $\mathcal{F}_l$, а его подпространство с энергией k как $\mathcal{F}_l^{(k)}$. Зададим эрмитову форму на $\mathcal{F}$, объявив $\{|\mathbf{m}\rangle\}$ ортонормированным базисом. Тогда имеем ортогональное разложение

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_l \tag{3}$$

$$\mathcal{F}_l = \bigoplus_{k \geq l^2/2} \mathcal{F}_l^{(k)} \tag{4}$$

Note. В пространстве $\mathcal{F}_l$ есть выделенный вектор $|l\rangle \overset{def}{=} |l + 1/2, l + 3/2, ...\rangle$ с наименьшей энергией $l^2/2$. Он называется l - ым вакуумом.

Lemma 1.1. *Диаграммы Майя с нулевым зарядом и энергией k взаимно однозначно соответствуют разбиениям числа k.*

Proof. Диаграмме Майя, для которой

$$-n_1, ..., -n_r - \text{ отрицательные номера черных камней,}$$
$$m_r, ..., m_1 - \text{ положительные номера белых камней,}$$

сопоставим разбиение, соответствующее диаграмме Юнга с координатами Фробениуса

$$\lambda = (m_1, ..., m_r \mid n_1, ..., n_r) \tag{5}$$

□

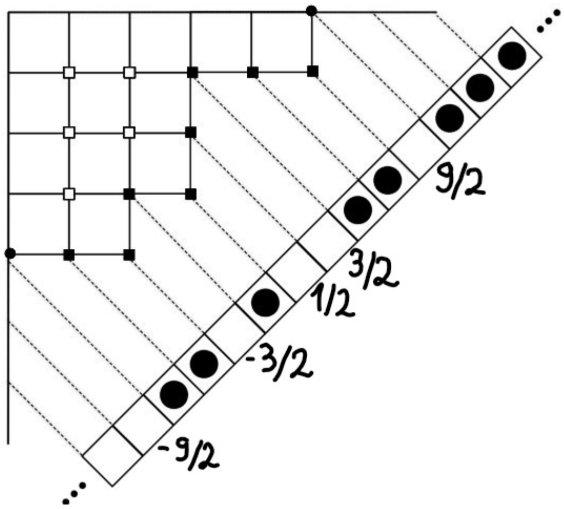

Рис. 2: Соответствие Юнга $(5, 3, 3, 2)$ и диаграммы Майя $|-7/2, -5/2, -1/2, ...\rangle$. На рисунке отмечены номера белых камней.

Состояние, соответствующее разбиению λ, будем обозначать $|\lambda\rangle$.

Note. У диаграммы Майя, соответствующей разбиению

$$\lambda = (k_1, ..., k_r), \tag{6}$$

белые камни имеют номера

$$k_1 - 1/2, \;\; k_2 - 3/2, \;\; ..., \;\; k_r - r + 1/2, \;\; -r - 1/2, \;\; -r - 3/2, \;\; -r - 5/2, \;\; ... \tag{7}$$

Corollary. Размерность пространства состояний с зарядом l и энергией k

$$dim \mathcal{F}_l^{(k)} = p(k) \tag{8}$$

2 Фермионы и бозоны

Def. Алгеброй клиффорда $\mathcal{A}$ называется алгебра с единицей с порождающими $\{\psi_n, \psi_n^* : n \in \mathbb{Z} + 1/2\}$, в которой выполнены канонические антикоммутационные соотношения:

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = 0, \quad [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0 \quad \text{и} \quad [\psi_m^*, \psi_n]_+ = \delta_{m,-n} \tag{9}$$

где $[x, y]_+ = xy + yx$

Элементы ψ_n, ψ_n^* называются **фермионами**.
Фермионы $\{\psi_n, \psi_n^*\}$ для $n < 0$ называются **операторами рождения**

Фермионы $\{\psi_n, \psi_n^*\}$ для $n > 0$ называются **операторами уничтожения**
Определим представление $\mathcal{A}$ в $\mathcal{F}$:

$$\psi_n^* \, v_{m_1} \wedge v_{m_2} \wedge ... = v_n \wedge v_{m_1} \wedge v_{m_2} \wedge ... \tag{10}$$

ψ_n- эрмитово сопряженный к ψ_{-n}^* относительно введенной формы.

В терминах диаграмм Майя:

$$\psi_n \left|\mathbf{m}\right\rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1} \left|..., m_{i-1}, m_{i+1}, ...\right\rangle \text{ если } m_i = -n \text{ для некоторого номера } i \\ 0 \text{ иначе} \end{cases} \tag{11a}$$

$$\psi_n^* \left|\mathbf{m}\right\rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1} \left|..., m_{i-1}, n, m_i, ...\right\rangle \text{ если } m_{i-1} < n < m_i \text{ для некоторого номера } i \\ 0 \text{ иначе} \end{cases} \tag{11b}$$

Note.

1) Любой оператор уничтожения обнуляет $\left|0\right\rangle$

2) $\mathcal{F}$ порождается вакуумным вектором. Действительно, в обозначениях (5) из (11) получаем

$$\psi_{-m_1} ... \psi_{-m_r} \psi_{-n_1}^* ... \psi_{-n_s}^* \left|0\right\rangle = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{r} m_i + rs - r^2/2} \left|\lambda\right\rangle \tag{12}$$

Заряд и энергию можно определить также для фермионов. Для $a \in \mathcal{A}$ положим

$$\text{заряд (энергия) } a = \text{заряд (энергия) } a\left|0\right\rangle \tag{13}$$

Например, для операторов ψ_n, ψ_n^*:

$$\begin{array}{ccc} \text{фермион} & \psi_n & \psi_n^* \\ \text{заряд} & 1 & -1 \\ \text{энергия} & -n & -n \end{array} \tag{14}$$

Def. Алгеброй Гейзенберга $\mathcal{B}$ называется алгебра с единицей с порождающими $\{a_n^*, a_n : n \in \mathbb{N}\}$ и каноноческими коммутационными соотношениями

$$[a_m, a_n] = 0, \qquad [a_m^*, a_n^*] = 0, \qquad [a_m, a_n^*] = \delta_{m,n} \tag{15}$$

где $[x, y] = xy - yx$

Элементы a_n и a_n^* называются бозонами.
Легко видеть, что отображение

$$a_n \mapsto \frac{\partial}{\partial p_n}, \qquad a_n^* \mapsto p_n \tag{16}$$

задает представление алгебры Гейзенберга $\mathcal{B}$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[p_1, p_2, ...]$.
Элементы $\frac{\partial}{\partial p_n}$ называются **операторами уничтожения**, а p_n- **операторами рождения**.
Элемент $1 \in \mathbb{C}[p_1, p_2, ...]$ называется **вакуумным вектором**.

Note.

1) Любой оператор уничтожения обнуляет вакуумный вектор.

2) $\mathbb{C}[p_1, p_2, ...]$ порождается этим вектором.

Сравним бозоны и фермионы на примере случая с двумя образующими a, a^* и ψ, ψ.

Свойства и различия между бозонами и фермионами

	Алгебра Гейзенберга $\mathcal{B}$	Алгебра Клиффорда $\mathcal{A}$
образующие	Бозоны a, a^*	Фермионы ψ, ψ^*
соотношения	$aa^* - a^*a = 1$	$\psi\psi^* + \psi^*\psi = 1, \psi^2 = \psi^{*2} = 0$
базис	$a^m a^{*n}$ для $m, n = 0, 1, 2, ...$	$1, \psi, \psi^*, \psi\psi^*$

Примеры:
Алгебра Клиффорда $\mathcal{A}$, порожденная конечным числом фермионов, всегда конечномерна. Фермионы можно представить в двумерном пространстве:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Напротив, алгебра Гейзенберга $\mathcal{B}$ бесконечномерна даже в случае двух образующих. Бозоны не могут быть представлены никакой матрицей конечного размера: если A, A^* - матрицы $n \times n$ и $AA^* - A^*A = 1$, то $0 = tr(AA^* - A^*A) = tr(1) = n$.

3 Построение бозонов из фермионов

Def. Вакуумным средним элемента $a \in \mathcal{A}$ называется число $\langle a \rangle = \langle 0 | a | 0 \rangle$.

Легко проверить следующие свойствах вакуумных средних:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= 1, & \langle \psi_n \rangle &= 0, & \langle \psi_n^* \rangle &= 0, \\ \langle \psi_m \psi_n \rangle &= 0, & \langle \psi_m^*, \psi_n^* \rangle &= 0, & \langle \psi_m \psi_n^* \rangle &= \delta_{m,n}\theta(n < 0) \end{aligned} \tag{18}$$

В последнем выражении θ - функция Хевисайда.

Def. Фермионными производящими функциями называются формальные ряды

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n z^{-n-1/2} \tag{19}$$

$$\psi^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n^* z^{-n-1/2} \tag{20}$$

Пример:
Вычислим вакуумное среднее фермионных производящих функций

$$\langle \psi(z)\psi^*(w) \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}+1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \langle \psi_m \psi_n^* \rangle z^{-m-1/2} w^{-n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} w^n = \frac{1}{z-w} \tag{21}$$

Правую часть равенства следует понимать как разложение в ряд по малому параметру w/z.

Def. Определим операторы $H_n, n \in \mathbb{Z}$:

$$H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}+1/2} :\psi_{-j}\psi_{j+n}^*: \tag{22}$$

где : : - нормальное упорядочение:

$$: \psi_m \psi_n^* : = \begin{cases} \psi_m \psi_n^* \text{ если } m < 0 \text{ или } n > 0 \\ -\psi_n^* \psi_m \text{ если } m > 0 \text{ или } n < 0 \end{cases} \tag{23}$$

т. е.

$$: \psi_m \psi_n^* : = \psi_m \psi_n^* - \langle \psi_m \psi_n^* \rangle \tag{24}$$

Note. Так как любой элемент $|u\rangle$ пространства Фока получается последовательным применением фермионных операторов к вакуумному вектору $|0\rangle$, то $: \psi_{-j} \psi_{j+n}^* : |u\rangle = 0$ для всех значений индекса j, кроме конечного числа.

В терминах диаграмм Майя действие H_{+-n} для $n > 0$ выглядит следующим образом:

$$H_n |m_1, m_2, ...\rangle = \sum (-1)^{i-j} |m_1, ..., m_{j-1}, m_{j+1}, ..., m_{i-1}, m_j + n, m_i, ...\rangle \tag{25}$$

где сумма берется по таким j, что $m_{i-1} < m_j + n < m_i$ для некоторого i.

$$H_{-n} |m_1, m_2, ...\rangle = \sum (-1)^{j-i} |m_1, ..., m_i, m_j - n, m_{i+1}, ..., m_{j-1}, m_{j+1}, ...\rangle \tag{26}$$

где сумма берется по таким j, что $m_i < m_j - n < m_{i+1}$ для некоторого i.
Легко видеть, как переписывается последняя формула в терминах диаграмм Юнга:

$$H_{-n} |\mu\rangle = \sum (-1)^{ht(\lambda-\mu)^t+1} |\lambda\rangle \tag{27}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\lambda \supset \mu$, таким, что $\lambda - \mu$ есть косой n − крюк. Высота $ht(\theta)$ косого крюка θ определяется как уменьшенное на 1 количество строк, которое он занимает.
Учитывая, что $ht(\theta^t) + ht(\theta) + |\theta| \equiv 1 \; mod \; 2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$(-1)^n H_{-n} |\mu\rangle = \sum (-1)^{ht(\lambda-\mu)} |\lambda\rangle \tag{28}$$

или

$$H_{-n} |\mu\rangle (-1)^{|\mu|} = \sum (-1)^{ht(\lambda-\mu)} |\lambda\rangle (-1)^{|\lambda|} \tag{29}$$

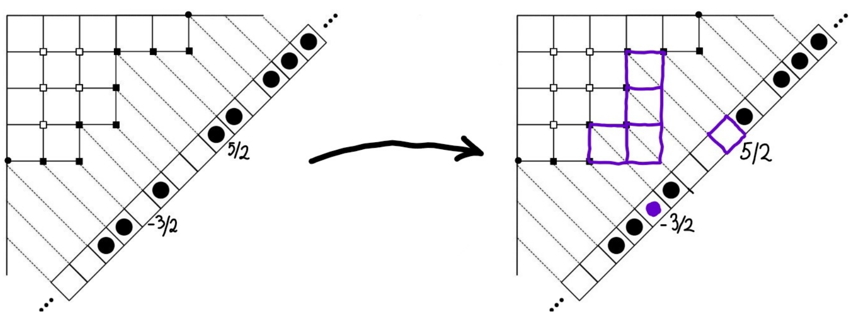

Рис. 3: Действие оператора $\psi_{-5/2}\psi^*_{-3/2}$ на диаграмму Юнга (5, 3, 3, 2).

Lemma 3.1.

$$[H_m, H_n] = m\delta_{m,-n} \tag{30}$$

Proof. Для начала вычислим коммутационные соотношения между H_n и фермионными операторами:

$$[H_n, \psi_m] = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} [:\psi_{-j}\psi^*_{j+n}:, \psi_m] = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} [\psi_{-j}\psi^*_{j+n}, \psi_m] =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-j}[\psi^*_{j+n}, \psi_m]_+ - [\psi_{-j}, \psi_m]_+\psi^*_{j+n} = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-j}\delta_{j+n,-m}$$

Таким образом,

$$[H_n, \psi_m] = \psi_{m+n} \tag{31}$$

Аналогично,

$$[H_n, \psi^*_m] = -\psi^*_{m+n} \tag{32}$$

Используя полученные соотношения, найдем коммутаторы между H_n:

$$[H_m, H_n] = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} [H_m, \psi_{-j}\psi^*_{j+n}] = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-j}[H_m, \psi^*_{j+n}] + [H_m, \psi_{-j}]\psi^*_{j+n} =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -\psi_{-j}\psi^*_{m+j+n} + \psi_{m-j}\psi^*_{j+n}$$

Если $m + n \neq 0$, то

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -\psi_{-j}\psi^*_{m+j+n} + \psi_{m-j}\psi^*_{j+n} = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -\psi_{-j}\psi^*_{m+j+n} + \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{m-j}\psi^*_{j+n} = 0$$

Если $m + n = 0$, то

$$[H_m, H_n] = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -\psi_{-j}\psi^*_j + \psi_{m-j}\psi^*_{j-m} =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -:\psi_{-j}\psi^*_j: + :\psi_{m-j}\psi^*_{j-m}: - \langle\psi_{-j}\psi^*_j\rangle + \langle\psi_{m-j}\psi_{j-m}\rangle =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -:\psi_{-j}\psi^*_j: + \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} :\psi_{m-j}\psi^*_{j-m}: + \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} -\theta(j<0) + \theta(j<m) = m$$

□

Corollary. Отображение

$$a_n \mapsto \frac{1}{n}H_n, \qquad a^*_n \mapsto H_{-n} \tag{33}$$

задает представление алгебры Гейзенберга $\mathcal{B}$ в фермионном пространстве Фока $\mathcal{F}$.

Note. H_0 - единственный из операторов $\{H_n\}$, который коммутирует со всеми остальными H_n. H_0 измеряет заряд:

$$|u\rangle \in \mathcal{F} \text{ имеет заряд, равный } l \iff H_0\,|u\rangle = l\,|u\rangle \tag{34}$$

Чтобы доказать это, заметим, что $H_0\,|0\rangle = 0$, а также, пользуясь коммутационными соотношениями (31) и (32), для $0 < m_r < ... < m_1,\ 0 < n_s ... < n_1$ вычислим действие H_0 на следующий вектор:

$$H_0\psi_{-m_1}...\psi_{-m_r}\psi^*_{-n_1}...\psi^*_{-n_s}\,|0\rangle =$$

$$\psi_{-m_1}H_0\psi_{-m_2}...\psi_{-m_r}\psi^*_{-n_1}...\psi^*_{-n_s}\,|0\rangle \;+\; \psi_{-m_1}...\psi_{-m_r}\psi^*_{-n_1}...\psi^*_{-n_s}\,|0\rangle \;=\; ... \;=$$

$$(r-s)\psi_{-m_1}...\psi_{-m_r}\psi^*_{-n_1}...\psi^*_{-n_s}\,|0\rangle \;+\; \psi_{-m_1}...\psi_{-m_r}\psi^*_{-n_1}...\psi^*_{-n_s}H_0\,|0\rangle =$$

$$(r-s)\psi_{-m_1}...\psi_{-m_r}\psi^*_{-n_1}...\psi^*_{-n_s}\,|0\rangle$$

Note. $[H_m, H_n]$ можно вычислить другим способом:

Нетрудно проверить, что $[H_m, H_n]$ коммутирует со всеми фермионами, к тому же $([H_m, H_n] - m\delta_{m+n,0})\,|0\rangle = 0$. Так как представление неприводимо, из этого следует, что $[H_m, H_n]$– скалярный, с коэффициентом $m\delta_{m+n,0}$.

4 Изоморфизм пространств Фока

Def. Бозонным пространством Фока $\mathcal{H}_B$ называется пространство многочленов:

$$\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} z^l \mathbb{C}[p_1, p_2, ...] = \mathbb{C}[z, z^{-1}, p_1, p_2, ...] \tag{35}$$

На каждом прямом слагаемом заведем взвешенную градуировку, так что $z^l p_n$ принадлежит компоненте градуировки $l^2/2 + n$.
Кроме того, определим

$$H(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n} H_n \tag{36}$$

Note. Из (36) и (25) следует, что для каждого l:

$$H(p)\,|l\rangle = 0 \tag{37}$$

Зададим отображение

$$\Phi(|u\rangle) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} z^l \,\langle l|\, e^{H(p)}\,|u\rangle \tag{38}$$

Note. Если элемент $|u\rangle$ имеет определенный заряд m, то из бесконечной суммы по l в правой части остается единственное слагаемое $l = m$ (достаточно заметить, что $H(p)$ инвариантно действует на каждом $\mathcal{F}_l$, и воспользоваться ортогональнсотью $\mathcal{F}_l$ для разных l).

Theorem 4.1. *(Изоморфизм пространств Фока) Соответствие*

$$\begin{aligned} \Phi:\ \ &\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}_B \\ &|u\rangle \mapsto \Phi(|u\rangle) \end{aligned} \tag{39}$$

является изоморфизмом, сохраняющим градуировку, притом

$$\Phi(H_n\,|u\rangle) = \begin{cases} n\frac{\partial}{\partial p_n}\Phi(|u\rangle) \ \textit{если}\ n > 0 \\ p_{-n}\Phi(|u\rangle) \ \textit{если}\ n < 0 \end{cases} \tag{40}$$

Proof. Так как все H_n при $n > 0$ коммутируют между собой, справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial p_n}\,\langle l|\, e^{H(p)}\,|u\rangle = \langle l|\, \frac{\partial}{\partial p_n} e^{H(p)}\,|u\rangle = \langle l|\, e^{H(p)} \frac{1}{n} H_n\,|u\rangle\,, \tag{41}$$

что доказывает первую строчку (40).
Учитывая, что при $n > 0$ $[H(p), H_{-n}] = [H_n \frac{p_n}{n}, H_{-n}] = p_n$, находим:

$$e^{H(p)} H_{-n} e^{-H(p)} = H_{-n} + [H(p), H_{-n}] + \frac{1}{2!}[H(p), [H(p), H_{-n}]] + ... = H_{-n} + p_n \tag{42}$$

Поэтому, используя $\langle l|\, H_{-n} = 0$, получаем:

$$\langle l|\, e^{H(p)} H_{-n}\,|u\rangle = \langle l|\, e^{H(p)} H_{-n} e^{-H(p)} e^{H(p)}\,|u\rangle = \langle l|\,(H_{-n} + p_n) e^{H(p)}\,|u\rangle = p_n\,\langle l|\, e^{H(p)}\,|u\rangle\,, \tag{43}$$

что доказывает вторую строчку (40).

Рассмотрим оператор

$$
\begin{aligned}
\phi_l: \quad z^l\mathbb{C}[p_1,p_2,...] &\longrightarrow \mathcal{F}_l \\
z^l f(p_1,p_2,...) &\mapsto f(H_{-1},H_{-2},...)\,|l\rangle
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Так как ϕ_l - сплетающий ненулевой оператор, и представление алгебры Гейзенберга в пространстве многочленов неприводимо (любой многочлен дифференцированиями можно перевести в константу, а 1 порождает все пространство), то ϕ_l инъективен. С другой стороны, для каждого $k>0$ векторы $H_{-k_1}H_{-k_2}...H_{-k_r}\,|l\rangle$, соответствующие разбиениям k, имеют энергию на k больше, чем $|l\rangle$, линейно независимы (из инъективности ϕ_l), и их количество равно $p(k) = dim\mathcal{F}_l^{(k)}$, поэтому они образуют базис $\mathcal{F}_l^{(k)}$. Таким образом, ϕ_l – изоморфизм при каждом l, притом $\Phi|_{\mathcal{F}_l} = \phi_l^{-1}$, а значит Φ - изоморфизм. $\square$

Чтобы понять, каким многочленам при этом изоморфизме соответствуют векторы $|\lambda\rangle$, для $n>0$, рассмотрим оператор

$$A:\mathbb{C}[p_1,p_2,...] \longrightarrow \mathbb{C}[p_1,p_2,...] \tag{45}$$

$$s_\mu \mapsto \Phi((-1)^{|\mu|}\,|\mu\rangle) \tag{46}$$

Заметим, что действие H_{-n} в базисе $\{(-1)^{|\mu|}\,|\mu\rangle\}$ (29) совпадает с действием p_n на s_λ:

$$p_n s_\mu = \sum (-1)^{ht(\lambda-\mu)} s_\lambda \tag{47}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\lambda \supset \mu$, таким, что $\lambda-\mu$ есть косой $n-$ крюк.
Следовательно, A коммутирует с p_n:
$Ap_ns_\mu = A\sum(-1)^{ht(\lambda-\mu)}s_\lambda = \sum(-1)^{ht(\lambda-\mu)}\Phi((-1)^{|\lambda|}\,|\lambda\rangle) = \Phi(H_{-n}\,|\mu\rangle) = p_n\Phi(|\mu\rangle) = p_nAs_\mu$
Так как $A1 = 1$, это значит, что A тождественный, поэтому $|\mu\rangle$ при изоморфизме соответствует $(-1)^{|\mu|}s_\mu$.