Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах

Содержание

1 Координатный анзац Бете

1.1 Анзац Бете в модели Гейзенберга

1.1.1 Обозначения и терминология

Матрицы Паули. Матрицы Паули – это 2×2 матрицы следующего вида:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Они образуют удобный базис в пространстве эрмитовых 2×2 матриц с нулевым следом. Для них используются также обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а единичная матрица иногда обозначается как σ_0. Часто пишут просто 1 вместо единичной матрицы. Основные свойства матриц Паули таковы:

1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$,

2) $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$,

3) $\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j$ при $j \neq k$.

Матрицы Паули удобно объединить в 3-вектор с матричными компонентами: $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Ниже под $\vec{\sigma}$ будем иметь в виду совокупность всех трех матриц Паули. Часто используются также матрицы

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$, $[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$ и $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$.

В $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ справедливо равенство

$$\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z = 2\mathsf{P}_{12}, \tag{1.1}$$

где P_{12} – оператор перестановки тензорных сомножителей. На векторы он действует так: если u, v – любые два вектора из $\mathbb{C}^2$, то $\mathsf{P}_{12}\,(u \otimes v) = v \otimes u$. Эквивалентным образом, если X, Y – любые операторы из $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^2)$, то $\mathsf{P}_{12}\, X \otimes Y = Y \otimes X\, \mathsf{P}_{12}$. Если ввести обозначения $\vec{\sigma}^{(1)} = \vec{\sigma} \otimes 1$, $\vec{\sigma}^{(2)} = 1 \otimes \vec{\sigma}$, тождество (1.1) можно записать также в виде

$$\mathsf{P}_{12} = \frac{1}{2}\,(\mathsf{I} + \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}) \tag{1.2}$$

(здесь $\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$ понимается как скалярное произведение “векторов” $\vec{\sigma}^{(1)}$ и $\vec{\sigma}^{(2)}$, т.е. сумма произведений одноименных компонент, а I – единичная матрица 4×4).

Другой удобный базис в пространстве матриц размера 2×2 образуют “матричные единицы” e_{ab} $(a, b = 1, 2)$. Матричный элемент матрицы e_{ab} в месте (ab) равен 1, а остальные равны 0. Оператор перестановки выражается через них следующим образом:

$$\mathsf{P}_{12} = \sum_{a,b=1}^{2} e_{ab}^{(1)} e_{ba}^{(2)}.$$

В случае, когда тензорных сомножителей больше, чем два, удобно ввести операторы $\vec{\sigma}^{(j)} \in \mathrm{End}\,(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ раз}})$ по правилу

$$\vec{\sigma}^{(j)} = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{j-1} \otimes \vec{\sigma} \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{N-j},$$

и аналогично для $e_{ab}^{(j)}$. Очевидно, если номера j и k различны, компоненты операторного вектора $\vec{\sigma}^{(j)}$ коммутируют с компонентами $\vec{\sigma}^{(k)}$, поскольку нетривиально действуют в разных пространствах.

Пространство состояний. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ раз}}.$$

Будем называть его *пространством состояний.* (Состояние – это любой вектор из $\mathcal{H}$. Если два вектора отличаются умножением на комплексное число, они задают одно и то же состояние.)

В квантовой механике это пространство состояний системы из N неподвижных атомов, обладающих магнитными моментами, которые мы для краткости будем называть *спинами.* (Остальные степени свободы, которыми может обладать атом, в этой упрощенной картине не учитываются.) Пространство состояний каждого спина двумерно (спин $\frac{1}{2}$).

Выберем базис в $\mathbb{C}^2$ следующим образом:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В состоянии $|+\rangle$ z-проекция спина равна $+1$ (стрелка вверх). Аналогично, в состоянии $|-\rangle$ z-проекция спина равна -1 (стрелка вниз). Для краткости мы будем говорить, что в первом случае спин направлен вверх, а во втором вниз. Все остальные квантовомеханические состояния, в которых может находиться спин, являются линейными комбинацией этих двух с комплексными коэффициентами. В таких состояниях проекция спина на ось z, вообще говоря, не имеет определенного значения. Матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – это операторы проекций спина на оси x, y, z (более точно, в физике оператором спина $1/2$ называется не $\vec{\sigma}$, а $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$, при этом возможные значения проекций спина равны $\pm\frac{1}{2}$). Поскольку они не коммутируют, определенное значение ($+1$ или -1) может иметь проекция спина только на одну какую-то ось. Мы, очевидно, имеем: $\sigma_z\,|+\rangle = |+\rangle$, $\sigma_z\,|-\rangle = -\,|-\rangle$, $\sigma_+\,|+\rangle = \sigma_-\,|-\rangle = 0$, $\sigma_+\,|-\rangle = |+\rangle$, $\sigma_-\,|+\rangle = |-\rangle$.

Базисные векторы в $\mathcal{H}$ естественно выбрать в виде тензорных произведений базисных векторов в каждом тензорном сомножителе. Например:

$$|+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |-\rangle \otimes \ \ldots\ \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle\,,$$

что мы будем также записывать как

$$|+\rangle_1\,|+\rangle_2\,|-\rangle_3\,|+\rangle_4\,|-\rangle_5\,|-\rangle_6\ \ldots\ |-\rangle_{N-1}\,|+\rangle_N$$

или просто $|++-+-- \ \dots \ -+\rangle$. Это состояние, в котором первый спин имеет z-проекцию $+1$, второй $+1$, третий -1 и т.д. Всего таких векторов будет 2^N, т.е. $\dim\mathcal{H} = 2^N$.

Отметим, что в базисе $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$ оператор перестановки P_{12} выглядит так:

$$\mathsf{P}_{12} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Наконец, введем в $\mathcal{H}$ скалярное произведение (с его помощью выражаются физические величины, такие, как корреляционные функции). Для этого в каждом пространстве $\mathbb{C}^2$ зададим скалярное произведение естественной формулой $\langle\epsilon|\,\epsilon'\rangle = \delta_{\epsilon,\epsilon'}$, где $\epsilon, \epsilon' = \pm$ и продолжим его на их тензорное произведение по правилу

$$\langle\epsilon_1\epsilon_2\dots\epsilon_n|\,\epsilon_1'\epsilon_2'\dots\epsilon_n'\rangle = \prod_{i=1}^{N}\delta_{\epsilon_i,\epsilon_i'}\,.$$

Остановимся на этом более подробно. Дуальные векторы (векторы-строки или ковекторы) имеют вид $\langle+| = (1,0)$, $\langle-| = (0,1)$. Скалярное произведение векторов $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ записывается в виде $(|\Phi\rangle\,, |\Psi\rangle) = \langle\Phi|\,\Psi\rangle$. Для произвольного оператора $\mathbf{O}$ имеем $\langle\Phi|\,\mathbf{O}\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,\mathbf{O}^\dagger\,|\Phi\rangle$, где $\mathbf{O}^\dagger$ – сопряженный (транспонированный) оператор. Оператор $\mathbf{O}$ действует на дуальные вектора (налево) по правилу $\langle\Phi|\,\mathbf{O} = \Big(\mathbf{O}^\dagger\,|\Phi\rangle\Big)^\dagger$ для любого вектора $|\Phi\rangle$ (отметим, что в наших обозначениях $(|\Phi\rangle)^\dagger = \langle\Phi|$). Например, $\langle+|\,\sigma_+ = \langle-|$, $\langle-|\,\sigma_- = \langle+|$, $\langle+|\,\sigma_- = \langle-|\,\sigma_+ = 0$.

Оператор полного спина и разбиение пространства состояний на сектора. Оператор

$$\vec{S} = \sum_{j=1}^{N}\vec{\sigma}^{(j)}$$

по понятной причине называется оператором полного спина системы атомов. По аналогии можно ввести также $S_\pm = \frac{1}{2}(S_x \pm iS_y)$. Коммутационные соотношения для этих операторов, очевидно, такие же, как для матриц Паули, т.е. $[S_z, S_\pm] = \pm 2S_\pm$, $[S_+, S_-] = S_z$, но S_x^2, S_y^2, S_z^2, конечно, уже не равны единичным операторам, как и $S_\pm^2 \neq 0$.

Легко видеть, что все базисные векторы в $\mathcal{H}$, в которых m спинов смотрят вниз, а остальные $N-m$ вверх (независимо от порядка их расположения), являются собственными для оператора S_z с собственным значением $N-2m$. В соответствии с этим пространство $\mathcal{H}$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{H}(m)$ при $m = 0, 1, 2, \dots, N$, на которых z-проекция полного спина равна $N-2m$:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{N}\mathbb{C}^2 = \bigoplus_{m=0}^{N}\mathcal{H}(m). \tag{1.3}$$

Легко найти, что

$$\dim\mathcal{H}(m) = \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array}\right) = \frac{N!}{m!(N-m)!}.$$

В частности, $\mathcal{H}(0)$ и $\mathcal{H}(N)$ – одномерные пространства, порождаемые, соответственно, состоянием, в котором все спины смотрят вверх (вниз). О разложении (1.3) говорят как о разбиении полного пространства состояний на сектора с фиксированной проекцией полного спина.

Отметим, что операторы $\sigma_z^{(j)}$ переводят каждое из подпространств $\mathcal{H}(m)$ в себя, а операторы $\sigma_\pm^{(j)}$ действуют так: $\sigma_\pm^{(j)} : \mathcal{H}(m) \to \mathcal{H}(m \mp 1)$.

1.1.2 Изотропный магнетик Гейзенберга (XXX-модель)

Основная задача состоит в диагонализации следующего оператора из $\mathrm{End}(\mathcal{H})$:

$$H(J_x, J_y, J_z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (J_x \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + J_y \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)} + J_z \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)}) , \quad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}, \tag{1.4}$$

который можно понимать как $2^N \times 2^N$-матрицу специального вида. Физический интерес представляет нахождение его собственных чисел и собственных векторов в пределе $N \to \infty$ (так называемом термодинамическом пределе).

Данный оператор служит квантовомеханической моделью цепочки одинаковых атомов, обладающих магнитными моментами (спинами). Каждый спин приписан к своему узлу (атому) в цепочке. Отождествление $\vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$ означает наложение периодических граничных условий (замкнутая цепочка). Взаимодействуют между собой только ближайшие соседи. Сила взаимодействия характеризуется константами J_x, J_y, J_z.

Эта модель была предложена (в частном случае $J_x = J_y = J_z$) одним из создателей квантовой механики В.Гейзенбергом в 20-х годах 20-го века. Оператор $H(J_x, J_y, J_z)$ называется *гамильтонианом* модели. Его собственные числа (спектр) – это возможные значения энергии, которой может обладать данная система спинов.

Случай, когда только одна из констант отлична от 0 (например, $J_x = J_y = 0$, $J_z \neq 0$) легко сводится к одномерной модели Изинга, которая может быть полностью решена элементарными методами. Случай, когда две константы из трех отличны от 0, также эквивалентен модели Изинга, но двумерной, полное решение которой уже нетривиально.

В теории интегрируемых систем принята следующая терминология. Если модель анизотропна (т.е. $J_x \neq J_y \neq J_z$), она называется XYZ-магнетиком, если $J_x = J_y \neq J_z$ – XXZ-магнетиком, и, наконец, если взаимодействие одинаково для всех трех направлений, т.е. $J_x = J_y = J_z$, – XXX-магнетиком (или, соответственно, XYZ-, XXZ-, XXX-моделью). Мы будем в основном заниматься XXX-моделью.

С чисто алгебраической точки зрения константы J_x, J_y, J_z могут быть любыми числами, в том числе комплексными. Важное физическое требование состоит, однако, в том, чтобы оператор $H(J_x, J_y, J_z)$ был эрмитовым, а его собственные значения тем самым были бы вещественными. Тогда константы J_x, J_y, J_z должны быть вещественными. Их знаки опять-таки не важны для алгебраических методов, но физические свойства модели могут существенно зависеть от того, положительны они или отрицательны. В следующей задаче предлагается показать, что при некоторых различных выборах знаков получаются унитарно эквивалентные операторы, что позволяет без потери общности ограничиться анализом случаев, в которых константы либо все отрицательны (ферромагнетик), либо все положительны (антиферромагнетик).

Задача. Пусть число узлов N четно. Показать, что

$$H(J_x, J_y, -J_z) = -\mathcal{U}_z H(J_x, J_y, J_z)(\mathcal{U}_z)^{-1},$$

где $\mathcal{U}_z = \sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(6)}\ldots\sigma_z^{(N)}$. Сформулировать и доказать аналогичные свойства для x- и y-направлений.

Задача. Найти спектр гамильтониана XYZ-модели Гейзенберга для $N = 2$:

$$H = J_x\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + J_y\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)} + J_z\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}.$$

Отдельно рассмотреть случай изотропной XXX-модели ($J_x = J_y = J_z = J$).

Ниже мы подробно рассмотрим XXX-модель. Метод нахождения собственных векторов и спектра гамильтониана для нее был предложен в 1931 г. Гансом Бете (анзац Бете). Роль этого метода в теории интегрируемых систем выходит далеко за рамки конкретной модели.

Гамильтониан XXX-магнетика Гейзенберга возьмем в виде

$$\boxed{H^{\mathrm{xxx}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\right).}$$

По сравнению с (1.4) добавлен последний член, пропорциональный тождественному оператору. Это просто сдвигает спектр как целое на константу. Общий множитель выбран равным $-\frac{1}{2}$ (знак соответствует ферромагнитному случаю), но при необходимости множитель J может быть восстановлен заменой $H^{\mathrm{xxx}} \to H^{\mathrm{xxx}}/J$. Данный оператор можно представить в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{xxx}} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(2\sigma_+^{(k)}\sigma_-^{(k+1)} + 2\sigma_-^{(k)}\sigma_+^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1\right) \qquad (1.5) \\
&= -\sum_{k=1}^{N}\mathsf{P}_{k,k+1} + N.
\end{aligned}$$

В последней строчке $\mathsf{P}_{k,k+1}$ – это оператор, переставляющий k-й и $k+1$-й множители в тензорном произведении (аналогично оператору (1.2)), причем $\mathsf{P}_{N,N+1} \equiv \mathsf{P}_{N,1}$.

Задача. Доказать, что все собственные значения оператора H^{xxx} неотрицательны. (Указание: использовать тождество $\frac{1}{4}(\mathsf{I} - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2 = \mathsf{I} - \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$.)

1.1.3 Построение собственных векторов в XXX-модели

Два собственных вектора оператора H^{xxx} найти очень легко. Из представления гамильтониана XXX-модели в виде $H^{\mathrm{xxx}} = -\sum\limits_{k=1}^{N}\mathsf{P}_{k,k+1} + N$ (последняя строчка в

(1.5)) сразу следует, что векторы $|\Omega\rangle := |+ + + + \ldots +\rangle\,,\quad \left|\bar{\Omega}\right\rangle := |- - - - \ldots -\rangle$ являются для него собственными с собственным значением 0:

$$H^{\text{xxx}}\,|\Omega\rangle = H^{\text{xxx}}\left|\bar{\Omega}\right\rangle = 0.$$

Дальнейшая процедура предполагает, что мы выберем какой-нибудь один из них, например, $|\Omega\rangle$ (все спины вверх), а про существование второго на долгое время забудем. Физики называют вектор $|\Omega\rangle$ *вакуумом* (часто голым или ложным), и построение остальных собственных состояний гамильтониана интерпретируют как рождение в вакууме каких-то "возбуждений" или "квазичастиц".

Важное замечание, позволяющее упростить процедуру нахождения остальных собственных векторов, состоит в том, что гамильтониан изотропной модели Гейзенберга коммутирует с оператором z-проекции полного спина:

$$[H^{\text{xxx}},\, S_z] = 0 \tag{1.6}$$

(это верно и для XXZ-модели, но не верно для XYZ). Опять-таки это легче всего проверить, пользуясь представлением гамильтониана в виде суммы операторов перестановки. Более того, в XXX-модели в силу равноправия всех трех направлений верно также, что

$$[H^{\text{xxx}},\, \vec{S}] = 0 \tag{1.7}$$

(это уже не так для XXZ). Следствия этой глобальной $SU(2)$-инвариантности мы обсудим позднее, а пока нам нужна будет только инвариантность относительно картановской подгруппы $U(1)$, выражаемая соотношением (1.6). Из него следует, что операторы H^{xxx} и S_z имеют общие собственные вектора. А это значит, что собственные векторы H^{xxx} всегда имеют определенную z-проекцию спина, т.е. их можно искать отдельно в каждом секторе $\mathcal{H}(m)$ разложения (1.3). Мы уже видели это на простейшем примере: $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}(0)$.

Выше было отмечено, что спектр оператора H^{xxx} неотрицателен. Отсюда и из результата следующей ниже задачи заключаем, что основное состояние имеет $E = 0$ и как минимум N-кратно вырождено.

Задача. Показать, что $H^{\text{xxx}}\,|\Omega_m\rangle = 0$, $S_z\,|\Omega_m\rangle = (N-2m)\,|\Omega_m\rangle$, где $|\Omega_m\rangle = S_-^m\,|\Omega\rangle$. Как устроены векторы $|\Omega_m\rangle$?

Обратим внимание на то, что кроме проекций полного спина имеется еще один оператор, коммутирующий с гамильтонианом, – это оператор e^{iP} сдвига на узел, действующий на базисные векторы сдвигом на один шаг решетки:

$$e^{iP}\,|\epsilon_1\rangle_1\,|\epsilon_2\rangle_2\,|\epsilon_3\rangle_3\,|\epsilon_4\rangle_4\,\ldots\,|\epsilon_{n-1}\rangle_{N-1}\,|\epsilon_n\rangle_N = |\epsilon_2\rangle_1\,|\epsilon_3\rangle_2\,|\epsilon_4\rangle_3\,|\epsilon_5\rangle_4\,\ldots\,|\epsilon_N\rangle_{N-1}\,|\epsilon_1\rangle_N\,,$$

где $\epsilon_i = \pm$. С операторами $\vec{\sigma}^{(j)}$ он коммутирует по правилу $e^{iP}\,\vec{\sigma}^{(j+1)} = \vec{\sigma}^{(j)}e^{iP}$. Очевидно, оператор сдвига коммутирует с операторами проекций полного спина. Собственное значение оператора P физики называют квазиимпульсом. В дальнейшем мы для простоты будем называть его просто импульсом.

Итак, мы будем искать общие собственные состояния операторов H^{xxx}, e^{iP} и S_z. Другими словами, будем искать стационарные состояния системы спинов с определенными значениями импульса и z-проекции полного спина.

Один перевернутый спин. Следующий по сложности (хотя тоже очень простой) случай – N-мерное подпространство $\mathcal{H}(1) \subset \mathcal{H}$ (один перевернутый спин), в котором должно быть N собственных векторов. Базисные векторы $\mathcal{H}(1)$ получаются действием операторов $\sigma_-^{(j)}$ на вектор $|\Omega\rangle$. Будем искать собственные векторы оператора $H^{\rm xxx}$ в виде

$$|\Psi^{(1)}\rangle = \sum_{k=1}^{N} a(k)\, \sigma_-^{(k)}\, |\Omega\rangle\,,$$

где $a(k)$ – неизвестные пока коэффициенты, удовлетворяющие условию периодичности $a(k+N) = a(k)$. Физики называют $a(k)$ одночастичной волновой функцией (в координатном представлении), а ее значение в узле k – амплитудой вероятности переворота k-го спина. Введем временное обозначение $\sigma_-^{(j)}\,|\Omega\rangle = |j\rangle$. Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{P} \equiv \sum_k \mathsf{P}_{k,k+1}$ переводит вектор $|j\rangle$ в

$$(N-2)\,|j\rangle + |j+1\rangle + |j-1\rangle = N\,|j\rangle + |j+1\rangle + |j-1\rangle - 2\,|j\rangle\,,$$

так что секулярное уравнение $H^{\rm xxx}V = EV$ с собственным значением E эквивалентно следующему линейному разностному уравнению на коэффициенты $a(k)$:

$$-a(k+1) - a(k-1) + 2a(k) = Ea(k). \tag{1.8}$$

Решение можно искать в виде $a(k) = e^{ipk}$ с $0 \le p < 2\pi$, тогда

$$|\Psi^{(1)}\rangle = |\Psi^{(1)}(p)\rangle = \sum_{k=1}^{N} e^{ipk}\, \sigma_-^{(k)}\, |\Omega\rangle\,, \qquad E = 2(1-\cos p) = 4\sin^2(p/2).$$

Однако мы должны еще удовлетворить условию периодичности $a(k+N) = a(k)$. Оно приводит к тому, что параметр p (импульс) может принимать конечный набор значений

$$p = p_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Итак, мы нашли N собственных векторов вида

$$|\Psi^{(1)}\rangle = |\Psi_\ell^{(1)}\rangle = \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i\ell j/N} \sigma_-^{(j)}\, |\Omega\rangle\,, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

с собственными значениями $E_\ell = 2\Big(1 - \cos\frac{2\pi\ell}{N}\Big)$, причем $E_\ell > 0$ при $\ell \neq 0$ (состояние с $\ell = 0$ – это $S_-\,|\Omega\rangle$). Эти уровни вырождены, поскольку все состояния вида $S_-^m|\Psi_\ell^{(1)}\rangle$ с $1 < m \le N-1$ – тоже собственные с той же энергией. Очевидно, $S_z|\Psi_\ell^{(1)}\rangle = (N-2)|\Psi_\ell^{(1)}\rangle$. Легко также проверить, что построенные состояния являются для оператора сдвига собственными: $e^{iP}|\Psi^{(1)}(p)\rangle = e^{ip}|\Psi^{(1)}(p)\rangle$ или

$$e^{iP}|\Psi_\ell^{(1)}\rangle = e^{2\pi i\ell/N}|\Psi_\ell^{(1)}\rangle.$$

В пределе $N \to \infty$ возможные значения p заполняют отрезок от 0 до 2π. В физике твердого тела такие возбуждения называют магнонами. При малых p зависимость энергии магнона от его импульса такая же, как для обычных свободно движущихся массивных нерелятивистских частиц: $E(p) \approx p^2$. Если вспомнить о константе J, мы получили бы $E(p) \approx Jp^2$, так что $(2J)^{-1}$ играет роль массы этих частиц.

Задача. Доказать, что $S_+|\Psi_\ell^{(1)}\rangle = 0$ при $\ell \neq 0$. (Это означает, что векторы $|\Psi_\ell^{(1)}\rangle$ при $\ell \neq 0$ являются старшими относительно действия группы $SU(2)$.)

Задача. а) Найти норму построенных векторов относительно введенного ранее скалярного произведения в $\mathcal{H}$; б) Доказать, что $\left\langle \Psi_l^{(1)} \middle| \Psi_{l'}^{(1)} \right\rangle = 0$ при $l \neq l'$.

Два перевернутых спина. В подпространстве $\mathcal{H}(2) \subset \mathcal{H}$ (два перевернутых спина) должно быть $N(N-1)/2$ собственных вектора. Их можно искать в виде

$$\left|\Psi^{(2)}\right\rangle = \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le N} a(k_1, k_2)\, \sigma_-^{(k_1)} \sigma_-^{(k_2)} \, |\Omega\rangle \,,$$

где $a(k_1, k_2)$ – неизвестные пока коэффициенты, удовлетворяющие условиям периодичности, которые будут учтены ниже. Физики называют $a(k_1, k_2)$ двухчастичной волновой функцией (в координатном представлении). Далее в этом разделе будем писать просто $|\Psi\rangle$ вместо $\left|\Psi^{(2)}\right\rangle$.

Уравнение на собственные значения оператора $H^{\rm xxx} = N - \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} \equiv \sum\limits_{k=1}^{N} \mathsf{P}_{k,k+1}$, имеет вид

$$\mathcal{P}\, |\Psi\rangle = (N - E)\, |\Psi\rangle \,.$$

Нам надо извлечь из него соотношения на коэффициенты $a(k_1, k_2)$, аналогичные (1.8). Для этого свернем обе части с ковектором $\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)}$,

$$\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} \mathcal{P}\, |\Psi\rangle = (N - E)\, \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)}\, |\Psi\rangle$$

и пронесем операторы перестановки налево, где они, подействовав на левый вакуум, благополучно исчезнут, поскольку вакуумное состояние инвариантно относительно любых перестановок (все спины смотрят вверх). Правило проноса таково:

$$\sigma_+^{(n)} \mathsf{P}_{k,k+1} = \mathsf{P}_{k,k+1} \Big[\sigma_+^{(n)} + \delta_{kn} (\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n} (\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)}) \Big].$$

Применив его два раза, получим:

$$\begin{aligned}
& \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} \mathsf{P}_{k,k+1} \\
= \; & \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} \\
& + \delta_{kn_1} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} (\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) + \delta_{k+1,n_1} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} (\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \\
& + \delta_{kn_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)}) \sigma_+^{(n_1)} + \delta_{k+1,n_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)}) \sigma_+^{(n_1)} \\
& + \delta_{kn_1} \delta_{k+1,n_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)}) (\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \\
& + \delta_{kn_2} \delta_{k+1,n_1} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)}) (\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}).
\end{aligned}$$

Далее просуммируем по k и воспользуемся тождеством $a(n_1, n_2) = \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)}\, |\Psi\rangle$ (при $n_1 < n_2$). В случае $n_1 < n_2 - 1$ (но $(n_1, n_2) \neq (1, N)$) последние две строчки не работают, и мы получаем уравнение

$$a(n_1{+}1, n_2) + a(n_1{-}1, n_2) + a(n_1, n_2{+}1) + a(n_1, n_2{-}1) - 4a(n_1, n_2) = -E a(n_1, n_2) \quad (1.9)$$

по каждой из переменных такое же, как и (1.8). Если же $n_1 = n_2 - 1 = n$, в игру вступает также и предпоследняя строчка, и мы получаем:

$$a(n, n+2) + a(n-1, n+1) - 2a(n, n+1) = -Ea(n, n+1). \tag{1.10}$$

Наконец, если $n_1 = 1$, $n_2 = N$, вместо предпоследней вклад дает последняя строчка (при этом надо считать, что $\delta_{N+1,n} = \delta_{1,n}$):

$$a(1, N-1) + a(2, N) - 2a(1, N) = -Ea(1, N). \tag{1.11}$$

Забудем пока про уравнения (1.10) и (1.11), которые вступают в силу только для ближайших соседей, и попытаемся найти возможно более общее решение уравнения (1.9), распространив его на все возможные значения n_1, n_2 и не накладывая пока никаких дополнительных условий периодичности. Очевидно, одно из решений уравнения (1.9) при всех n_1, n_2 – это $a(n_1, n_2) = e^{ip_1n_1 + ip_2n_2}$ с энергией $E = 2(1 - \cos p_1) + 2(1 - \cos p_2)$ и импульсом $P = p_1 + p_2$. Каково общее решение с данными энергией и импульсом? Можно было бы рассмотреть любую линейную комбинацию решений вида $e^{\pm ip_1n_1 \pm ip_2n_2}$. Все они имеют одну и ту же энергию, но их суперпозиции нам не подходят, поскольку они не будут собственными для оператора сдвига. Но есть еще одна возможность: взять

$$a(n_1, n_2) = Ae^{ip_1n_1 + ip_2n_2} + Be^{ip_2n_1 + ip_1n_2} \tag{1.12}$$

с произвольными A, B, при этом по-прежнему $E = 2(1 - \cos p_1) + 2(1 - \cos p_2)$, и $P = p_1 + p_2$, т.е.

$$a(n_1 + 1, n_2 + 1) = e^{i(p_1 + p_2)}a(n_1, n_2). \tag{1.13}$$

Но с этим решением пока тоже еще не все в порядке: при произвольных A и B оно не удовлетворяет уравнению (1.10). Посмотрим (вслед за Г.Бете), нельзя ли подобрать A и B так, чтобы это уравнение тоже удовлетворилось. Вычтем (1.10) из (1.9) при $n_1 = n_2 - 1 = n < N$, чтобы исключить E. Получим дополнительное условие

$$a(n, n) + a(n+1, n+1) = 2a(n, n+1), \quad 1 \leq n < N, \tag{1.14}$$

которому должна удовлетворять волновая функция (1.12). Подставив (1.12) в (1.14), найдем, что (1.12) является решением, если коэффициенты A, B связаны формулой

$$\frac{A}{B} = -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_1}}{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_2}} := e^{i\theta(p_1,p_2)}.$$

Для краткости мы часто будем писать $\theta_{12} = \theta(p_1, p_2) = -\theta_{21}$. Итак, окончательный ответ:

$$\boxed{a(n_1, n_2) = e^{i(p_1n_1 + p_2n_2 + \frac{\theta_{12}}{2})} + e^{i(p_2n_1 + p_1n_2 + \frac{\theta_{21}}{2})} \quad (\text{при } n_1 < n_2).} \tag{1.15}$$

Упражнение. Проверить, что $2\mathrm{ctg}\,\dfrac{\theta_{12}}{2} = \mathrm{ctg}\,\dfrac{p_1}{2} - \mathrm{ctg}\,\dfrac{p_2}{2}$.

На бесконечной цепочке параметры p_1, p_2 произвольны. Но наша цепочка свернута в кольцо (N-периодична). Имеется очевидное условие периодичности

$$a(n_1 + N, n_2 + N) = a(n_1, n_2), \tag{1.16}$$

которое выражает просто тот факт, что систему как целое можно повернуть на $360°$, и она тождественно перейдет в себя. Это условие влечет за собой квантование полного импульса: $e^{i(p_1+p_2)N} = 1$, т.е. $p_1 + p_2 = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 0, 1, \ldots N-1$, как и в случае одного магнона.

Есть и более тонкое условие периодичности. Поясним его на примере амплитуды $a(1,2)$. Как она связана с амплитудой $a(1,N)$? На свернутой в кольце цепочке они *должны быть* связаны, поскольку в обоих случаях они соответствуют состояниям с двумя соседними перевернутыми спинами. Эти состояния отличаются только общим сдвигом на 1 узел. Вспоминая (1.13), можем поэтому написать $a(1,2) = e^{i(p_1+p_2)}a(1,N)$. Но согласно тому же уравнению (1.13), $e^{i(p_1+p_2)}a(1,N) = a(2,N+1)$, так что мы должны потребовать $a(1,2) = a(2,N+1)$.

Рассмотрим теперь $a(1,n)$ при $n > 1$. Как связаны амплитуды $a(1,n)$ и $a(1,N-n+2)$? Обе амплитуды соответствуют состояниям, в которых перевернутые спины разделены $n-1$ ребрами решетки. Они отличаются общим сдвигом на $n-1$ узел, и, следовательно, $a(1,n) = e^{i(n-1)(p_1+p_2)}a(1,N-n+2)$. Но $e^{i(n-1)(p_1+p_2)}a(1,N-n+2) = a(n,N+1)$, и, значит, мы должны потребовать $a(1,n) = a(n,N+1)$. Наконец, сдвинув это условие как целое вдоль цепочки на k шагов, получим $a(k+1,n+k) = a(n+k,N+k+1)$, что можно записать в виде

$$\boxed{a(n_1,n_2) = a(n_2,n_1+N) \qquad (\text{при } 1 \le n_1 < n_2 \le N).} \tag{1.17}$$

Это условие выражает собой периодичность при сдвиге на N *одной* из переменных (n_1) при фиксированном значении n_2. Отметим, что было бы *неверно* написать просто $a(n_1+N,n_2) = a(n_1,n_2)$, поскольку наша волновая функция определена только при $n_1 < n_2$, а при сдвиге $n_1 \to n_1 + N$ относительное расположение аргументов меняется.

Другой способ понять это условие периодичности заключается в том, чтобы продолжить волновую функцию на область $n_1 > n_2$ наложением естественного требования симметрии при перестановке аргументов: $a(n_1,n_2) = a(n_2,n_1)$. Легко видеть, что продолженная таким образом функция дается формулой

$$a^{\text{symm}}(n_1,n_2) = e^{i(p_1n_1+p_2n_2+\frac{1}{2}\operatorname{sign}(n_2-n_1)\theta_{12})} + e^{i(p_2n_1+p_1n_2+\frac{1}{2}\operatorname{sign}(n_2-n_1)\theta_{21})}. \tag{1.18}$$

На такую функцию можно накладывать условие периодичности в обычном виде $a^{\text{symm}}(n_1+N,n_2) = a^{\text{symm}}(n_1,n_2)$. Оно эквивалентно (1.17).

Из условия периодичности сразу следуют ограничения на возможные значения p_1, p_2:

$$\begin{cases} e^{ip_1N} = e^{i\theta(p_1,p_2)} \\ e^{ip_2N} = e^{-i\theta(p_1,p_2)}. \end{cases} \tag{1.19}$$

Это простейший пример системы уравнений Бете. Физики интерпретируют их следующим образом. Первый магнон, облетая цепочку по кругу, приобретает фазу, которая должна быть кратна 2π. С другой стороны, эта фаза складывается из фазы свободного движения p_1N и фазы рассеяния на втором магноне, которая равна $\theta(p_2,p_1)$. Первое уравнение Бете как раз говорит, что их сумма кратна 2π. Аналогично для второго магнона.

На самом деле уравнения Бете (1.19) получаются автоматически, если учесть условие (1.11) (которое до сих пор никак не использовалось) на конце свернутой в кольцо цепочки. Для этого вычтем (1.11) из (1.9) при $n_1 = 1$, $n_2 = N$, получим уравнение

$$a(0, N) + a(1, N+1) = 2a(1, N).$$

Подставив в него (1.12), получим (с учетом $e^{i(p_1+p_2)N} = 1$ и $A/B = e^{i\theta_{12}}$) те же уравнения Бете для p_1, p_2.

Задача. Найти решения системы уравнений Бете такие, что $p_1 = p_2$, а также найти соответствующие собственные векторы гамильтониана XXX-цепочки.

Результат этой задачи указывает на то, что не все решения уравнений Бете отвечают нетривиальным собственным состояниям.

Удобно переписать уравнения Бете в другой параметризации, в которой они становятся алгебраическими. Например, можно положить $e^{ip_1} = z_1$, $e^{ip_2} = z_2$, и тогда

$$\begin{cases} z_1^N = -\dfrac{1 + z_1 z_2 - 2z_1}{1 + z_1 z_2 - 2z_2} \\[2ex] z_2^N = -\dfrac{1 + z_1 z_2 - 2z_2}{1 + z_1 z_2 - 2z_1}. \end{cases}$$

Но в дальнейшем окажется удобнее другая параметризация. Вместо p введем параметр λ следующим образом:

$$e^{ip} = \frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}} \qquad \text{или} \qquad \lambda = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{p}{2}\,. \tag{1.20}$$

Этот параметр иногда называют *быстротой*, – по-видимому, по смутной аналогии с релятивистской кинематикой. А по причине, которая выяснится позднее, его также называют *спектральным параметром.* Введем полезные в дальнейшем функции

$$\begin{aligned} p(\lambda) &:= -i\log\frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}} = -2\operatorname{arctg}(2\lambda) + \pi \pmod{2\pi}, \\ \varepsilon(\lambda) &:= 2(1 - \cos p(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1}{4}}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

которые имеют смысл импульса и энергии свободного магнона со спектральным параметром λ. Путем прямого вычисления можно убедиться, что

$$e^{i\theta(p_1, p_2)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i}{\lambda_1 - \lambda_2 - i}, \tag{1.22}$$

т.е. сдвиг фазы при рассеянии двух магнонов зависит только от разности их быстрот, и в этом основное преимущество λ-параметризации. Система уравнений Бете запишется в виде

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}\right)^N = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i} \\[3ex] \left(\dfrac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right)^N = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i}. \end{cases} \tag{1.23}$$

Посмотрим, как выглядят ее решения при $N \to \infty$. Извлечем корень N-й степени:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} = \omega_1 e^{\frac{i}{N}\theta_{12}} \\[2ex] \dfrac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} = \omega_2 e^{-\frac{i}{N}\theta_{12}}, \end{cases}$$

где $\omega_{1,2}$ – два произвольных корня N-й степени из 1. В пределе $N \to \infty$ их аргументы независимо пробегают интервал $[0, 2\pi)$, а экспоненты в правых частях стремятся 1, так что переменные разделяются, и уравнения решаются тривиально. Физически полученные собственные векторы интерпретируются как состояния рассеяния двух магнонов.

Однако уравнения (1.23) могут иметь и комплексные решения. Положим $\lambda_1 = u_1 + iv_1$, $\lambda_2 = u_2 + iv_2$. Модуль первого уравнения дает:

$$\left(\frac{u_1^2 + (v_1 - \frac{1}{2})^2}{u_1^2 + (v_1 + \frac{1}{2})^2}\right)^N = \frac{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 - 1)^2}{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 + 1)^2}.$$

Пусть $v_1 > 0$, тогда левая часть экспоненциально мала при $N \to \infty$. Таким образом, с экспоненциальной точностью имеем $u_1 = u_2$, $v_1 - v_2 = 1$. Взяв по модулю обе части второго уравнения, видим, что $v_2 < 0$. Перемножив два уравнения, получим:

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_2 + i(v_2 - \frac{1}{2})}{u_2 + i(v_2 + \frac{1}{2})}\right)^N = 1.$$

Подставив сюда $u_1 = u_2$, $v_1 - v_2 = 1$, придем к соотношению

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{3}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})}\right)^N = 1,$$

откуда $v_1 = \frac{1}{2}$. Итак, с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$ имеем семейство решений

$$\lambda_1 = u + \frac{i}{2}, \qquad \lambda_2 = u - \frac{i}{2}. \tag{1.24}$$

На жаргоне специалистов по анзацу Бете такое решение называется *струной*. В данном случае это струна длины 2. Вещественный параметр u произволен. Через него выражается полный импульс данного состояния и его энергия:

$$\begin{aligned} p(\lambda_1, \lambda_2) &= p(\lambda_1) + p(\lambda_2) = p(u/2) = -i \log \frac{u+i}{u-i}, \\ E(\lambda_1, \lambda_2) &= \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2) = 1 - \cos p(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{u^2+1}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Упражнение. Вывести эти формулы.

Задача. Доказать, что $E(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2})$ всегда меньше, чем энергия двух магнонов с импульсами p_1 и p_2 такими, что $p_1 + p_2 = p(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}) = p(u/2)$. Поэтому данное состояние можно интерпретировать как связанное состояние двух магнонов. Описать качественно, как выглядит его волновая функция.

Вернемся к случаю конечных N и подведем итог. Мы построили собственные состояния оператора H^{xxx} вида $|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$, где λ_1, λ_2 – любое решение системы уравнений Бете (1.23). Их импульс и энергия даются формулами

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = p(\lambda_1) + p(\lambda_2),$$

$$E(\lambda_1, \lambda_2) = \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2).$$

Эти состояния вырождены, поскольку все состояния вида $S_-^m |\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ с $1 < m \leq N-2$ – тоже собственные с той же энергией. Очевидно, $S_z |\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = (N-4)|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$.

Задача. Доказать, что $S_+ |\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = 0$. (Это означает, что векторы $|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ являются старшими относительно действия группы $SU(2)$.)

Более двух перевернутых спинов: общий случай. То, что нам удалось диагонализовать гамильтониан в секторе с двумя перевернутыми спинами, не удивительно (задача двух тел всегда решается). Замечательно то, что тот же метод позволяет продвинуться гораздо дальше и решить задачу в секторе с любым количеством m перевернутых спинов.

Итак, собственные состояния оператора $H^{\mathrm{xxx}} = N - \mathcal{P}$ в подпространстве $\mathcal{H}(m)$ будем искать в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_m \leq N} a(k_1, \ldots, k_m)\, \sigma_-^{(k_1)} \ldots\, \sigma_-^{(k_m)} \,|\Omega\rangle\,.$$

Уравнение на собственные значения такое же, как и ранее: $\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,|\Psi\rangle$ (напомним, что $\mathcal{P} = \sum_k \mathsf{P}_{k,k+1}$). Аналогично тому, как мы это делали для двух спинов, свернем обе части с ковектором $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}$ (при $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$),

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}\,|\Psi\rangle \tag{1.26}$$

и пронесем все операторы перестановки налево. Для сокращения записи правило проноса запишем в виде

$$\sigma_+^{(n)} \mathsf{P}_{k,k+1} = \mathsf{P}_{k,k+1}(\sigma_+^{(n)} + \beta_k^{(n)}),$$

где

$$\beta_k^{(n)} \equiv \delta_{kn}(\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n}(\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)}).$$

Правая часть равенства (1.26) равна $(N-E)a(n_1, \ldots, n_m)$, а левая после проноса операторов перестановки налево выглядит следующим образом:

$$\sum_k \langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_1)} + \beta_k^{(n_1)})(\sigma_+^{(n_2)} + \beta_k^{(n_2)}) \ldots (\sigma_+^{(n_m)} + \beta_k^{(n_m)})\,|\Psi\rangle\,.$$

Не очень вразумительно, но давайте посмотрим, что получается после раскрытия скобок и взятия суммы по k (от 1 до N). Во-первых, имеется член, не содержащий операторов $\beta_k^{(n)}$; он не зависит от k, и после взятия суммы дает

$$N\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}\,|\Psi\rangle\,.$$

Во-вторых, имеется m членов, в каждый из которых операторы β входят по одному разу. Они объединяются в выражение

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \cancel{\sigma}_+^{(n_\alpha)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \Big(\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)}\Big) |\Psi\rangle\,.$$

Здесь перечеркнутый оператор означает его отсутствие в данном месте. Легко видеть, что

$$\sum_k \beta_k^{(n)} = \sigma_+^{(n+1)} + \sigma_+^{(n-1)} - 2\sigma_+^{(n)},$$

так что эти члены имеют вполне ожидаемый вид, уже знакомый по предыдущим более простым случаям. Рассмотрим теперь члены, в которые операторы β входят по два раза:

$$\sum_{\substack{\alpha,\alpha'=1\\ \alpha<\alpha'}}^{m} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \cancel{\sigma}_+^{(n_\alpha)} \ldots \cancel{\sigma}_+^{(n_{\alpha'})} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \Big(\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha'})}\Big) |\Psi\rangle\,.$$

Задача. Показать, что

$$\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha'})} = 0 \quad \text{при } |\alpha'-\alpha| \geq 2 \ (\mathrm{mod}\ m),$$

$$\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha+1})} = 2\, \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \sigma_+^{(n_\alpha)} \sigma_+^{(n_\alpha+1)}.$$

Отсюда следует, что квадратичные по β члены сворачиваются в выражение

$$2\sum_{\alpha=1}^{m} \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots\, \sigma_+^{(n_m)} |\Psi\rangle\,.$$

(Индекс α здесь и далее понимается по модулю m.) Наконец, посмотрим, что дают члены третьей и более высокой степени по β. И тут выясняется факт, благодаря которому метод Бете работает при $m > 2$:

$$\sum_k \beta_k^{(n_{\alpha_1})} \beta_k^{(n_{\alpha_2})} \ldots \beta_k^{(n_{\alpha_r})} = 0 \quad \text{при } r \geq 3 \text{ и всех } n_{\alpha_i}$$

Доказательство совсем нетрудное; провести его предлагается в качестве задачи. Поэтому членов, содержащих более двух операторов β в левой части (1.26) просто нет!

Собирая все вместе, имеем:

$$\begin{aligned} &\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} (\mathcal{P} - N) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})} \sigma_+^{(n_\alpha+1)} \sigma_+^{(n_{\alpha+1})} \ldots \sigma_+^{(n_m)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})} \sigma_+^{(n_\alpha-1)} \sigma_+^{(n_{\alpha+1})} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \\ &\quad + 2\sum_{\alpha=1}^{m} (\delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} - 1) \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

В суммах по α индекс суммирования надо понимать по модулю m. Во второй сумме сдвинем индекс суммирования $\alpha \to \alpha + 1$. После взятия скалярного произведения с вектором $|\Psi\rangle$ получим следующее уравнение на амплитуды $a(n_1, \ldots, n_m)$:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^{m} (1 - \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}})\, a(n_1, \ldots, n_{\alpha-1}, n_\alpha{+}1, n_{\alpha+1}, \ldots, n_m) \\
+ \; & \sum_{\alpha=1}^{m} (1 - \delta_{n_\alpha, n_{\alpha+1}-1})\, a(n_1, \ldots, n_{\alpha-1}, n_\alpha, n_{\alpha+1}{-}1, \ldots, n_m) \\
- \; & 2 \sum_{\alpha=1}^{m} (1 - \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}})\, a(n_1, \ldots, n_m) \; = \; -E\, a(n_1, \ldots, n_m).
\end{aligned}
$$

Символы Кронекера в первых двух суммах возникли по следующей причине. В первой сумме член с $n_\alpha + 1 = n_{\alpha+1}$ соответствовал бы вектору $\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})}$, в котором есть два одинаковых оператора σ_+, а потому такой вектор зануляется, и его вклад в уравнении на волновую функцию надо исключить. С помощью операторов сдвига $e^{\pm\partial_{n_\alpha}}$ уравнение на волновую функцию можно записать несколько короче:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{m} \Big(2 - e^{\partial_{n_\alpha}} - e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\, a(n_1, \ldots, n_m) + \sum_{\alpha=1}^{m} \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \Big(2 - e^{\partial_{n_\alpha}} - e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\, a(n_1, \ldots, n_m) \\
= \; E\, a(n_1, \ldots, n_m).
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Как и в случае $m = 2$ будем искать решения среди функций $a(n_1, \ldots, n_m)$, удовлетворяющих уравнению

$$
\sum_{\alpha=1}^{m} \Big(2 - e^{\partial_{n_\alpha}} - e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\, a(n_1, \ldots, n_m) = \; E\, a(n_1, \ldots, n_m) \tag{1.29}
$$

при всех n_i, а оставшиеся члены в левой части обратятся в 0 при наложении дополнительных условий

$$
a(n_1, \ldots, n_\alpha, n_\alpha, \ldots, n_m) + a(n_1, \ldots, n_\alpha{+}1, n_\alpha{+}1, \ldots, n_m) = 2a(n_1, \ldots, n_\alpha, n_\alpha{+}1, \ldots, n_m). \tag{1.30}
$$

Общее решение первого уравнения, собственное для оператора сдвига, таково:

$$
a(n_1, \ldots, n_m) = \sum_{\sigma \in S_m} A_\sigma \exp\Big(i \sum_{j=1}^{m} p_{\sigma(j)} n_j\Big).
$$

Внешняя сумма берется по всем $m!$ перестановкам индексов $\{1, 2, \ldots, m\}$, а параметры p_α и коэффициенты A_σ произвольны. При этом импульс и энергия даются формулами

$$
P = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\,, \qquad E = 2 \sum_{\alpha=1}^{m} (1 - \cos p_\alpha).
$$

Аналогично случаю $m = 2$ условия (1.30) налагают на коэффициенты A_σ соотношения, которые удается однозначно разрешить с точностью до общего множителя. Подробный анализ предлагается проделать в качестве поучительного упражнения (если не в общем виде, то хотя бы для $m = 3$).

Результат имеет следующий вид (при $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_N \le N$):

$$\boxed{a(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \exp\Big(i \sum_{j=1}^{m} p_{\sigma(j)} n_j + \frac{i}{2} \sum_{j<k} \theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big),} \tag{1.31}$$

где фазы $\theta_{jk} \equiv \theta(p_j, p_k)$ определяются той же формулой

$$e^{i\theta(p_j,p_k)} = -\frac{1 + e^{i(p_j+p_k)} - 2e^{ip_j}}{1 + e^{i(p_j+p_k)} - 2e^{ip_k}},$$

что и раньше. Выражение (1.31) называется *волновой функцией Бете*. Как уже отмечалось, это состояние имеет энергию $E = 2\sum\limits_{j=1}^{m}(1-\cos p_j)$. Аналогично (1.18), можно продолжить волновую функцию (1.31) симметричным образом во все области конфигурационного пространства с другим порядком расположения $n_1, n_2, \ldots, n_N$:

$$a^{\text{symm}}(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \exp\Big(i \sum_{j=1}^{m} p_{\sigma(j)} n_j + \frac{i}{2} \sum_{j<k} \text{sign}\,(n_k - n_j)\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big). \tag{1.32}$$

Условие периодичности запишется теперь так:

$$\boxed{a(n_1, n_2, \ldots, n_m) = a(n_2, n_3, \ldots, n_1 + N),} \tag{1.33}$$

что приводит к системе уравнений Бете:

$$e^{ip_jN} = \prod_{k \neq j} e^{i\theta(p_j,p_k)}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.34}$$

В λ-параметризации она выглядит следующим образом:

$$\boxed{\left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{k \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}, \quad j = 1, \ldots, m.} \tag{1.35}$$

Упражнение. Вывести условие периодичности (1.33) для $m = 3$ с помощью рассуждения, аналогичного тому, которое было использовано при выводе условия (1.17).

Задача. Найти спектр гамильтониана XXX-модели на 3 узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{\sigma}^{(k)}\vec{\sigma}^{(k+1)} - \mathsf{I}\right), \qquad \vec{\sigma}^{(4)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}.$$

Определить также кратность вырождения уровней.

Задача (сложная). Доказать, что все собственные состояния $\left|\Psi^{(m)}\right\rangle$, построенные по решениям уравнений Бете, являются старшими, т.е. $S_+\left|\Psi^{(m)}\right\rangle = 0$.

Решения системы (1.35) при $N \to \infty$ исследуются аналогично случаю двух магнонов. Вещественным решениям соответствуют состояния m независимых магнонов. Комплексные решения собираются в "струны", длины которых могут быть равны $2M+1 \le m$, где $M \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\ge 0}$. Числа λ_k для струны длины $2M+1$ таковы:

$$\lambda_k = u + ik, \quad k = -M, -M+1, \ldots, M-1, M,$$

где u – произвольный вещественный параметр. Например, струна длины 2 – это $\{u+\frac{i}{2}, u-\frac{i}{2}\}$, длины 3 – $\{u+i, u, u-i\}$, и т. д. Струны длины $2M+1 > 1$ интерпретируются как связанные состояния $2M+1$ магнонов. Сами магноны можно формально считать струнами длины 1 (в этом случае $M = 0$).

Задача. Вывести возможный вид струнных решений уравнений Бете в пределе $N \to \infty$.

Итак, в собственном состоянии общего вида числа λ_j объединяются в струны различной длины. Обозначим через ν_M число струн длины $2M+1$ и через $\lambda_{j,M}$ ($j = 1, \ldots, \nu_M$) вещественные части параметров λ, входящих в струну с номером j. Полное число струн (включая струны длины 1) обозначим через Q. Имеем:

$$Q = \sum_{M \ge 0} \nu_M\,, \qquad m = \sum_{M \ge 0} (2M+1)\nu_M.$$

Набор целых чисел $\{m, Q, \{\nu_M\}\}$, связанных этими соотношениями, характеризует состояние с точностью до задания Q вещественных чисел $\lambda_{j,M}$. Будем называть такой набор конфигурацией. Энергия и импульс состояния, отвечающего данной конфигурации, складываются из Q слагаемых, представляющих собой энергию и импульс отдельных струн (это верно с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$).

Задача. Показать, что энергия и импульс струны длины $2M+1$ с $\lambda_k = u + ik$ ($k = -M, -M+1, \ldots, M-1, M$) с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$ даются формулами:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2M+1}\,\varepsilon\Big(\frac{u}{2M+1}\Big) = \frac{2M+1}{u^2 + (M+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{2M+1}\,(1 - \cos P), \\ P &= p\Big(\frac{u}{2M+1}\Big) = -2\mathrm{arctg}\,\frac{u}{M+\frac{1}{2}} + \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

При фиксированном m и $N \to \infty$ вещественные параметры $\lambda_{j,M}$ произвольны, подобно тому, как это было для $m = 2$. Если же N стремится к ∞ вместе с m, так что отношение m/N фиксировано, для параметров $\lambda_{j,M}$ заданной конфигурации можно вывести систему уравнений, которая получается из исходных уравнений Бете следующим образом. Для выделенной струны длины $2M+1$ перемножим уравнения Бете для входящих в эту струну параметров λ_j. В правой части перемножим сомножители $\frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}$ по k в соответствии с разбиением переменных λ на струны в данной конфигурации. Введем обозначение

$$V_0(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}.$$

Задача. Доказать тождества

$$\prod_{l=-M}^{M} V_0(2\lambda + 2il) = V_0\Big(\frac{2\lambda}{2M+1}\Big),$$

$$\prod_{l=-M}^{M} V_0(\lambda + il) = V_0\Big(\frac{\lambda}{M}\Big)V_0\Big(\frac{\lambda}{M+1}\Big) \equiv V_M(\lambda),$$

$$\prod_{l_1=-M_1}^{M_1}\prod_{l_2=-M_2}^{M_2} V_0(\lambda + i(l_1+l_2)) = \prod_{L=|M_1-M_2|}^{M_1+M_2} V_L(\lambda) \equiv V_{M_1,M_2}(\lambda).$$

Задача. Показать, что система уравнений на вещественные параметры $\lambda_{j,M}$ имеет вид

$$V_0^N\Big(\frac{\lambda_{j,M_1}}{M_1+\frac{1}{2}}\Big) = \prod_{M_2}\prod_{\substack{k=1\\(k,M_2)\neq(j,M_1)}}^{\nu_{M_2}} V_{M_1,M_2}(\lambda_{j,M_1} - \lambda_{k,M_2}). \tag{1.37}$$

Таким образом, при $N\to\infty$ собственные векторы гамильтониана XXX-цепочки представляют собой состояния рассеяния магнонов и их связанных состояний – струн длины больше 1.

1.1.4 Основное состояние антиферромагнитной цепочки

Рассмотрим теперь гамильтониан XXX-модели, взятый с другим знаком:

$$H^{\mathrm{xxx,AF}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\Big).$$

При этом во всех полученных выше выражениях для энергий m-магнонных состояний надо изменить знак. Это приведет к тому, что вакуум $|\Omega\rangle$ будет теперь обладать *максимальной* энергией (равной 0), а все состояния с каким-то количеством магнонов с ненулевыми импульсами будут иметь отрицательные значения энергии – тем меньшие, чем больше m. Физики поэтому говорят, что в этом случае $|\Omega\rangle$ – ложный вакуум, а настоящий (физический) вакуум, т.е. состояние с максимальной по модулю отрицательной энергией, получается заполнением ложного вакуума максимально возможным количеством магнонов. Здесь можно провести аналогию с морем Дирака.

В этом разделе мы будем считать, что N четно. Тогда основное состояние будет находиться в секторе с нулевой полной проекцией спина, т.е. будет иметь $m = N/2$ перевернутых спинов. Мы покажем, что уравнения Бете позволяют получить исчерпывающую информацию об этом состоянии при $N\to\infty$. Полное описание возбужденных состояний над физическим вакуумом тоже возможно (оно дано в [6]), но мы ограничимся только анализом основного состояния. Можно показать, что в основном состоянии все λ_j вещественны, т.е. струн длины больше 1 нет.

Итак, рассмотрим систему уравнений (1.35) и перейдем в ней к логарифмам:

$$N\log\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}} = \sum_{k=1,\neq j}^{N/2}\log\frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i} + 2\pi i q_j, \quad j = 1,\ldots,\frac{N}{2},$$

или

$$Np(\lambda_j)=\sum_{k=1,\neq j}^{N/2} p\Big(\frac{\lambda_j-\lambda_k}{2}\Big)-2\pi q_j,$$

где q_j – какие-то целые числа. Вспомнив, что $2\lambda=-\mathrm{tg}\,\dfrac{p-\pi}{2}$ (см. (1.20)), мы можем записать эти уравнения в виде

$$\mathrm{arctg}(2\lambda_j)=\frac{\pi}{N}\,Q_j+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N/2}\mathrm{arctg}(\lambda_j-\lambda_k)\,,\quad j=1,\dots,\frac{N}{2},$$

где целые (при нечетных $N/2$) или полуцелые (при четных $N/2$) числа Q_j связаны с исходными целыми q_j формулой $Q_j=\frac{1}{4}(3N+2)-q_j$. Подробный анализ показывает, что в основном состоянии последовательность чисел Q_j монотонно возрастает вместе с j в интервале $\left[-\frac{N}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{N}{4}-\frac{1}{2}\right]$, т.е. $Q_{j+1}-Q_j=1$. При $N\to\infty$ можно заменить

$$\frac{Q_j}{N}\to x,\quad \lambda_j\to\lambda(x),\quad -\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4},$$

где $\lambda(x)$ – монотонная непрерывная функция, причем $\lambda(\pm\frac{1}{4})=\pm\infty$. На нее в пределе получается интегральное уравнение

$$\mathrm{arctg}\,2\lambda(x)=\pi x+\int\limits_{-1/4}^{1/4}\mathrm{arctg}\,(\lambda(x)-\lambda(x'))dx'. \tag{1.38}$$

Удобнее, однако, работать с функцией

$$\rho(\lambda)=\Big(\frac{d\lambda(x)}{dx}\Big)^{-1}\Big|_{x=x(\lambda)} \tag{1.39}$$

(здесь $x(\lambda)$ – функция, обратная к $\lambda(x)$), которая имеет смысл нормированной плотности чисел λ_j в интервале $[\lambda,\ \lambda+d\lambda]$. Это легко понять, написав

$$N\rho(\lambda)d\lambda=N(x(\lambda+d\lambda)-x(\lambda))=N\frac{dx}{d\lambda}d\lambda=Ndx.$$

По определению функции $x(\lambda)$ справа стоит количество чисел Q_j на интервале $[x,x+dx]$. Поэтому левая часть равна количеству чисел λ_j в интервале $[\lambda,\ \lambda+d\lambda]$. Отсюда ясно, что функция $\rho(\lambda)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\,. \tag{1.40}$$

Введение функции плотности позволяет в пределе $N\to\infty$ заменять суммы интегралами по правилу

$$\sum_j f(\lambda_j)=N\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda.$$

Дифференцируя (1.38) по x, получим для $\rho(\lambda)$ интегральное уравнение

$$\pi\rho(\lambda)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\mu)\,d\mu}{(\lambda-\mu)^2+1}=\frac{2}{4\lambda^2+1}. \tag{1.41}$$

Оно решается преобразованием Фурье. Чтобы перейти к Фурье-образам, проинтегрируем обе части с функцией $e^{i\lambda\xi}$ и учтем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\xi}d\lambda}{\lambda^2+1} = \pi e^{-|\xi|}.$$

Тогда на Фурье-образ $\hat{\rho}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}\rho(\lambda)d\lambda$ получается алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид $\hat{\rho}(\xi) = \dfrac{1}{2\cosh(\xi/2)}$, откуда

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda\xi}\,d\xi}{2\cosh(\xi/2)} = \frac{1}{2\cosh(\pi\lambda)}. \tag{1.42}$$

Энергия и импульс основного состояния вычисляются по формулам

$$E_0 = -\sum_{k=1}^{N/2}\varepsilon(\lambda_j) = -N\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda,$$

$$P_0 = \sum_{k=1}^{N/2}p(\lambda_j) = N\int_{-\infty}^{\infty}p(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda.$$

Упражнение. Вычислить эти интегралы и показать, что $E_0 = -2N\log 2$, $P_0 = \pi N/2 \pmod{2\pi}$.

1.1.5 Анизотропная спиновая цепочка: XXZ-модель

Гамильтониан анизотропной модели Гейзенберга (XXZ-модели) имеет вид

$$\boxed{H^{\mathrm{xxz}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \Delta(\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1)\Big),} \tag{1.43}$$

где Δ называется параметром анизотропии. Диагонализация этого оператора методом Бете лишь немногим сложнее, чем в изотропном случае. В самом деле, написав

$$H^{\mathrm{xxz}} = H^{\mathrm{xxx}} - \frac{1}{2}(\Delta-1)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - N\mathsf{I}\Big),$$

видим, что добавочная часть действует на базисные векторы диагонально и потому ее вклад легко учитывается.

Введем временное обозначение $\Big|\,k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle \equiv \sigma_-^{(k_1)}\sigma_-^{(k_2)}\ldots\sigma_-^{(k_m)}\,|\Omega\rangle$ (как обычно, при $1\le k_1\le\ldots\le k_m\le N$). Из очевидного равенства

$$\sigma_z^{(k)}\Big|\,k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle = \Big(1-2\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{k,k_\alpha}\Big)\Big|\,k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle$$

легко следует, что

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}-N\Big)\Big|k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle=4\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(\delta_{k_\alpha+1,k_{\alpha+1}}-1\Big)\Big|k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle\,.$$

Этот добавочный вклад приведет к тому, что в выражении для ковектора

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}H^{\mathrm{xxz}}=\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\Big[N\mathsf{I}-\mathcal{P}-\frac{1}{2}(\Delta-1)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}-N\mathsf{I}\Big)\Big]$$

аналогичном (1.27) третья сумма в правой части войдет с коэффициентом 2Δ вместо 2. Следовательно, уравнение (1.28) и условия (1.30) примут соответственно вид

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2\Delta-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)+\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}}\Big(2\Delta-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)&\\ =\;E\,a(n_1,\ldots,n_m),&\end{aligned}\tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha,\ldots,n_m)+a(n_1,\ldots,n_\alpha{+}1,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m)&\\ =\;2\Delta a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m).&\end{aligned}\tag{1.45}$$

Общее решение первого уравнения, собственное для оператора сдвига, такое же, как и в изотропном случае:

$$a(n_1,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}A_\sigma\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j\Big).$$

Полный импульс опять дается суммой параметров p_α, но выражение для энергии модифицируется:

$$P=\sum_{\alpha=1}^{m}p_\alpha\,,\qquad E=2\sum_{\alpha=1}^{m}(\Delta-\cos p_\alpha).$$

Условия (1.45) налагают на коэффициенты A_σ соотношения, которые удается однозначно разрешить с точностью до общего множителя.

Волновая функция Бете (при $1\le n_1<n_2<\ldots<n_N\le N$) имеет такой же общий вид (1.31), как и раньше:

$$a(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j+\frac{i}{2}\sum_{j<k}\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big),\tag{1.46}$$

но фазы $\theta_{jk}\equiv\theta(p_j,p_k)$ определяются теперь формулой

$$e^{i\theta(p_j,p_k)}=-\,\frac{1+e^{i(p_j+p_k)}-2\Delta e^{ip_j}}{1+e^{i(p_j+p_k)}-2\Delta e^{ip_k}}.$$

Условие периодичности (1.33) приводит к тем же уравнениям Бете на параметры p_i в форме (1.34).

Существуют также аналоги λ-параметризации. Они различны в случаях $\Delta > 1$ и $0 < \Delta < 1$. Пусть сначала $\Delta > 1$. Параметр λ вводится формулой

$$e^{ip} = \frac{\sin\eta(\lambda + \frac{i}{2})}{\sin\eta(\lambda - \frac{i}{2})} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{ctg}\,\frac{p}{2} = \coth(\eta/2)\,\mathrm{tg}\,(\eta\lambda), \tag{1.47}$$

где вещественный параметр η связан с Δ соотношением

$$\Delta = \cosh\eta. \tag{1.48}$$

Для сдвига фазы имеем:

$$e^{i\theta_{12}} = \frac{\sin\eta(\lambda_1 - \lambda_2 + i)}{\sin\eta(\lambda_1 - \lambda_2 - i)}. \tag{1.49}$$

Функции $p(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ таковы (ср. с (1.21)):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,(\eta\lambda)}{\tanh(\eta/2)}\right) + \pi, \\ \varepsilon(\lambda) &= \frac{2\,\sinh^2\eta}{\cosh\eta - \cos(2\eta\lambda)}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Они переходят в (1.21) в пределе $\eta \to 0$. Уравнения Бете для XXZ-модели в λ-параметризации таковы:

$$\boxed{\left(\frac{\sin\eta(\lambda_j - \frac{i}{2})}{\sin\eta(\lambda_j + \frac{i}{2})}\right)^N = \prod_{k\neq j} \frac{\sin\eta(\lambda_j - \lambda_k - i)}{\sin\eta(\lambda_j - \lambda_k + i)}, \quad j = 1, \ldots, m.} \tag{1.51}$$

Формулы для случая $|\Delta| < 1$ получаются из написанных выше заменой $\eta = i\gamma$, при этом $\Delta = \cos\gamma$.

Задача. Найти струнные решения уравнений Бете для XXZ-модели при $m = 2$ в пределе $N \to \infty$ и выразить импульс и энергию соответствующих состояний через вещественные части чисел λ_j.

1.2 Анзац Бете для одномерного бозе-газа с точечным взаимодействием

Цель этого раздела – показать, как координатный анзац Бете работает для непрерывных моделей.

Рассмотрим N квантовых частиц на прямой, которые взаимодействуют, только когда какие-то две из них оказываются в одной точке. Такое "точечное взаимодействие" математически описывается потенциалом в виде δ-функции. Гамильтониан в координатном представлении имеет вид

$$\hat{H}_N = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1\le j<k\le N} \delta(x_j - x_k). \tag{1.52}$$

Мы положили $\hbar = 1$, масса частицы $= \frac{1}{2}$. При $c = 0$ имеем систему свободных (невзаимодействующих) частиц. При $c > 0$ частицы отталкиваются друг от друга (им энергетически невыгодно находиться в одной точке), при $c < 0$ притягиваются. Ниже мы будем рассматривать случай отталкивания $c > 0$.

По правилам квантовой механики оператор импульса такой системы частиц есть

$$\hat{P}_N = -i\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.53}$$

Он коммутирует с гамильтонианом, поскольку взаимодействие зависит только от разностей координат (полный импульс сохраняется). Стационарное уравнение Шредингера для волновой функции Ψ имеет вид

$$\hat{H}_N \Psi(x_1, \ldots, x_N) = E\Psi(x_1, \ldots, x_N). \tag{1.54}$$

Его-то мы и хотим решить. А точнее, мы хотим, как и в случае XXX-модели, найти общие собственные функции гамильтониана и оператора полного импульса, а также, в первую очередь, собственные значения энергии на таких состояниях (спектр).

В формализме вторичного квантования данная модель описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \int \Big(\partial_x \psi^\dagger(x)\partial_x\psi(x) + c\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi(x)\Big), \tag{1.55}$$

где $\psi^\dagger$, ψ – операторы рождения и уничтожения бозе-частиц, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\psi(x,t), \psi^\dagger(y,t)] = \delta(x-y), \quad [\psi(x,t), \psi(y,t)] = [\psi^\dagger(x,t), \psi^\dagger(y,t)] = 0.$$

Уравнение движения имеет вид

$$i\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi + 2c\psi^\dagger\psi\psi \tag{1.56}$$

и называется квантовым нелинейным уравнением Шредингера. Поэтому и сама модель часто называется квантовым нелинейным уравнением Шредингера. Фоковский вакуум определяется уравнением $\psi(x)\left|0\right\rangle = 0$. В N-частичном секторе собственные состояния гамильтониана строятся как

$$\left|\Psi\right\rangle = \int dx_1 \ldots dx_N \Psi(x_1, \ldots, x_N)\psi^\dagger(x_1)\ldots\psi^\dagger(x_N)\left|0\right\rangle,$$

где $\Psi(x_1, \ldots, x_N)$ – волновая функция, удовлетворяющая уравнению (1.54).

1.2.1 Волновая функция Бете

В этом разделе мы будем работать в формализме первичного квантования. Начнем опять с тривиального случая одной частицы. Имеем:

$$\Psi(x_1) = e^{ip_1x_1}, \qquad E = p_1^2$$

Если наложить периодические граничные условия $\Psi(x_1 + L) = \Psi(x_1)$, импульс p_1 будет квантоваться: $p_1 = 2\pi\ell/L$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Поскольку частица одна, взаимодействие никак не проявляется.

Для двух частиц задача становится интереснее:

$$-(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\Psi(x_1, x_2) + 2c\delta(x_1 - x_2)\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2)$$

При $x_1 = x_2$ имеется особенность. Волновая функция при этом непрерывная, но ее производные испытывают скачок. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, и частицы ведут себя как свободные, т.е волновую функцию при, например, $x_1 < x_2$ можно искать в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(p_1x_1+p_2x_2)} + A_{21}e^{i(p_1x_2+p_2x_1)},$$

при этом $-(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\Psi = E\Psi$ с $E = p_1^2 + p_2^2$.

Дельта-функционный потенциал эквивалентен наложению определенного граничного условия на эту функцию при $x_1 = x_2 - 0$. Несложные аргументы показывают, что условие это таково:

$$(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\,\Psi\Big|_{x_1 = x_2 - 0} = 0 \tag{1.57}$$

откуда находим

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{p_1 - p_2 - ic}{p_1 - p_2 + ic} \tag{1.58}$$

Чтобы вывести данное условие, перейдем к координатам $x = x_2 - x_1$, $X = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$, тогда $\partial_{x_2} - \partial_{x_1} = 2\partial_x$, $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = 2\partial_x^2 + \frac{1}{2}\partial_X^2$, и уравнение Шредингера запишется в виде

$$-2\partial_x^2\Psi + 2c\delta(x)\Psi = (E + \frac{1}{2}\,\partial_X^2)\Psi$$

В правой части собраны члены, которые остаются конечными при $x = 0$. Левая часть тоже должна быть конечной, а это значит, что особенность δ-функционного члена должна компенсироваться разрывом первой производной Ψ в точке $x = 0$. Иными словами, проинтегрируем обе части уравнения по x по малому интервалу $[0, \varepsilon]$ и устремим $\varepsilon \to 0$:

$$\int_0^\varepsilon (-2\partial_x^2\Psi + 2c\delta(x)\Psi)dx = 0$$

В правой части мы написали 0, поскольку в пределе $\varepsilon \to 0$ все члены в правой части исчезают. Имеем, следовательно, соотношение

$$-2\partial_x\Psi\Big|_0^\varepsilon + 2c\int_0^\varepsilon \delta(x)\Psi dx = 0$$

Возникает вопрос, как понимать интеграл от δ-функции по отрезку, левым концом которого является носитель δ-функции – точка $x = 0$. В большинстве изложений метода Бете для этой модели интегрирование здесь проводится по отрезку $|x| \leq \varepsilon$, что, с одной стороны, снимает эту проблему, а с другой требует продолжения волновой функции в область $x_1 > x_2$, в которой она изначально не была определена. (Между тем, исходная задача по сути не предполагает такого доопределения.) Конечно, всегда предполагается симметричное продолжение, и это правильно, но нам кажется важным, что есть возможность провести все рассуждения, оставаясь в секторе $x_1 \leq x_2$. А если так, то интеграл, одним из пределов которого является носитель δ-функции, надо понимать как *половину* такого интеграла по отрезку, содержащего носитель внутри, поскольку работать будет только половина δ-функции. Аналогично, $\partial_x\Psi(0)$ надо понимать как 0 в силу симметрии. Поэтому наше условие говорит, что

$$2\lim_{x\to+0}\partial_x\Psi(x) = c\Psi(0)$$

что совпадает с (1.57).

Более формальный способ действий заключается в том, чтобы искать решение во всей области изменения координат x_1, x_2, но при этом сразу наложить условие симметрии волновой функции $\Psi(x_1,x_2) = \Psi(x_2,x_1)$. А именно, будем искать решение в виде

$$\Psi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)\theta(x_2-x_1) + f(x_2,x_1)\theta(x_1-x_2)$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда ($\theta(x)=1$ при $x>0$ и $\theta(x)=0$ при $x<0$), а

$$f(x_1,x_2) = A_{12}e^{i(p_1x_1+p_2x_2)} + A_{21}e^{i(p_1x_2+p_2x_1)}$$

это функция, которую мы ранее обозначали через Ψ. Заметим, что если доопределить функцию Хэвисайда условием $\theta(0)=\frac{1}{2}$, функция Ψ будет непрерывна при $x_1=x_2$. Т.к. $\partial_x\theta(x)=\delta(x)$, имеем в результате прямого вычисления:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{x_1}\Psi(x_1,x_2) \;&=\; \partial^2_{x_1}f(x_1,x_2)\theta(x_2-x_1) + \partial^2_{x_1}f(x_2,x_1)\theta(x_1-x_2)\\
&-\; 2\partial_{x_1}f(x_1,x_2)\delta(x_1-x_2) + 2\partial_{x_1}f(x_2,x_1)\delta(x_1-x_2)\\
&-\; f(x_1,x_2)\delta'(x_1-x_2) + f(x_2,x_1)\delta'(x_1-x_2)
\end{aligned}$$

Аналогично для $\partial^2_{x_2}\Psi(x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{x_2}\Psi(x_1,x_2) \;&=\; \partial^2_{x_2}f(x_1,x_2)\theta(x_2-x_1) + \partial^2_{x_2}f(x_2,x_1)\theta(x_1-x_2)\\
&+\; 2\partial_{x_2}f(x_1,x_2)\delta(x_1-x_2) - 2\partial_{x_2}f(x_2,x_1)\delta(x_1-x_2)\\
&-\; f(x_1,x_2)\delta'(x_1-x_2) + f(x_2,x_1)\delta'(x_1-x_2)
\end{aligned}$$

В сумме имеем:

$$\begin{aligned}
(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2})\Psi(x_1,x_2) \;&=\; \theta(x_2-x_1)(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2})f(x_1,x_2) + \theta(x_1-x_2)(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2})f(x_2,x_1)\\
&-\; 2\delta(x_1-x_2)(\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\left[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)\right]\\
&-\; 2\delta'(x_1-x_2)\left[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)\right]
\end{aligned}$$

Отметим, что член с δ' автоматически не зануляется. Его надо понимать в смысле обобщенных функций как

$$\delta'(x_1-x_2)\varphi(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}\,\delta(x_1-x_2)(\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\varphi(x_1,x_2),$$

что верно для любой антисимметричной непрерывной функции φ, поскольку интегралы с любой гладкой пробной функцией от обеих частей равны. Учтя это, получим:

$$\begin{aligned}
(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2})\Psi(x_1,x_2) \;&=\; \theta(x_2-x_1)(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2})f(x_1,x_2) + \theta(x_1-x_2)(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2})f(x_2,x_1)\\
&-\; \delta(x_1-x_2)(\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\left[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)\right]
\end{aligned}$$

Т.к. $(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,[f(x_1,x_2) - f(x_2,x_1)] = i(A_{12} - A_{21})(p_1 - p_2)(e^{i(p_1x_1+p_2x_2)} + e^{i(p_2x_1+p_1x_2)})$, и в членах с δ-функцией можно положить $x_2 = x_1$, окончательно имеем:

$$\hat{H}_N\Psi = (p_1^2 + p_2^2)\Psi + 2\delta(x_1 - x_2)\Big(c(A_{12} + A_{21}) + i(A_{12} - A_{21})(p_1 - p_2)\Big)e^{i(p_1+p_2)x_1}$$

Потребовав зануления последнего члена, приходим к тому же соотношению (1.58).

В случае N частиц волновую функцию в секторе $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_N \le L$ пишем в виде

$$\Psi = \sum_{\sigma \in S_N} A_\sigma \exp\Big(i \sum_{j=1}^{N} p_{\sigma(j)} x_j\Big) \tag{1.59}$$

с граничными условиями

$$\Big(\partial_{x_{j+1}} - \partial_{x_j} - c\Big)\Psi\Big|_{x_j = x_{j+1} - 0} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Данные условия получаются совершенно аналогично случаю двух частиц. А именно, рассмотрим волновую функцию как функцию от x_j и x_{j+1} при $x_j \to x_{j+1} - 0$, вместо x_j, x_{j+1} введем координаты $x = x_{j+1} - x_j$ и $X = \frac{1}{2}(x_{j+1} + x_j)$ и проинтегрируем уравнение Шредингера по x от 0 до ε при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. Точная волновая функция N-частичного гамильтонана (1.52) в секторе $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N \le L$ имеет вид

$$\Psi = C \prod_{m<n} \Big(i\partial_{x_m} - i\partial_{x_n} - ic\Big) \det_{1 \le j,k \le N} \Big(e^{ip_j x_k}\Big) \tag{1.60}$$

Для доказательства нужно проверить, что она представляется в виде (1.59), и что выполняются граничные условия. Первое очевидно из разложения детерминанта,

$$\Psi = C \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{[\sigma]} \prod_{m<n} (p_{\sigma(m)} - p_{\sigma(n)} - ic)\, \exp\Big(i \sum_{j=1}^{N} p_{\sigma(j)} x_j\Big) \tag{1.61}$$

а второе удобнее проверять в форме (1.60), не раскладывая детерминант. Проверим, например, условие $(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi\Big|_{x_1 = x_2 - 0} = 0$. Для этого заметим, что $\Psi = -i(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} + c)\tilde{\Psi}$, где

$$\tilde{\Psi} = C \prod_{j=3}^{N} \Big(i\partial_{x_1} - i\partial_{x_j} - ic\Big) \Big(i\partial_{x_2} - i\partial_{x_j} - ic\Big) \times \prod_{3 \le m < n \le N} \Big(i\partial_{x_m} - i\partial_{x_n} - ic\Big) \det_{1 \le j,k \le N} \Big(e^{ip_j x_k}\Big)$$

Функция $\tilde{\Psi}$, очевидно, антисимммметрична относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$. Переписав левую часть интересующего нас условия $(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi\Big|_{x_1 = x_2 - 0} = 0$ в виде $-i\left((\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^2 - c^2\right)\tilde{\Psi}$, видим, что она антисимметрична относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$, и, следовательно, равна 0.

Следствие. Точная волновая функция N-частичного гамильтонана (1.52) симметризованная по всем частицам, имеет вид

$$\Psi_N^{\mathrm{symm}} = C_N \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{[\sigma]} \prod_{m<n} \Big(p_{\sigma(m)} - p_{\sigma(n)} + ic\,\mathrm{sign}\,(x_m - x_n)\Big)\, \exp\Big(i \sum_{j=1}^{N} p_{\sigma(j)} x_j\Big). \tag{1.62}$$

Если надо указать зависимость волновой функции от координат и параметров, будем писать $\Psi_N^{\rm symm} = \Psi_N^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p_i\})$.

Нормировочную константу C_N (она зависит от N и всех параметров p_i) можно определить из условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \ldots dx_N \Psi_N^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p_i\}) \Psi_N^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p'_i\}) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \delta(p_i - p'_i) \tag{1.63}$$

При этом предполагается, что параметры p_i, p'_i лежат в области $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$, $p'_1 < p'_2 < \ldots < p'_N$. Выполняется также соотношение полноты

$$\int_{\mathbb{R}^N} dp_1 \ldots dp_N \Psi_N^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p_i\}) \Psi_N^{\rm symm}(\{x'_i\}|\{p_i\}) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \delta(x_i - x'_i) \tag{1.64}$$

При этом предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_N$.

Задача. Показать, что нормировочная константа C_N дается формулой

$$C_N = \left\{ N! \prod_{j<k} \Big[(p_j - p_k)^2 + c^2 \Big] \right\}^{-1/2} \tag{1.65}$$

и проверить условия нормировки и полноты.

Предельный случай $c \to \infty$ соответствует системе непроницаемых бозе-частиц. В этом случае волновая функция Ψ в секторе $x_1 < \ldots < x_N$ совпадает с таковой для N свободных фермионов, т.е. $\det_{jk}(e^{ip_j x_k})$ (“слэтеровский детерминант”), а $\Psi^{\rm symm} \propto \det_{jk} e^{ip_j x_k} \prod_{j<k} \mathrm{sign}\,(x_j - x_k)$.

Итак, точные собственные функции N-частичного гамильтонана (1.52) (волновые функции Бете) имеют вид (1.61), (1.60) или в симметризованном варианте (1.62). Они параметризуются N числами $p_1, \ldots, p_N$. Собственные значения импульса и энергии для них:

$$P = \sum_{j=1}^{N} p_j\,, \qquad E = \sum_{j=1}^{N} p_j^2. \tag{1.66}$$

Отметим, что из представления (1.60) очевидно, что волновая функция тождественно зануляется если найдется такая пара индексов $j \neq k$, для которых $p_j = p_k$ (принцип Паули для одномерных бозонов).

1.2.2 Уравнения Бете

Наложение периодических граничных условий (т.е. помещение частиц на отрезок длины L с отождествленными концами) ведет к уравнениям на возможные значения параметров p_j.

Кажется очевидным, что надо потребовать периодичности функции $\Psi^{\rm symm}$ по каждому аргументу, т.е. $\Psi^{\rm symm}(x_1, \ldots, x_j + L, \ldots, x_N) = \Psi^{\rm symm}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N)$ для всех j, как это часто делают в обзорах и лекционных курсах. Однако, это *неверно*! Пример $N = 2$ показывает, что условия $\Psi^{\rm symm}(x_1 + L, x_2) = \Psi^{\rm symm}(x_1, x_2)$ и

$\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2 + L) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$, вообще говоря, противоречивы (!). Первое дает уравнения Бете $e^{ip_1 L} = A_{12}/A_{21}$, $e^{ip_2 L} = A_{21}/A_{12}$, а второе – условия квантования импульсов свободных частиц в ящике $e^{ip_1 L} = e^{ip_2 L} = 1$. Казалось бы, это противоречит симметрии волновой функции. В действительности симметрия не нарушается, поскольку правильный способ действий состоит в том, чтобы условие $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1 + L, x_2) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$ накладывать при $x_1 < x_2$, а условие $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2 + L) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$ – при $x_1 > x_2$, но все равно это выглядит несколько странно.

Задача. Попробовать самостоятельно разобраться с тем, что здесь происходит.

Объяснение всех этих "странностей" в том, что прежде чем накладывать периодические граничные условия, необходимо модифицировать потенциал взаимодействия в уравнении Шредингера, сделав его L-периодическим, т.е. вместо $\delta(x)$ написать $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x + kL)$. Иначе возникнет несогласованность, которая и проявилась в приведенном выше примере. Поэтому возможны два способа действий, которые не следует смешивать. Первый – модифицировать волновую функцию (1.62) так, чтобы она решала уравнение Шредингера с периодическим δ-образным потенциалом, а уже потом требовать ее периодичности. Второй – оставить решение как есть, но ограничиться в рассмотрении конфигурациями, в которых разность координат любой пары частиц по модулю не превышает L (тогда работает только одна δ-функция, и решение модифицировать не надо). Можно, например, ограничиться сектором $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < L + a$ с любым a.

Рассуждения, близкие к тем, которые были использованы при выводе условия периодичности в XXX-модели, приводят к условию

$$\boxed{\begin{array}{c}\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \Psi(x_2, x_3, \ldots x_N, x_1 + L) \\[2ex] \text{в секторе} \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_N\end{array}} \tag{1.67}$$

Оно эквивалентно системе уравнений Бете на параметры p_j:

$$e^{ip_j L} = \prod_{k\neq j} \frac{p_j - p_k + ic}{p_j - p_k - ic}, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{1.68}$$

Можно показать, что в отличие от XXX-модели, все их решения при $c > 0$ вещественны.

Задача. Для системы трех тождественных бозе-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H}_3 = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1\leq j<k\leq 3} \delta(x_j - x_k)$$

а) построить общие собственные состояния гамильтониана и оператора полного импульса $\hat{P} = -i \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$,

б) наложить периодические граничные условия на отрезке $[0, L]$ и получить систему уравнений Бете.

Задача. Найти собственные состояния и спектр энергий одной и двух бозе-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H}_N = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1\le j<k\le N} \delta(x_j - x_k) \qquad (N = 1, 2)$$

на отрезке $[0, L]$ с непроницаемыми стенками (последнее означает, что волновая функция обращается в 0, если хотя бы одна из частиц находится на краю отрезка).

Отметим, что после замены $p_j = \lambda_j$ правые части уравнений Бете для XXX-модели и бозе-газа совпадают. На самом деле это общая закономерность – возможный вид правых частей уравнений Бете диктуется общими интегрируемыми структурами (которые пока остаются за кадром), и позволяет разделить квантовые интегрируемые модели на небольшое число классов, а левые части могут выражаться через произвольную функцию от λ, которая задает конкретную модель внутри класса. Так, мы видим, что XXX-магнетик и бозе-газ относятся к одному классу, а XXZ-магнетик – к другому. Уместна аналогия с теорией представлений – правые части уравнений Бете аналогичны структурным константам алгебры, а левые – выбору ее представления.

Имея в виду это замечание, будем писать уравнения Бете для бозе-газа в терминах λ:

$$\boxed{e^{i\lambda_j L} = \prod_{k\neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k - ic}, \qquad j = 1, \ldots, N} \tag{1.69}$$

Модель бозе-газа характеризуется тем, что в ней параметр λ наиболее просто связан с импульсом частицы.

Для анализа этой системы уравнений полезно их прологарифмировать:

$$L\lambda_j + \sum_{k\neq j} \tilde{\Phi}(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi \tilde{n}_j \tag{1.70}$$

Здесь $\tilde{\Phi}(\lambda) = i \log \dfrac{\lambda + ic}{\lambda - ic}$, а $\tilde{n}_j$ – какие-то целые числа. Вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$ удобно ввести антисимметричную функцию

$$\Phi(\lambda) = \tilde{\Phi}(\lambda) + \pi = 2\mathrm{arctg}\Big(\lambda/c\Big) \tag{1.71}$$

и переопределить числа $\tilde{n}_j$, введя $n_j = \tilde{n}_j + \frac{1}{2}(N-1)$ (при четных N эти числа будут полуцелыми). Тогда наши уравнения примут вид

$$\boxed{L\lambda_j + \sum_{k} \Phi(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi n_j} \tag{1.72}$$

(отметим, что поскольку $\Phi(0) = 0$, в сумме можно снять ограничение $k \neq j$). Их мы тоже будем называть уравнениями Бете. Запись в форме (1.72) предпочтительнее, поскольку можно доказать (см. ниже), что решения этой системы, такие, что $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$, существуют и единственным образом определяются наборами целых или полуцелых чисел n_j, среди которых нет совпадающих.

Лемма. Если $n_j > n_k$, то $\lambda_j > \lambda_k$; если $n_j = n_k$, то $\lambda_j = \lambda_k$.

Для доказательства рассмотрим разность двух уравнений системы:

$$L(\lambda_j - \lambda_k) + 2\sum_{l=1}^{N}\Big(\operatorname{arctg}\left((\lambda_j - \lambda_l)/c\right) - \operatorname{arctg}\left((\lambda_k - \lambda_l)/c\right)\Big) = 2\pi(n_j - n_k)$$

Поскольку arctg – монотонно возрастающая функция, левая часть положительна если и только если $\lambda_j > \lambda_k$ и равна 0 если и только если $\lambda_j = \lambda_k$. Поэтому при $n_j > n_k$ должно быть $\lambda_j > \lambda_k$, а при $n_j = n_k$ должно быть $\lambda_j = \lambda_k$.

Лемма. Функционал энергии $E = \sum \lambda_j^2$ в модели с N частицами минимизируется на состоянии со следующим набором чисел n_j:

$$n_j = -\frac{N+1}{2} + j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.73}$$

Иными словами, в основном состоянии числа n_j заполняют интервал от $-\frac{1}{2}\,(N-1)$ до $+\frac{1}{2}\,(N-1)$, следуя через 1 без пропусков. Это более-менее понятно из соображений симметрии, но в литературе можно найти и строгое доказательство.

Задача. Показать, что в состоянии, которое характеризуется числами n_j, полный импульс равен $P = \dfrac{2\pi}{L}\displaystyle\sum_j n_j$.

1.2.3 Действие Янга

Перенесем все члены в уравнениях Бете (1.72) в одну часть и обозначим

$$\mathcal{B}_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \equiv L\lambda_j - 2\pi n_j + \sum_k \Phi(\lambda_j - \lambda_k)$$

тогда уравнения Бете гласят, что $\mathcal{B}_j = 0$.

Задача. Показать, что

$$\frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial \lambda_l} = \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial \lambda_j} \tag{1.74}$$

Отсюда следует, что существует функция $\mathcal{Y}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, такая, что $\mathcal{B}_j = \partial\mathcal{Y}/\partial\lambda_j$. Функция $\mathcal{Y}$ называется действием Янга (или Янга-Янга) и играет важную роль. Уравнения Бете получаются как условия экстремума действия Янга,

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \lambda_j} = 0\,.$$

Для модели бозе-газа

$$\mathcal{Y} = \frac{L}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 - 2\pi\sum_{j=1}^{N} n_j\lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}\Phi_1(\lambda_j - \lambda_k) \tag{1.75}$$

где

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^\lambda \Phi(\mu)d\mu = 2\lambda\operatorname{arctg}(\lambda/c) - c\log\Big(1 + \frac{\lambda^2}{c^2}\Big) \quad -$$

первообразная функции $\Phi(\lambda)$.

На самом деле возможность сформулировать уравнения Бете в виде вариационного принципа является общим фактом и имеет место также и для других моделей. Случай бозе-газа с отталкиванием выделен тем, что для него функция Янга обладает особенно хорошими свойствами, позволяющими строго доказать такое, например, утверждение.

Теорема. Решения системы (1.72) существуют и единственным образом определяются наборами целых или полуцелых чисел n_j.

Как уже говорилось, уравнения Бете (1.72) получаются как условия экстремума функции Янга, $\partial\mathcal{Y}/\partial\lambda_j = 0$. Утверждение теоремы следует из того, что функция Янга выпукла, а потому этот экстремум является минимумом, и он единствен. Для доказательства выпуклости функции Янга достаточно проверить, что матрица вторых производных (гессиан) $\mathcal{Y}_{jk} = \partial^2\mathcal{Y}/\partial\lambda_j\partial\lambda_k$ является положительно определенной, т.е. все ее собственные значения положительны. Эта матрица имеет вид

$$\mathcal{Y}_{jk} = \delta_{jk}\Big(L + \sum_{l=1}^{N} K(\lambda_j - \lambda_l)\Big) - K(\lambda_j - \lambda_k)$$

где

$$K(\lambda - \mu) = \Phi'(\lambda - \mu) = \frac{2c}{(\lambda - \mu)^2 + c^2}\,. \tag{1.76}$$

Для любого вещественного вектора v_j имеем:

$$\sum_{jk} \mathcal{Y}_{jk} v_j v_k = L \sum_j v_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} K(\lambda_j - \lambda_k)(v_j - v_k)^2 > 0$$

(здесь важно, что $c > 0$). Это означает, что матрица $\mathcal{Y}_{jk}$ положительно определена при всех λ_j, функция $\mathcal{Y}$ выпукла и имеет единственный минимум.

Для моделей XXX и XXZ выпуклость функции Янга, вообще говоря, не имеет места, и поэтому строгие доказательства аналогичных утверждений затруднены.

Важность матрицы $\mathcal{Y}_{jk}$ обусловлена также тем, что через ее детерминант выражается квадрат нормы бетевского состояния системы в конечном объеме. Именно, для функции $\Psi_N^{\rm symm}$ (1.62) с константой C_N как в (1.65) и импульсами $p_j = \lambda_j$, удовлетворяющими системе уравнений Бете, верно следующее:

$$\int_0^L \ldots \int_0^L |\Psi_N^{\rm symm}|^2\, dx_1 \ldots dx_N = \det_{1 \le j,k \le N} \mathcal{Y}_{jk} \tag{1.77}$$

Подчеркнем, что это утверждение верно *только* для состояний, параметры λ_j в которых удовлетворяют уравнениям Бете. Прямая проверка этой формулы нетривиальна уже в случае $N = 2$.

Задача. Найти явный вид функции Янга для XXX-модели.

1.2.4 Решение уравнений Бете в термодинамическом пределе

Под термодинамическим пределом мы понимаем предел $N \to \infty$, $L \to \infty$, причем величина $\rho_0 = N/L$, которая имеет смысл средней плотности частиц в конфигурационном пространстве, остается конечной.

Основное состояние. Сначала исследуем основное состояние (вакуум). Согласно приведенной выше лемме, числа n_j надо выбирать как в (1.73). Полный импульс равен 0. Числа n_j и λ_j располагаются без пропусков симметрично относительно 0, образуя аналог моря Дирака. В пределе числа λ_j располагаются на некотором интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ все теснее друг к другу. Введем плотность их распределения формулой

$$\rho(\lambda_j) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{1}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \tag{1.78}$$

Эта функция позволяет заменять суммы на интегралы по правилу

$$\sum_j f(\lambda_j) = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Возьмем два соседних уравнения (1.72) (для $j+1$ и j) и вычтем их друг из друга:

$$L(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \sum_k [\Phi(\lambda_{j+1} - \lambda_k) - \Phi(\lambda_j - \lambda_k)] = 2\pi$$

Считая разность $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ малой, разложим выражение под знаком суммы в ряд Тейлора и оставим первый член. Разделив после этого обе части на $L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$, будем иметь:

$$1 + \frac{1}{L}\sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k) = \frac{2\pi}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \tag{1.79}$$

Заменяя сумму на интеграл и вспоминая определения плотности (1.78) и функции $K(\lambda - \mu)$ (1.76), окончательно получим интегральное уравнение на функцию распределения плотности:

$$\boxed{2\pi\rho(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu)\rho(\mu)d\mu = 1} \tag{1.80}$$

Несколько более формальный способ вывести это уравнение из исходных данных заключается в том, чтобы определить функцию плотности формулой $\rho(\lambda) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \delta(\lambda - \lambda_j)$ и сразу представить (1.72) как интегральное уравнение

$$\lambda + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \Phi(\lambda - \mu)\rho(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi n(\lambda)}{L}$$

где $n(\lambda) = \sum_j \theta(\lambda - \lambda_j)$ – неубывающая ступенчатая функция, которая “считает”, сколько импульсов находится слева от точки λ. Дифференцируя по λ, приходим к (1.80). При этом сингулярная функция $\rho(\lambda)$ в пределе становится непрерывной – пики сгущаются, а их высота уменьшается.

В отличие от XXX-модели, решение этого уравнения не выражается через известные функции (из-за конечности пределов), но может быть эффективно найдено численно, и, кроме того, можно доказать ряд строгих утверждений о существовании решения и его основных свойствах. Мы не будем на этом останавливаться.

Величина Λ (импульс Ферми) определяется из условия нормировки

$$\rho_0 = \frac{N}{L} = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda)d\lambda \tag{1.81}$$

Энергия основного состояния дается формулой

$$E^{(0)} = L\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda^2 \rho(\lambda)d\lambda \tag{1.82}$$

Элементарные возбуждения. Покажем на простейшем примере, как техника анзаца Бете позволяет строить возбужденные состояния (собственные состояния гамильтониана с энергией $E > E^{(0)}$). В физике основной интерес представляют низколежащие возбуждения, т.е. такие, что $E - E^{(0)}$ остается конечной при $L \to \infty$. Они интерпретируются как физически наблюдаемые "одетые" частицы и их состояния рассеяния, в отличие от "голых" частиц, в терминах которых был написан исходный гамильтониан.

Мы ограничимся состояниями, в которых число частиц не меняется. Простейшие возбуждения соответствуют выбору последовательности целых или полуцелых чисел n_j в следующем виде:

$$\{n_j\} = \Big\{-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2} - m^h - 1, \frac{N-1}{2} - m^h + 1, \ldots, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} + m^p\Big\}$$

Здесь m^h и m^p – целые положительные числа. Это можно интерпретировать как рождение "частицы" в месте m^p и "дырки" в месте m^h (последнее означает изъятие числа $\frac{N-1}{2} - m^h$ из последовательности). Будем считать, что $m^h < \frac{N-1}{2}$, так что изъятие происходит в правой половине последовательности. Соответственно, можно ввести импульс добавленной частицы λ^p как параметр Бете, отвечающий добавленному числу $\frac{N-1}{2} + m^p$ и импульс дырки λ^h как параметр Бете, отвечавший изъятому числу $\frac{N-1}{2} - m^h$ в вакуумном решении.

При этом важно заметить, что полный импульс возбужденного состояния *не равен* $\lambda^p - \lambda^h$ (а равен $P = \frac{2\pi}{L}(m^p + m^h)$), поскольку в новом решении уравнений Бете значения всех остальных параметров λ_j немного подвинулись по сравнению с их вакуумными значениями. А так как их много ($O(N)$), суммарный вклад таких изменений может быть $O(1)$, т.е. того же порядка, что и $\lambda^p - \lambda^h$. Физики говорят, что $\lambda^p - \lambda^h$ – "голый" импульс возбуждения, а $\frac{2\pi}{L}(m^p + m^h)$ – наблюдаемый или "одетый" импульс, обусловленный взаимодействием. Отметим, что при $c = \infty$ они совпадают.

Чтобы найти реакцию "моря Дирака" на создание частицы и дырки, воспользуемся уже проверенным приемом – вычтем друг из друга уравнения Бете для возбужденного и вакуумного состояний и разложим по малым $\delta\lambda_j = \tilde{\lambda}_j - \lambda_j = O(1/L)$. Здесь λ_j – значение j-го корня Бете для основного состояния, а $\tilde{\lambda}_j$ – для возбужденного. Мы получим, для $1 \le j \le N - m^h - 1$:

$$(\tilde{\lambda}_j - \lambda_j)L + \sum_k \Big[\Phi(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) - \Phi(\lambda_j - \lambda_k)\Big] = \Phi(\lambda_j - \lambda^h) - \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^p).$$

Слагаемые, содержащие целые числа n_j, сократились, поскольку эти числа в обоих состояниях одинаковы для всех таких j. Члены, отвечающие частице и дырке, перенесены в правую часть. После разложения по малым $\delta\lambda_j = \tilde{\lambda}_j - \lambda_j$ эти уравнения в лидирующем порядке примут вид

$$\delta\lambda_j L + \delta\lambda_j \sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k) - \sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k)\delta\lambda_k = \Phi(\lambda_j - \lambda^h) - \Phi(\lambda_j - \lambda^p)$$

где в правой части мы заменили $\tilde{\lambda}_j$ на λ_j, поскольку разница заметна только в следующем порядке. Первые два члена в левой части можно преобразовать, воспользовавшись (1.79):

$$2\pi\,\frac{\tilde{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} - \frac{1}{L}\sum_k K(\lambda_j - \lambda_k)\,\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\,L(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \Phi(\lambda_j - \lambda^h) - \Phi(\lambda_j - \lambda^p)$$

Введя *функцию сдвига*

$$F(\lambda_j|\lambda^h,\lambda^p)=\lim_{N,L\to\infty}\frac{\tilde{\lambda}_j-\lambda_j}{\lambda_{j+1}-\lambda_j}=\lim_{N,L\to\infty}\Big(L\delta\lambda_j\rho(\lambda_j)\Big) \qquad (1.83)$$

запишем то, что получилось, в виде интегрального уравнения

$$\boxed{2\pi F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)-\int_{-\Lambda}^{\Lambda}K(\lambda-\mu)F(\mu|\lambda^h,\lambda^p)d\mu=\Phi(\lambda-\lambda^h)-\Phi(\lambda-\lambda^p)} \qquad (1.84)$$

Здесь исходно $\lambda^h<\Lambda$, $\lambda^p>\Lambda$, но решение может быть аналитически продолжено на всю вещественную ось. Из вида правой части следует, что

$$F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)=f(\lambda|\lambda^p)-f(\lambda|\lambda^h),$$

где $f(\lambda|\mu)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$2\pi f(\lambda|\mu)-\int_{-\Lambda}^{\Lambda}K(\lambda-\nu)f(\nu|\mu)d\nu=-\Phi(\lambda-\mu). \qquad (1.85)$$

Как легко видеть, из того, что функция $\Phi(\lambda)$ нечетная, следует, что

$$f(-\lambda|-\mu)=-f(\lambda|\mu). \qquad (1.86)$$

Функцию $f(\lambda|\mu)$ тоже будем называть функцией сдвига. Ниже будет выяснен ее физический смысл.

Энергия возбужденного состояния выразится в виде

$$\begin{aligned}E-E^{(0)} &= (\lambda^p)^2-(\lambda^h)^2+\sum_j(\tilde{\lambda}_j^2-\lambda_j^2)=(\lambda^p)^2-(\lambda^h)^2+2\sum_j\lambda_j\delta\lambda_j \\ &= (\lambda^p)^2-(\lambda^h)^2+2\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\lambda F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)d\lambda=\varepsilon(\lambda^p)-\varepsilon(\lambda^h),\end{aligned} \qquad (1.87)$$

где

$$\varepsilon(\lambda)=\lambda^2-h+2\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\mu f(\mu|\lambda)d\mu, \qquad (1.88)$$

где константа h подбирается из условия, чтобы $\varepsilon(\pm\Lambda)=0$. Отметим, что $\varepsilon(\lambda)$ – четная функция в силу (1.86). Импульс же равен

$$P=\lambda^p-\lambda^h+\sum_j(\tilde{\lambda}_j-\lambda_j)=\lambda^p-\lambda^h+\int_{-\Lambda}^{\Lambda}F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)d\lambda. \qquad (1.89)$$

Домножив обе части уравнения (1.84) на $\rho(\lambda)$ и проинтегрировав по λ, получим

$$\int_{\Lambda}^{\Lambda}F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)d\lambda=\int_{\Lambda}^{\Lambda}\Big(\Phi(\lambda-\lambda^h)-\Phi(\lambda-\lambda^p)\Big)\rho(\lambda)d\lambda,$$

откуда следует другая формула для импульса возбужденного состояния:

$$P=\lambda^p-\lambda^h+\int_{\Lambda}^{\Lambda}\Big(\Phi(\lambda-\lambda^h)-\Phi(\lambda-\lambda^p)\Big)\rho(\lambda)d\lambda. \qquad (1.90)$$

Рассмотрим теперь случай нескольких частиц и дырок. В предыдущих рассуждениях числа физических частиц и дырок были равны. Можно избавиться от этого ограничения, если не считать полное число N “голых” частиц фиксированным. Пусть имеется m частиц и n дырок с параметрами λ_a^p, λ_b^h. Функция сдвига вводится аналогично (1.83):

$$F(\lambda_j|\{\lambda_b^h\},\{\lambda_a^p\}) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{\lambda'_j - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}, \tag{1.91}$$

где теперь λ'_j – значения корней Бете в присутствии m частиц и n дырок. Интегральное уравнение для этой функции сдвига выводится аналогично (1.84):

$$2\pi F(\lambda|\{\lambda_a^h\},\{\lambda_a^p\}) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu) F(\mu|\{\lambda_a^h\},\{\lambda_a^p\}) d\mu = \sum_{b=1}^{n} \Phi(\lambda-\lambda_b^h) - \sum_{a=1}^{m} \Phi(\lambda-\lambda_a^p). \tag{1.92}$$

Его решение имеет вид

$$F(\lambda|\{\lambda_b^h\},\{\lambda_a^p\}) = \sum_{a=1}^{m} f(\lambda|\lambda_a^p) - \sum_{b=1}^{n} f(\lambda|\lambda_b^h). \tag{1.93}$$

Скорость звука. Рассмотрим более подробно возбуждение, отвечающее одной частице. Построенные нами возбужденные состояния отвечают безмассовым частицам, поскольку имеют линейный закон дисперсии $E = v_s P$ при $P \to 0$, где v_s имеет смысл скорости звука. Для того, чтобы увидеть это и выразить скорость звука через исходные величины, надо проделать некоторые вычисления. Согласно определению скорости звука,

$$v_s = \frac{\partial E}{\partial P}\bigg|_{P=0} = \frac{\varepsilon'(\lambda)}{P'(\lambda)}\bigg|_{\lambda=\Lambda}, \tag{1.94}$$

где P рассматривается как функция от $\lambda = \lambda^p$ (см. (1.90)). Из (1.90) имеем:

$$P'(\Lambda) = 1 + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\Lambda-\lambda)\rho(\lambda) d\lambda = 2\pi\rho(\Lambda). \tag{1.95}$$

Дифференцируя уравнение (1.80) и потом интегрируя по частям, найдем:

$$2\pi\rho'(\lambda) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu)\rho'(\mu) d\mu - \rho(\Lambda)\Big(K(\lambda-\Lambda) - K(\lambda+\Lambda)\Big) \tag{1.96}$$

(здесь учтен тот факт, что $\rho(\lambda)$ – четная функция). Дифференцируя уравнение (1.85) по μ, найдем:

$$K(\lambda-\mu) = 2\pi \dot{f}(\lambda|\mu) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\nu) \dot{f}(\nu|\mu) d\nu,$$

где

$$\dot{f}(\lambda|\mu) = \frac{\partial f(\lambda|\mu)}{\partial\mu}$$

и подставим это в (1.96) вместо $K(\lambda \pm \Lambda)$. Мы получим однородное интегральное уравнение

$$2\pi g(\lambda) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu) g(\mu) d\mu$$

для функции $g(\lambda) = \rho'(\lambda) + \rho(\Lambda)(\dot{f}(\lambda|\Lambda) - \dot{f}(\lambda| - \Lambda))$, решение которого $g(\lambda) = 0$, т.е.

$$\rho'(\lambda) = -\rho(\Lambda)\Big(\dot{f}(\lambda|\Lambda) - \dot{f}(\lambda| - \Lambda)\Big). \tag{1.97}$$

Возьмем по частям интеграл в условии нормировки (1.81):

$$\rho_0 = 2\Lambda\rho(\Lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda\rho'(\lambda)d\lambda$$

и подставим сюда $\rho'(\lambda)$ из (1.97). Мы получим:

$$\rho_0 = 2\Lambda\rho(\Lambda) + \rho(\Lambda)\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\Big(\lambda\dot{f}(\lambda|\Lambda) - \lambda\dot{f}(\lambda| - \Lambda)\Big)d\lambda$$

$$= \rho(\Lambda)\left(2\Lambda + 2\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda\dot{f}(\lambda|\Lambda)d\lambda\right)$$

(второе равенство следует из того, что $\dot{f}(\lambda|-\Lambda) = \dot{f}(-\lambda|\Lambda)$ в силу (1.86)). Сравнивая это с (1.88), заключаем, что $\rho_0 = \rho(\Lambda)\varepsilon'(\Lambda)$, и тем самым для скорости звука находим

$$v_s = \frac{\rho_0}{2\pi\rho^2(\Lambda)} \tag{1.98}$$

(см. (1.94), (1.95)).

Одевающее уравнение для функции $\varepsilon(\lambda)$. Функция $\varepsilon(\lambda)$ (1.88) удовлетворяет линейному интегральному уравнению. Выведем его. Сначала выведем уравнение для производной $\varepsilon'(\lambda)$. Мы имеем, дифференцируя определение (1.88):

$$\varepsilon'(\lambda) = 2\lambda + 2\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \mu\dot{f}(\mu|\lambda)d\mu, \tag{1.99}$$

где функция $\dot{f}$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{f}(\lambda|\mu) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu)\dot{f}(\nu|\mu)d\nu = \frac{1}{2\pi}K(\lambda - \mu)$$

(см. (1.85)). Решение можно записать в виде

$$\dot{f}(\lambda|\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} R(\lambda, \nu)K(\nu - \mu)d\nu, \tag{1.100}$$

где $R(\lambda, \nu)$ – ядро интегрального оператора, обратного к $I - \frac{1}{2\pi}\hat{K}$ с ядром $\delta(\lambda - \nu) - \frac{1}{2\pi}K(\lambda - \nu)$. Поскольку ядро $K(\lambda - \mu)$ симметрично, ядро $R(\lambda, \mu)$ тоже симметрично. По определению,

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} R(\lambda, \nu)\left(\delta(\nu - \mu) - \frac{1}{2\pi}K(\nu - \mu)\right)d\nu = \delta(\lambda - \mu),$$

откуда, сравнивая это с (1.100), найдем:

$$\dot{f}(\lambda|\mu) = R(\lambda, \mu) - \delta(\lambda - \mu).$$

Теперь подставим эту формулу в (1.99):

$$\varepsilon'(\lambda) = 2\int_{-\Lambda}^{\Lambda} R(\lambda,\mu)\mu d\mu,$$

что эквивалентно интегральному уравнению

$$\varepsilon'(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu)\varepsilon'(\mu)d\mu = 2\lambda$$

или, интегрируя по частям,

$$\varepsilon'(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} K'(\lambda-\mu)\varepsilon(\mu)d\mu = 2\lambda, \tag{1.101}$$

поскольку $\varepsilon(\pm\Lambda) = 0$. Из сравнения (1.85) при $\mu \to \pm\infty$ и (1.80) следует, что $f(\lambda|\pm\infty) = \pm\pi\rho(\lambda)$, и поскольку $\rho(\lambda)$ четная функция, из (1.88) следует, что

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h + o(1) \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

Поэтому, интегрируя (1.101), получаем интегральное уравнение для $\varepsilon(\lambda)$:

$$\boxed{\varepsilon(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu)\varepsilon(\mu)d\mu = \lambda^2 - h.} \tag{1.102}$$

Иногда это уравнение называется *одевающим*, поскольку энергия “голой” частицы λ^2 “одевается” до энергии физической (“одетой”) частицы с помощью интегрального оператора с ядром $K(\lambda-\mu)$. Аналогично, интегральное уравнение (1.80) с тем же ядром одевает плотность невзаимодействующих частиц $\frac{1}{2\pi}$ до плотности $\rho(\lambda)$.

Рассеяние физических частиц. Поскольку физические частицы скалярные (не обладают внутренними степенями свободы), эффект их взаимодействия сводится к сдвигу фазы. Простые аргументы позволяют вычислить этот сдвиг фазы и заодно придать физический смысл функции сдвига $f(\lambda|\mu)$.

Вычислим сдвиг фазы $\Delta(\lambda_2,\lambda_1)$ при рассеянии двух частиц с параметрами $\lambda_1^p = \lambda_1, \lambda_2^p = \lambda_2$. Этот сдвиг фазы равен разности фазы φ_{21}, которую набирает вторая частица при обходе отрезка $[0,L]$ в присутствии первой и фазы φ_2, которую набрала бы вторая частица при обходе отрезка $[0,L]$ в отсутствии первой: $\Delta(\lambda_2,\lambda_1) = \varphi_{21} - \varphi_2$. Мы имеем:

$$\varphi_2 = L\lambda_2 + \sum_k \Phi(\lambda_2 - \tilde\lambda_k),$$

$$\varphi_{21} = L\lambda_2 + \sum_k \Phi(\lambda_2 - \lambda'_k) + \Phi(\lambda_2 - \lambda_1),$$

где $\tilde\lambda_k$ – значения корней Бете в присутствии только второй частицы, а λ'_k – значения корней Бете в присутствии обеих частиц. Тогда

$$\Delta(\lambda_2,\lambda_1) = \Phi(\lambda_2-\lambda_1) + \sum_k \Big(\Phi(\lambda_2-\lambda'_k) - \Phi(\lambda_2-\tilde\lambda_k)\Big)$$

$$= \Phi(\lambda_2-\lambda_1) - \sum_k K(\lambda_2-\lambda_1)\Big(F(\lambda_k|\{\lambda_1,\lambda_2\}) - F(\lambda_k|\lambda_2)\Big)(\lambda_{k+1}-\lambda_k).$$

Заменяя сумму на интеграл и используя (1.93), получаем:

$$\Delta(\lambda_2, \lambda_1) = \Phi(\lambda_2 - \lambda_1) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda_2 - \mu) f(\mu|\lambda_1) d\mu. \tag{1.103}$$

Сравнивая с (1.85), найдем:

$$\Delta(\lambda_2, \lambda_1) = -2\pi f(\lambda_2|\lambda_1), \tag{1.104}$$

что придает физический смысл функции $f(\lambda|\mu)$ и оправдывает ее название как функции сдвига. Отметим, что уравнение (1.85) можно интерпретировать как одевающее уравнение для сдвига фазы, которое одевает сдвиг фазы "голых" частиц $\Phi(\lambda_2 - \lambda_1)$ до сдвига фазы $\Delta(\lambda_2 - \lambda_1)$ физических частиц.

1.2.5 Термодинамика модели при конечной температуре

Счет состояний: частицы и дырки. Взаимно-однозначное соответствие между состояниями и наборами несовпадающих целых или полуцелых чисел $\{n_j\}_{j=1}^N$ позволяет относительно просто проанализировать термодинамику модели при конечной температуре. В дальнейшем будем для простоты считать, что числа n_j – целые.

Зададимся каким-нибудь решением уравнений Бете в виде набора (вещественных) чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$, среди которых нет совпадающих. Рассмотрим функцию

$$y(\lambda) = \lambda + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{N} \Phi(\lambda - \lambda_k) \tag{1.105}$$

Она монотонно возрастает с увеличением λ, и $y(\pm\infty) = \pm\infty$. Пусть $\{\bar{n}_j\}$ – набор целых чисел, дополнительный к $\{n_j\}_{j=1}^N$: $\{\bar{n}_j\} = \mathbb{Z} \setminus \{n_j\}_{j=1}^N$. Введем следующую терминологию.

- Те $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для которых $y(\lambda_j) = \dfrac{2\pi n_j}{L}$, назовем *частицами*;
- Те $\lambda_k \in \mathbb{R}$, для которых $y(\lambda_k) = \dfrac{2\pi \bar{n}_k}{L}$, назовем *дырками*.

Совокупность *всех* решений уравнения $y(\lambda) \in 2\pi\,\mathbb{Z}/L$ (при данных $\{n_j\}_{j=1}^N$) иногда называют вакансиями. Очевидно, вакансия – это либо частица, либо дырка. Частицы еще называют занятыми вакансиями, а дырки – свободными.

Функция ρ плотности распределения частиц вводится формулой (1.78) так же, как и раньше. Аналогичную функцию $\bar{\rho}$ можно ввести и для дырок. В случае основного состояния и простейших возбуждений на интервале от $-\Lambda$ до Λ дырок не было или их количество оставалось конечным в термодинамическом пределе, поэтому функция $\bar{\rho}$ была не нужна (была равна 0 на интересующем нас интервале). Теперь же обе функции, вообще говоря, отличны от нуля на всей оси. Итак:

- Плотность частиц: $L\rho(\lambda)d\lambda$ – число частиц на отрезке $[\lambda, \lambda + d\lambda]$;
- Плотность дырок: $L\bar{\rho}(\lambda)d\lambda$ – число дырок на отрезке $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

Плотность вакансий будет тогда $\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda)$. Из определений сразу следует, что $y'(\lambda)=2\pi(\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda))$. В самом деле, величина $\frac{L}{2\pi}\Big(y(\lambda+\delta\lambda)-y(\lambda)\Big)$ – это количество "проходов" функции $\frac{L}{2\pi}\,y(\lambda)$ через целое число, т.е. количество вакансий в интервале $\delta\lambda$. Дифференцируя (1.105), получаем интегральное уравнение, связывающее плотности частиц и дырок:

$$\boxed{2\pi(\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda))-\int K(\lambda-\mu)\rho(\mu)\,d\mu=1} \tag{1.106}$$

По умолчанию здесь и далее интегрирование идет от $-\infty$ до ∞. Напомним, что $K(\lambda)=\dfrac{2c}{\lambda^2+c^2}$. По смыслу это уравнение полностью аналогично уравнениям Бете в форме (1.72): задаем плотность дырок $\bar{\rho}$ (это аналогично выбору какой-то определенной последовательности целых чисел n_j в (1.72)), и тогда плотность частиц ρ найдется из интегрального уравнения.

Макроскопическое описание: энтропия. Метод статистической термодинамики заключается в отказе от слежения за отдельными состояниями (с помощью чисел n_j) и в переходе к описанию в терминах плотности частиц и дырок. При этом данному макроскопическому состоянию (фиксированной функции ρ) соответствует много разных микроскопических состояний (наборов чисел n_j). Действительно, имеется

$$\delta\mathcal{N}(\lambda)=\frac{\Big[L(\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda)d\lambda]!}{\Big[L\rho(\lambda)d\lambda\Big]!\,\Big[L\bar{\rho}(\lambda)d\lambda\Big]!}$$

возможностей разместить $L\rho(\lambda)d\lambda$ частиц в $L(\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda)d\lambda$ вакансиях, не меняя макроскопические функции распределения. В термодинамическом пределе это большое число. Применив формулу Стирлинга $\log n!=n\log n-n+\ldots$, получим приращение энтропии $\delta S_N(\lambda)=\log\delta\mathcal{N}(\lambda)$:

$$\delta S_N(\lambda)=\Big[(\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda))\log(\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda))-\rho(\lambda)\log\rho(\lambda)-\bar{\rho}(\lambda)\log\bar{\rho}(\lambda)\Big]L d\lambda$$

Полная энтропия вычисляется как

$$S_N=\int\delta S_N d\lambda=L\int\Big[(\rho+\bar{\rho})\log(\rho+\bar{\rho})-\rho\log\rho-\bar{\rho}\log\bar{\rho}\Big]d\lambda \tag{1.107}$$

Интегральное уравнение. В термодинамическом пределе полная энергия

$$E_N=L\int\lambda^2\rho(\lambda)\,d\lambda \tag{1.108}$$

зависит только от макроскопической плотности ρ, что позволяет в статсумме перейти от суммирования по n_j к "функциональному интегрированию" по $\rho(\lambda)$ с учетом энтропии:

$$Z_N=\sum_{n_1<n_2<\ldots<n_N}e^{-\beta E_N(\{n_j\})}=\int[D\rho]\,e^{S_N-\beta E_N}$$

Здесь $\beta = 1/T$ – обратная температура. Как обычно бывает в статистической термодинамике, при $N \to \infty$ основной вклад дадут состояния, для которых $e^{S_N - \beta E_N}$ максимально. Иными словами, нам надо найти экстремум функционала

$$S_N - \beta E_N = -L \int d\lambda \left[\beta\lambda^2 \rho - (\rho + \bar{\rho}) \log(\rho + \bar{\rho}) + \rho \log \rho + \bar{\rho} \log \bar{\rho}\right]$$

от плотности частиц ρ при условии, что средняя плотность держится постоянной:

$$\int \rho(\lambda)\, d\lambda = N/L = \rho_0 \tag{1.109}$$

Вводя множитель Лагранжа в виде βh и варьируя по ρ с учетом (1.106), имеем

$$\int d\lambda \left[\beta(\lambda^2 - h)\delta\rho + \delta\rho \log \rho + \delta\bar{\rho} \log \bar{\rho} - (\delta\rho + \delta\bar{\rho}) \log(\rho + \bar{\rho})\right] = 0$$

при всех $\delta\rho$. После простых преобразований получаем условие равенства нулю вариации:

$$\beta(\lambda^2 - h) + \log \frac{\rho(\lambda)}{\bar{\rho}(\lambda)} - \frac{1}{2\pi} \int K(\lambda - \mu) \log\Big(1 + \frac{\rho(\mu)}{\bar{\rho}(\mu)}\Big)\, d\mu = 0 \tag{1.110}$$

Введя обозначение

$$\frac{\bar{\rho}(\lambda)}{\rho(\lambda)} := e^{\beta\varepsilon(\lambda)} \tag{1.111}$$

запишем его в виде

$$\boxed{\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{1}{2\pi\beta} \int K(\lambda - \mu) \log\Big(1 + e^{-\beta\varepsilon(\mu)}\Big)\, d\mu} \tag{1.112}$$

Это нелинейное интегральное уравнение на функцию $\varepsilon(\lambda)$, в котором h надо рассматривать как параметр. Схема решения исходной задачи такова: найденное из этого уравнения $\varepsilon(\lambda)$ (параметрически зависящее от h) надо подставить в соотношение (1.106), которое после этого превращается в уравнение Фредгольма на ρ:

$$2\pi\Big(1 + e^{\beta\varepsilon(\lambda)}\Big)\, \rho(\lambda) = 1 + \int K(\lambda - \mu)\rho(\mu)\, d\mu \tag{1.113}$$

Найденное из него ρ надо подставить в условие нормировки (1.109), из которого по данному ρ_0 находится h. Зная ρ и ε, можно (в принципе) найти все интересующие нас термодинамические величины в системе.

В пределе $T \to 0$ ($\beta \to \infty$) нелинейное интегральное уравнение (1.112) превращается в линейное (1.102), и функция $\varepsilon(\lambda)$, введенная в этом разделе, переходит в функцию $\varepsilon(\lambda)$, входящую в уравнение (1.102) (энергию элементарного возбуждения).

Свободная энергия и химический потенциал. В качестве примера покажем, как выводятся выражения для свободной энергии и давления. Энтропию находим по формуле (1.107), подставив в нее определение функции ε:

$$S_N = L\int (\rho + \bar{\rho}) \log\Big(1 + e^{-\beta\varepsilon}\Big) d\lambda + L\beta \int \varepsilon\rho\, d\lambda \tag{1.114}$$

Далее, домножим обе части уравнения (1.112) на $\rho(\lambda)$ и затем проинтегрируем по λ. Пользуясь уравнением (1.113), результат запишем в виде

$$L\int(\rho+\bar{\rho})\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)d\lambda = L\beta\int(\lambda^2-\varepsilon)\rho\,d\lambda-\beta Nh+\frac{L}{2\pi}\int\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)d\lambda \quad (1.115)$$

где левая часть как раз совпадает с первым слагаемым в правой части (1.114). Поэтому формулу для энтропии (1.114) можно несколько упростить:

$$S_N = L\beta\int\lambda^2\rho\,d\lambda-\beta Nh+\frac{L}{2\pi}\int\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)d\lambda \quad (1.116)$$

Для свободной энергии $F_N = E_N - TS_N$ (здесь и ниже удобно подставить $\beta = 1/T$) получаем тогда выражение

$$\boxed{F_N = Nh-\frac{LT}{2\pi}\int\log\left(1+e^{-\varepsilon/T}\right)d\lambda} \quad (1.117)$$

Давление находится по формуле

$$\mathcal{P} = -\Big(\frac{\partial F_N}{\partial L}\Big)_T = -N\frac{\partial h}{\partial L}-\frac{L}{2\pi}\int\frac{d\lambda}{1+e^{\varepsilon/T}}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial L}+\frac{T}{2\pi}\int\log\left(1+e^{-\varepsilon/T}\right)d\lambda$$

Частную производную $\partial\varepsilon/\partial h$ найдем, продифференцировав интегральное уравнение (1.112) по параметру h. Мы получим:

$$-\frac{\partial\varepsilon(\lambda)}{\partial h} = 1-\frac{1}{2\pi}\int K(\lambda-\mu)\,\frac{\partial\varepsilon(\mu)/\partial h}{1+e^{\varepsilon(\mu)/T}}\,d\mu$$

Сравнив с уравнением (1.113), видим, что величина $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varepsilon/\partial h}{1+e^{\varepsilon/T}}$ как функция λ удовлетворяет тому же интегральному уравнению (1.113), что и функция $\rho(\lambda)$. В силу единственности решения этого последнего (что можно доказать отдельно) отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial h} = -2\pi\rho\left(1+e^{\varepsilon/T}\right)$$

Подставив это в правую часть формулы для давления и вспомнив условие нормировки, видим, что первые два члена в правой части сокращают друг друга. Таким образом, приходим к следующему замечательному результату:

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{T}{2\pi}\int\log\left(1+e^{-\varepsilon(\lambda)/T}\right)d\lambda} \quad (1.118)$$

Сравнивая с (1.117), получаем известную термодинамическую формулу

$$F_N = -L\mathcal{P}+Nh$$

из которой очевидно, что h имеет смысл химического потенциала системы. На самом деле можно было бы с самого начала считать заданным не ρ_0, а h, тогда схема решения несколько упрощается.

Каков же смысл функции $\varepsilon(\lambda)$? Оказывается, $\varepsilon(\lambda)$ – это энергия возбуждения над состоянием термодинамического равновесия. Интуитивно это можно понять из того простого соображения, что отношение числа занятых вакансий (т.е. частиц) к числу всех вакансий в малом интервале $\delta\lambda$ равно

$$\frac{\rho(\lambda)}{\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda)} = \frac{1}{1+e^{\beta\varepsilon(\lambda)}}$$

что совпадает с распределением Ферми-Дирака. Отметим также, что полученные формулы для давления и свободной энергии выглядят как написанные для газа невзаимодействующих фиктивных "ферми-частиц" с энергиями $\varepsilon(\lambda)$. В частности, при $c=\infty$ эти фиктивные частицы можно отождествить с настоящими, в терминах которых писался исходный гамильтониан. При этом $\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h$, как и должно быть для свободных нерелятивистских частиц.

На этом мы заканчиваем описание термодинамики модели. Более глубокий анализ выходит за рамки нашего курса.

2 Вершинные модели статистической механики на двумерной решетке

Этот раздел служит переходным этапом от изучения конкретных моделей к анализу общих алгебраических структур, лежащих в основе квантовой интегрируемости. Здесь обсуждаются вершинные модели на квадратной решетке – модели совершенно другого типа по сравнению с уже рассмотренными (и даже из другой области физики), точное решение которых, однако, оказывается возможным с помощью некоторой модификации того же метода Бете. Вместе с тем вершинные модели оказываются тесно связанными со спиновыми цепочками и позволяют построить коммутирующие интегралы движения для последних, т.е. операторы, коммутирующие с гамильтонианом и друг с другом. В контексте вершинных моделей можно наиболее наглядно ввести общие понятия квантового метода обратной задачи (трансфер-матрица, R-матрица и др.) и развить алгебраический вариант метода Бете, применимый к широкому кругу квантовых интегрируемых систем.

2.1 Общая вершинная модель на квадратной решетке

Рассмотрим решетку размера $N \times M$ с квадратными ячейками, свернутую в тор, т.е. плоскую решетку с $M+1$ строками и $N+1$ столбцами, у которой крайние строки и столбцы отождествлены. Пусть на каждом горизонтальном ребре нарисована стрелка, ориентированная влево или вправо, а на каждом вертикальном – вверх или вниз. Поскольку в каждом узле решетки сходятся 4 ребра, имеем 16 возможных комбинаций стрелок на них (типов вершин). Припишем каждой возможной комбинации $j = 1, \ldots, 16$ число ε_j (энергию данной локальной конфигурации). Полная энергия, отвечающая некоторой расстановке стрелок на всех ребрах, находится тогда как сумма локальных энергий по всем узлам:

$$E = \sum_{j=1}^{16} N_j \varepsilon_j$$

где N_j – число узлов с комбинацией стрелок типа j в данной конфигурации. Полезно также ввести величины $w_j = e^{-\varepsilon_j/T}$, которые называются локальными больцмановскими весами (они считаются одинаковыми для всех узлов). Статсумма равна

$$Z = \sum e^{-E/T} = \sum \prod_j w_j^{N_j}$$

где суммирование производится по всем конфигурациям стрелок на решетке, а E – полная энергия конфигурации. Обычно интерес представляет вычисление свободной энергии на один узел в термодинамическом пределе как функции локальных больцмановских весов:

$$f = -T \lim_{M,N\to\infty} \frac{\log Z}{MN}$$

По понятной причине данная модель называется 16-вершинной. В общем случае она не имеет точного решения.

Отметим, что больцмановские веса некоторых локальных конфигураций могут быть равны 0 (при этом энергия равна $+\infty$). Это значит, что данные локальные конфигурации в вершине считаются запрещенными. Тогда число разрешенных типов вершин уменьшается. Таким образом получаются 8-вершинная и 6-вершинная модели, которые уже могут быть решены точно, по крайней мере в термодинамическом пределе (см. далее).

Вместо стрелок можно использовать спиновые переменные $\sigma = \pm 1$, живущие *на ребрах* решетки: если стрелка направлена вправо или вверх, $\sigma = +1$, а если влево или вниз, $\sigma = -1$. Каждой конфигурации стрелок в узле соответствуют 4 величины $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, принимающие значения ± 1. Переменные α, α' живут на вертикальных ребрах, а β, β' – на горизонтальных (рис. 1). Локальный больцмановский вес, отвечающий такой конфигурации, будем обозначать

$$R_\alpha^{\alpha'}(\beta, \beta') \qquad \text{или} \qquad R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$$

Рассмотрим какой-либо горизонтальный ряд решетки и прилегающие к нему снизу и сверху вертикальные ребра. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ – переменные на вертикальных ребрах нижнего ряда, а $\{\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_N'\}$ – верхнего (рис. 2). Будем пока считать их фиксированными и найдем статсумму такого горизонтального “слоя” решетки, которую обозначим через

$$T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_N'} \quad \text{или для краткости} \quad T_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}}$$

Для этого надо взять произведение локальных больцмановских весов и просуммировать по всем состояниям на горизонтальных ребрах:

$$T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_N'} = \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_N} R_{\alpha_1}^{\alpha_1'}(\beta_1, \beta_2) R_{\alpha_2}^{\alpha_2'}(\beta_2, \beta_3) \ldots R_{\alpha_N}^{\alpha_N'}(\beta_N, \beta_1) \tag{2.1}$$

Величину $T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_N'}$ полезно рассматривать как матричный элемент оператора T, действующего в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, взятого в базисе $|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha_N\rangle$:

$$\mathsf{T}\, |\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_N\rangle \;=\; T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_N'}\, |\alpha_1' \alpha_2', \ldots, \alpha_N'\rangle$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Тогда

$$Z = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\,\mathsf{T}^M$$

где след берется в пространстве $\mathcal{H}$. Таким образом, для нахождения статсуммы достаточно найти собственные значения матрицы T. Для нахождения удельной свободной энергии в пределе $N, M \to \infty$ достаточно знать асимптотику при $N \to \infty$ наибольшего собственного значения. В силу важности матрица T имеет специальное название. Она называется *трансфер-матрицей* или матрицей перехода, поскольку описывает переход от одного горизонтального ряда вертикальных ребер к следующему. Диагонализация трансфер-матрицы – первая основная задача в теории вершинных моделей. (Вторая основная задача – нахождение корреляционных функций; она существенно сложнее.)

Обсудим подробнее структуру трансфер-матрицы. Будем считать $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$ 2×2 матрицей $R_\alpha^{\alpha'}$ по индексам β,β', у которой матричные элементы в свою очередь являются 2×2 матрицами (по индексам α,α'):

$$(R_\alpha^{\alpha'})_{\beta\beta'} = R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$$

Иными словами, рассмотрим $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$ как блочную матрицу. Тогда правая часть формулы (2.1) – не что иное, как матричное произведение в горизонтальном (общем для всех) пространстве $\mathbb{C}^2$ (оно называется *вспомогательным пространством*) с последующим взятием следа в нем:

$$T_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}} = T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_N'} = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2}\Big(R_{\alpha_1}^{\alpha_1'}R_{\alpha_2}^{\alpha_2'}\ldots R_{\alpha_N}^{\alpha_N'}\Big)$$

Таким образом, элементарным строительным блоком является набор больцмановских весов $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta') = R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$. Их можно объединить в матрицу 4×4 и понимать ее как матрицу линейного оператора в тензорном произведении двух двумерных пространств. Тогда совокупность больцмановских весов задает линейный оператор

$$\mathsf{R}:\ \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$$

В базисе $|\beta\rangle\otimes|\alpha\rangle$ он действует так:

$$\mathsf{R}:\ |\beta\rangle\otimes|\alpha\rangle \mapsto R_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}\,|\beta'\rangle\otimes|\alpha'\rangle$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Матрица R в базисе $|+\rangle\otimes|+\rangle$, $|+\rangle\otimes|-\rangle$, $|-\rangle\otimes|+\rangle$, $|-\rangle\otimes|-\rangle$ запишется виде

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} R_{++}^{++} & R_{++}^{-+} & R_{++}^{+-} & R_{++}^{--} \\ R_{-+}^{++} & R_{-+}^{-+} & R_{-+}^{+-} & R_{-+}^{--} \\ R_{+-}^{++} & R_{+-}^{-+} & R_{+-}^{+-} & R_{+-}^{--} \\ R_{--}^{++} & R_{--}^{-+} & R_{--}^{+-} & R_{--}^{--} \end{pmatrix}$$

Отметим, что хотя исходно все больцмановские веса были вещественными (и, более того, неотрицательными) числами, с алгебраической точки зрения удобно считать их произвольными комплексными числами.

Наконец, укажем способ компактной безындексной записи трансфер-матрицы. Если имеется тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_N$ одинаковых пространств $V_i \cong \mathbb{C}^2$, обозначим R_{ij} оператор, действующий на произведении $V_i \otimes V_j$ как R, а на других как тождественный оператор. Тогда

$$\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}\Big)$$

Стоящий под следом оператор $\mathcal{T} = \mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}$ также имеет специальное название. По историческим причинам (по аналогии с методом обратной задачи) он называется квантовой матрицей монодромии. Его естественно записывать как 2×2 матрицу во вспомогательном пространстве, элементы которой являются операторами в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{T} = A + D$$

Операторы A, B, C, D – это по сути трансфер-матрицы для цепочки с открытыми концами, спины на которых фиксированы.

2.2 6-вершинная модель

Будем рассматривать лишь те вершины, в которых число входящих стрелок равно числу выходящих, а остальные объявим запрещенными (их больцмановские веса положим равными 0). Таких конфигураций ровно 6 (рис. 3). Они объединяются в пары, соответствующие обращению всех стрелок. Будем считать, что больцмановские веса одинаковы для вершин, получающихся друг из друга обращением всех стрелок. Таким образом, в модели имеются 3 независимых параметра, из которых существенны лишь два, т.к. зависимость от общего множителя тривиальна. Такая модель называется (симметричной) 6-вершинной моделью.

2.2.1 Матрица больцмановских весов 6-вершинной модели

Матрица локальных больцмановских весов для 6-вершинной модели имеет вид

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} R_+^+(+,+) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_-^-(+,+) & R_-^+(+,-) & 0 \\ 0 & R_+^-(-,+) & R_+^+(-,-) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_-^-(-,-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Она называется R-матрицей. Укажем другие способы ее записи, которые в ряде случаев более удобны:

$$\begin{aligned} \mathsf{R} \; &= \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma_z & c\sigma_- \\ c\sigma_+ & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{a+b}{2}\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \frac{a-b}{2}\sigma_z \otimes \sigma_z + \frac{c}{2}\sigma_y \otimes \sigma_y + \frac{c}{2}\sigma_x \otimes \sigma_x \end{aligned}$$

Здесь использованы введенные ранее стандартные матрицы Паули. Матрица больцмановских весов в j-м узле решетки запишется в виде

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_{0j} &= \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\,\sigma_z^{(j)} & c\sigma_-^{(j)} \\ \\ c\sigma_+^{(j)} & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\,\sigma_z^{(j)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{a+b}{2}\,\sigma_0^{(0)} \otimes \sigma_0^{(j)} + \frac{a-b}{2}\,\sigma_z^{(0)} \otimes \sigma_z^{(j)} + \frac{c}{2}\,\sigma_y^{(0)} \otimes \sigma_y^{(j)} + \frac{c}{2}\,\sigma_x^{(0)} \otimes \sigma_x^{(j)}
\end{aligned}$$

Задача. Показать, что вектор $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$ является собственным для трансфер-матрицы $\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}\Big)$ и найти собственное значение. (Можно показать, что при $a > b + c$ это максимальное собственное значение.)

Задача. Показать, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с оператором циклического сдвига e^{iP} и оператором $S_z = \sum_{j=1}^{N} \sigma_z^{(j)}$: $[\mathsf{T}, e^{iP}] = [\mathsf{T}, S_z] = 0$.

Коммутационное соотношение $[\mathsf{T}, S_z] = 0$ означает, что количество стрелок, направленных вниз (аналог перевернутых спинов), сохраняется под действием оператора T, т.е. не меняется от слоя к слою. Поэтому собственные векторы можно искать в секторах с фиксированным числом перевернутых стрелок. Например, собственный вектор в N-мерном подпространстве с одной перевернутой стрелкой можно искать в виде

$$\sum_{n=1}^{N} z^n \sigma_-^{(n)}\,|\Omega\rangle$$

где z – комплексное число, удовлетворяющее условию $z^N = 1$ (в силу периодических граничных условий). Явное построение собственных векторов можно провести и в секторе с произвольным числом перевернутых стрелок, причем оно оказывается абсолютно аналогичным решению XXZ-модели координатным анзацем Бете! (Исторически модель была впервые решена именно этим методом.) Разумеется, этот факт не является случайным и говорит о том, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с гамильтонианом XXZ-цепочки, и метод Бете дает их общие собственные векторы.

В общей 16-вершинной модели вектор $|\Omega\rangle$ уже не является собственным, а действие трансфер-матрицы не сохраняет число перевернутых стрелок. Так же обстоит дело и в случае 8-вершинной модели, в которой разрешенными являются только вершины с четным числом входящих стрелок. Оказывается, 8-вершинная модель, как и 6-вершинная, является точно решаемой, но координатный анзац Бете к ней неприменим. Ее решение было получено другими, алгебраическими методами (развитыми в первую очередь в работах Бакстера и Ленинградской школы), с которыми мы познакомимся на более простом примере 6-вершинной модели.

2.2.2 Коммутирующие трансфер-матрицы и уравнение Янга-Бакстера

Ключом к алгебраическому решению 6-вершинной модели является нахождение коммутативного семейства трансфер-матриц. Именно, мы покажем, что трансфер-матрицы моделей, для которых

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

имеет одно и то же значение, коммутируют.

Итак, зададимся вопросом, когда трансфер-матрицы

$$\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\mathcal{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\dots\mathsf{R}_{0N}\Big)\,, \quad \mathsf{T}' = \mathrm{tr}_{V_0}\mathcal{T}' = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}'_{01}\mathsf{R}'_{02}\dots\mathsf{R}'_{0N}\Big)$$

коммутируют. Здесь R' – R-матрица с параметрами (a',b',c'). Произведения $\mathsf{T}\mathsf{T}'$ и $\mathsf{T}'\mathsf{T}$ можно записать в виде

$$\mathsf{T}\mathsf{T}' = \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_0}\Big(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'\Big)\,, \qquad \mathsf{T}'\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_0}\Big(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}\Big)$$

В правых частях $\mathcal{T}$-матрицы перемножаются тензорно, а их элементы – как операторы в $\mathcal{H}$, с соблюдением порядка. Например:

$$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix}$$

Для коммутативности трансфер-матриц достаточно, чтобы существовала невырожденная числовая 4×4 матрица M такая, что

$$\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T} = \mathsf{M}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')\mathsf{M}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathsf{M}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathsf{M}$$

Тогда следы от $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}$ будут равны в силу цикличности следа.

Пусть P – оператор перестановки сомножителей в тензорном произведении $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$: $\mathsf{P}\,u\otimes v = v\otimes u$. (В главе про модель Гейзенберга этот оператор обозначался как P_{12}.) Если бы матричные элементы $\mathcal{T}$ коммутировали с матричными элементами $\mathcal{T}'$, мы бы имели $\mathsf{P}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\,\mathsf{P}$, т.е. в этом простейшем случае, когда следы заведомо коммутируют, $\mathsf{M}=\mathsf{P}$. В общем случае будем искать матрицу M в виде $\mathsf{M}=\mathsf{P}\mathsf{R}''$, где R'' – некоторая числовая матрица (смысл такого обозначения выясниться чуть ниже).

"Сплетающее" соотношение

$$\mathsf{P}\mathsf{R}''(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathsf{P}\mathsf{R}'' \tag{2.2}$$

будет для нас основным. Полезно переписать его в несколько иной форме. Обозначим $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}\otimes 1$, $\mathcal{T}_2 = 1\otimes\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1\mathcal{T}'_2$, а $\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T} = \mathsf{P}\,\mathcal{T}'_2\mathcal{T}_1\,\mathsf{P}$. После этого, помножив обе части нашего соотношения слева на P, запишем его так:

$$\mathsf{R}''_{12}\mathcal{T}_1\mathcal{T}'_2 = \mathcal{T}'_2\mathcal{T}_1\mathsf{R}''_{12}$$

Индексы у R'' напоминают, что этот оператор действует в тензорном произведении первого и второго пространств.

Конструктивно матрицу R'' можно найти, наложив более сильное достаточное условие – чтобы такая матрица существовала для каждого R-матричного сомножителя, входящего в $\mathcal{T}$-матрицу, а именно,

$$\mathsf{PR}''(\mathsf{R}\otimes\mathsf{R}') = (\mathsf{R}'\otimes\mathsf{R})\mathsf{PR}'' \qquad \text{или} \qquad \mathsf{R}''_{12}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}'_{23} = \mathsf{R}'_{23}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}''_{12}$$

В этом уравнении обе части – числовые матрицы 8×8, и есть надежда, что его удастся разрешить. В индексной записи

$$\sum_{\mu\nu\lambda} R''^{\,\nu\mu}_{\beta\gamma} R'^{\,\lambda\beta'}_{\alpha\mu} R^{\alpha'\gamma'}_{\lambda\nu} = \sum_{\mu\nu\lambda} R^{\lambda\mu}_{\alpha\beta} R'^{\,\alpha'\nu}_{\lambda\gamma} R''^{\,\gamma'\beta'}_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

(где использовано обозначение $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta') = R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}$). Кроме того, предположим, что матрицы R, R', R'' имеют одинаковую структуру и различаются только значениями параметров: (a,b,c) для R, (a',b',c') для R', (a'',b'',c'') для R''.

Условие (2.3) называется уравнением (или системой уравнений) Янга-Бакстера или уравнением треугольников. Его можно представить графически (рис. 4). Это система из 64 уравнений с 3 неизвестными (ненулевыми элементами матрицы R''). Наша задача – выяснить, при каком выборе матриц R, R' система имеет ненулевое решение.

Заметим, во-первых, что в силу свойства $R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha+\beta \neq \alpha'+\beta'$ большое число уравнений обращаются в тождества $0=0$. Что-то ненулевое в обеих частях получается только при $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma'$. В результате остается только 20 нетривиальных уравнений, которые сводятся к 10 с учетом симметрии относительно преобразования $|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. Четыре из этих десяти уравнений удовлетворяются тождественно, а остальные образуют три пары эквивалентных уравнений. Таким образом, остаются только 3 нетривиальных уравнения. Они имеют вид

$$\begin{cases} bc'a'' = cb'c'' + ac'b'' \\ ca'a'' = cb'b'' + ac'c'' \\ ba'c'' = cc'b'' + ab'c'' \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим их как систему однородных уравнений с неизвестными a'',b'',c''. Ненулевое решение существует, если определитель системы равен 0. Прямое вычисление показывает, что это требование эквивалентно условию

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}$$

Аналогично, рассмотрев эти уравнения как систему однородных уравнений с неизвестными a',b',c', получим

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a''^2+b''^2-c''^2}{2a''b''}$$

Тем самым мы показали, что если величина

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

одинакова для всех R-матриц R, R', R'', построенные по ним трансфер-матрицы коммутируют.

Для дальнейшего исключительно удобно ввести следующую параметризацию статвесов a, b, c:

$$\begin{cases} a = \rho \sinh(u+\eta) \\ b = \rho \sinh u \\ c = \rho \sinh \eta \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда $\Delta = \cosh \eta$, и трансфер-матрицы коммутируют при различных значениях u, ρ (и одинаковом η). Коммутативность при различных ρ тривиальна, поскольку общий множитель просто выносится и ни на что не влияет. Удобно положить $\rho = 1$. Параметр u называется *спектральным параметром*, и R-матрица, а также все остальные введенные объекты обычно рассматриваются как функции параметра u: $\mathsf{R} = \mathsf{R}(u)$, $\mathsf{T} = \mathsf{T}(u)$ и т.д. При этом подразумевается, что u может меняться, а η фиксировано, тогда $[\mathsf{T}(u), \mathsf{T}(u')] = 0$.

Как связаны между собой спектральные параметры R-матриц, входящих в уравнение Янга-Бакстера? Подставив параметризацию (2.5) для каждой R-матрицы (с u, u', u'' и одинаковым η) в условия (2.4), получим

$$u = u' + u''$$

Уравнение Янга-Бакстера примет симметричный вид

$$\mathsf{R}_{12}(u_1-u_2)\mathsf{R}_{13}(u_1-u_3)\mathsf{R}_{23}(u_2-u_3) = \mathsf{R}_{23}(u_2-u_3)\mathsf{R}_{13}(u_1-u_3)\mathsf{R}_{12}(u_1-u_2) \tag{2.6}$$

(для данной параметризации оно является тождеством). Квантовая матрица монодромии строится как

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{R}_{01}(u)\mathsf{R}_{02}(u)\ldots\mathsf{R}_{0N}(u). \tag{2.7}$$

Она удовлетворяет сплетаюшему соотношению (2.2)

$$\boxed{\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u')) = (\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u')} \tag{2.8}$$

с R-матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \mathsf{P}\mathsf{R}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix}.$$

Оно гарантирует, что трансфер-матрицы $\mathsf{T}(u)$ (следы матриц монодромии во вспомогательном пространстве) коммутируют при различных значениях спектрального параметра.

Для удобства укажем явный вид R-матрицы в параметризации (2.5) с $\rho = 1$:

$$\begin{aligned} \mathsf{R}(u) = \mathsf{R}(u,\eta) &= \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh u & \sinh\eta & 0 \\ 0 & \sinh\eta & \sinh u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u+\eta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sinh\left(u+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}\sigma_z\right) & \sinh\eta\,\sigma_- \\ \sinh\eta\,\sigma_+ & \sinh\left(u+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta}{2}\sigma_z\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Отметим, $\check{\mathsf{R}}(u,\eta) = \mathsf{R}(\eta, u)$ и что $\mathsf{R}(0) = \sinh\eta\ \mathsf{P}$ или, в индексной записи,

$$R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}(0) = R^{\alpha'}_{\alpha}(0|\beta,\beta') = \sinh\eta\,\delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta}. \tag{2.10}$$

R-матрица (2.9) обладает следующим важным свойством: если $\mathbf{g} = \mathrm{diag}\,(g_1, g_2)$ – диагональная матрица, то

$$\mathsf{R}_{12}(u)\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathsf{R}_{12}(u). \tag{2.11}$$

Это свойство позволяет обобщить определение трансфер-матрицы на *твистованные граничные условия*:

$$\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}_0\Big(\mathbf{g}_0\mathsf{R}_{01}(u)\dots\mathsf{R}_{0N}(u)\Big). \tag{2.12}$$

Уравнение Янга-Бекстера и свойство (2.11) гарантируют, что $\mathsf{T}(u)$ образуют коммутативное семейство трансфер-матриц.

Задача. Проверить свойство (2.11).

2.2.3 Связь 6-вершинной модели с XXZ-цепочкой

Пользуясь (2.10), найдем, что оператор $\mathsf{T}(0)$ пропорционален оператору циклической перестановки узлов решетки:

$$\boxed{\mathsf{T}(0) = (\sinh\eta)^N e^{-iP}.} \tag{2.13}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
T^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}}(0) &= (\sinh\eta)^N \sum_{\{\beta\}} \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha'_1\beta_1}\,\delta_{\alpha_2\beta_3}\delta_{\alpha'_2\beta_2}\,\dots\,\delta_{\alpha_N\beta_1}\delta_{\alpha'_N\beta_N} \\
&= (\sinh\eta)^N \delta_{\alpha'_1\alpha_N}\delta_{\alpha'_2\alpha_1}\dots\delta_{\alpha'_N\alpha_{N-1}} \\
&= (\sinh\eta)^N\ \left(e^{-iP}\right)^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}}.
\end{aligned}$$

Связь с XXZ-моделью основана на том замечательном факте, что гамильтониан последней содержится в семействе трансфер-матриц 6-вершинной модели $\mathsf{T}(u)$, а именно, $H^{\mathrm{xxz}} \propto \mathsf{T}^{-1}(0)\partial_u\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} + \mathrm{const}$. Точная формула такова:

$$\boxed{H^{\mathrm{xxz}} = -\sinh\eta\,\frac{d}{du}\log\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} +\ N\cosh\eta.} \tag{2.14}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении, аналогичном таковому для $\mathsf{T}(0)$. В силу важности сделанного утверждения уместно привести некоторые подробности. Имеем по определению:

$$\frac{d}{du}T^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}}(u)\Big|_{u=0} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\{\beta\}} R^{\alpha'_1\beta_2}_{\alpha_1\beta_1}(0)\dots R^{\alpha'_{j-1}\beta_j}_{\alpha_{j-1}\beta_{j-1}}(0)\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\beta_{j+1}}_{\alpha_j\beta_j}(u)\Big|_{u=0} R^{\alpha'_{j+1}\beta_{j+2}}_{\alpha_{j+1}\beta_{j+1}}(0)\dots R^{\alpha'_N\beta_1}_{\alpha_N\beta_N}(0).$$

Под знаками суммы все сомножители кроме j-го являются операторами перестановки типа (2.10), а

$$\mathsf{R}'(0) = \frac{d\mathsf{R}(u)}{du}\Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} = \frac{\cosh\eta+1}{2}\,1\otimes 1 + \frac{\cosh\eta-1}{2}\,\sigma_z\otimes\sigma_z$$

$$= 1\otimes 1 + \frac{\cosh\eta-1}{2}\Big(1\otimes 1+\sigma_z\otimes\sigma_z\Big).$$

В индексной записи

$$\frac{d}{du}R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(u)\Big|_{u=0} = \frac{\Delta+1}{2}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \frac{\Delta-1}{2}\,(\sigma_z)_{\alpha\alpha'}(\sigma_z)_{\beta\beta'}\,, \qquad \Delta = \cosh\eta.$$

Теперь все готово для того, чтобы завершить вычисление:

$$\sinh\eta\left(\mathsf{T}^{-1}(0)\frac{d}{du}\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}\right)_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}} = \sum_{j=1}^{N}\delta_{\alpha_1\alpha_1'}\ldots\delta_{\alpha_{j-1}\alpha_{j-1}'}\cdot\frac{d}{du}R_{\alpha_{j+1}\alpha_j}^{\alpha_j'\alpha_{j+1}'}(u)\Big|_{u=0}\cdot\delta_{\alpha_{j+2}\alpha_{j+2}'}\ldots\delta_{\alpha_N\alpha_N'}.$$

Осталось преобразовать

$$\frac{d}{du}R_{\alpha_{j+1}\alpha_j}^{\alpha_j'\alpha_{j+1}'}(u)\Big|_{u=0} = (\mathsf{P}\mathsf{R}'(0))_{\alpha_{j+1}\alpha_j}^{\alpha_{j+1}'\alpha_j'} = \left(\mathsf{P}+\frac{\Delta-1}{2}\,\mathsf{P}(1+\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)})\right)_{\alpha_{j+1}\alpha_j}^{\alpha_{j+1}'\alpha_j'}$$

и с учетом того, что $\mathsf{P}(1+\sigma_z\otimes\sigma_z) = 1+\sigma_z\otimes\sigma_z$, получить

$$\sinh\eta\,\mathsf{T}^{-1}(0)\frac{d}{du}\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} = \sum_{j=1}^{N}\left(\mathsf{P}_{j,j+1}+\frac{\Delta-1}{2}(1+\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)})\right),$$

что эквивалентно (2.14).

Задача. Пусть $\mathsf{R}_{0j}(u) = u\mathsf{I}+\mathsf{P}_{0j}$ – квантовая R-матрица XXX-модели (I – единичный оператор, P_{0j} – оператор перестановки). Рассмотрим трансфер-матрицу XXX-модели

$$\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}_0\Big(\mathsf{R}_{01}(u)\mathsf{R}_{02}(u)\ldots\mathsf{R}_{0N}(u)\Big).$$

Найти $\mathsf{T}(0)$, $\partial_u\log\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}$, $\partial_u^2\log\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}$.

2.2.4 Асимметричная 6-вершинная модель

В асимметричной 6-вершинной модели больцмановские веса вершин, отличающихся обращением всех стрелок, различны. В естественном базисе матрица больцмановских весов асимметричной 6-вершинной модели имеет вид

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c' & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \end{pmatrix}.$$

Стандартный аргумент показывает, что статистическая сумма модели с периодическими граничными условиями зависит только от произведения cc', так что с самого начала без потери общности можно положить $c' = c$. Асимметричную 6-вершинную модель можно понимать как симметричную, находящуюся в вертикальном и горизонтальном внешних полях. Оказывается, асимметричная модель с горизонтальным внешним полем h ($a/a' = b/b' = e^{2h}$) эквивалентна симметричной модели ($a' = a$, $b' = b$) с твистованными граничными условиями типа (2.12), которые сохраняют интегрируемость. Матрица твиста имеет вид $\mathbf{g} = \mathrm{diag}\,(e^{Nh}, e^{-Nh})$.

Матрицы больцмановских весов асимметричной модели с горизонтальным полем h и вертикальным полем v задаются следующим образом:

$$\mathsf{R}_{0i}^{h,v}(u) \,=\, e^{\frac{1}{2}\,h\sigma_z^{(0)}} e^{\frac{1}{2}\,v\sigma_z^{(i)}} \mathsf{R}_{0i}(u)\, e^{\frac{1}{2}\,h\sigma_z^{(0)}} e^{\frac{1}{2}\,v\sigma_z^{(i)}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{h/2} & 0 \\ 0 & e^{-h/2} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} e^{v/2} & 0 \\ 0 & e^{-v/2} \end{pmatrix}_i \mathsf{R}_{0i}(u) \begin{pmatrix} e^{h/2} & 0 \\ 0 & e^{-h/2} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} e^{v/2} & 0 \\ 0 & e^{-v/2} \end{pmatrix}_i . \tag{2.15}$$

Явный вид “асимметричной” R-матрицы в тригонометрической параметризации таков:

$$\mathsf{R}^{h,v}(u) = \begin{pmatrix} e^{h+v}\sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{h-v}\sinh u & \sinh\eta & 0 \\ 0 & \sinh\eta & e^{-h+v}\sinh u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-h-v}\sinh(u+\eta) \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Уравнение Янга-Бакстера вместе с инвариантностью относительно картановской подгруппы (2.11) влечет следующее уравнение Янга-Бакстера для асимметричных R-матриц с тем же самым параметром η:

$$\mathsf{R}_{12}^{-v',\,v}(u-u')\,\mathsf{R}_{13}^{h,v}(u)\,\mathsf{R}_{23}^{h,v'}(u') = \mathsf{R}_{23}^{h,v'}(u')\,\mathsf{R}_{13}^{h,v}(u)\,\mathsf{R}_{12}^{-v',\,v}(u-u'). \tag{2.17}$$

Мы будем рассматривать асимметричную 6-вершинную модель с периодическими граничными условиями в горизонтальном направлении. Трансфер-матрица модели определяется обычным образом:

$$\mathsf{T}^{h,v}(u) = \mathrm{tr}_0\Big(\mathsf{R}_{01}^{h,v}(u)\,\mathsf{R}_{02}^{h,v}(u)\,\ldots\,\mathsf{R}_{0N}^{h,v}(u)\Big). \tag{2.18}$$

Из уравнения Янга-Бакстера следует, что трансфер-матрицы с различными u и v (но с одинаковыми η, h) коммутируют: $[\mathsf{T}^{h,v}(u),\, \mathsf{T}^{h,v'}(u')] = 0$. Легко видеть, что зависимость трансфер-матрицы от вертикального поля v очень проста:

$$\mathsf{T}^{h,v}(u) = e^{v\mathbf{S}_z}\mathsf{T}^{h,0}(u), \tag{2.19}$$

где

$$\mathbf{S}_z = \sum_{i=1}^{N} \sigma_z^{(i)} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \tag{2.20}$$

оператор, считающий (сохраняющуюся) разность между полным числом стрелок, смотрящих вверх ($\mathbf{M}_1 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(1+\sigma_z^{(i)})$) и вниз ($\mathbf{M}_2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(1-\sigma_z^{(i)})$). Отметим, что $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = N\mathsf{I}$, где I – единичный оператор.

Трансфер-матрица асимметричной модели с периодическими граничными условиями связана с трансфер-матрицей симметричной модели с *твистованными* граничными условиями преобразованием подобия. Положим

$$\mathsf{U} = \mathbf{1} \otimes e^{h\sigma_z} \otimes e^{2h\sigma_z} \otimes \ldots \otimes e^{(N-1)h\sigma_z} = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} (j-1) h \sigma_z^{(j)}\right).$$

Из инвариантности относительно картановской подгруппы (2.11) следует соотношение

$$\mathsf{U}\mathsf{T}^{h,v}(u)\mathsf{U}^{-1} = e^{v\mathbf{S}_z}\mathsf{T}^{(h)}(u),$$

где

$$\mathsf{T}^{(h)}(u) = \mathrm{tr}_0\Big(e^{Nh\sigma_z^{(0)}}\mathsf{R}_{01}(u)\,\mathsf{R}_{02}(u)\,\ldots\,\mathsf{R}_{0N}(u)\Big) \tag{2.21}$$

трансфер-матрица симметричной модели с граничными условиями твистованными с помощью диагонального группового элемента $\mathbf{g} = e^{Nh\sigma_z}$.

2.3 8-вершинная модель

2.3.1 Эллиптическая параметризация R-матрицы

Матрица больцмановских весов симметричной 8-вершинной модели

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

содержит 3 независимых параметра (не считая общего множителя). Для нее существует параметризация, аналогичная (2.9), но не в тригонометрических, а в эллиптических функциях (или в тэта-функциях Якоби). К двум имевшимся в (2.9) параметрам u и η добавляется третий – эллиптический модулярный параметр τ. Повторяя рассуждения из раздела 2.2.2, можно показать, что трансфер-матрицы, построенные по R-матрицам 8-вершинной модели коммутируют, если у них одинаковы величины

$$\Gamma = \frac{cd}{ab}, \qquad \Delta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab}. \tag{2.22}$$

Для эллиптической параметризации больцмановских весов 8-вершинной модели мы пользуемся тэта-функциями Якоби

$$\begin{aligned}
\theta_1(u|\tau) &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{(k+\frac{1}{2})^2} e^{\pi i(2k+1)u}, \\
\theta_2(u|\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{(k+\frac{1}{2})^2} e^{\pi i(2k+1)u}, \\
\theta_3(u|\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{k^2} e^{2\pi iku}, \\
\theta_4(u|\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{k^2} e^{2\pi iku},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\, \tau > 0$, и $q = e^{\pi i \tau}$. Полезно также их представление в виде бесконечных произведений:

$$\begin{aligned}
\theta_1(u|\tau) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi u \prod_{n\geq 1} (1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2\pi i u})(1-q^{2n}e^{-2\pi i u}), \\
\theta_2(u|\tau) &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi u \prod_{n\geq 1} (1-q^{2n})(1+q^{2n}e^{2\pi i u})(1+q^{2n}e^{-2\pi i u}), \\
\theta_3(u|\tau) &= \prod_{n\geq 1} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1+q^{2n-1}e^{-2\pi i u}), \\
\theta_4(u|\tau) &= \prod_{n\geq 1} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi i u}),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

из которого видно, что функции θ_1 и θ_2 при $q \to 0$ переходят в синус и косинус соответственно, а функции θ_3 и θ_4 становятся константами (равными 1). Тэта-функции удовлетворяют большому количеству нетривиальных тождеств, некоторые из которых используются ниже без комментариев. Все эти тождества с доказательствами можно найти в [13].

В этом разделе нам удобно будет обозначить матрицы Паули σ_x, σ_y, σ_z как σ_1, σ_2, σ_3 (напомним, что $\sigma_0 = 1$). Матрица больцмановских весов симметричной 8-вершинной модели в эллиптической параметризации имеет вид

$$\mathsf{R}(u) = \mathsf{R}(u;\eta,\tau) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u)\, \sigma_a \otimes \sigma_a, \tag{2.25}$$

где

$$W_a(u) = W_a(u;\eta,\tau) = \theta_1(\eta|\tau)\, \frac{\theta_{5-a}\Big(u+\frac{\eta}{2}\Big|\tau\Big)}{2\theta_{5-a}\Big(\frac{\eta}{2}\Big|\tau\Big)} \tag{2.26}$$

и индекс у тэта-функций понимается по модулю 4 (т.е., например, $\theta_5 = \theta_1$). В матричном виде мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}(u) &= \begin{pmatrix} W_0(u)+W_3(u) & 0 & 0 & W_1(u)-W_2(u) \\ 0 & W_0(u)-W_3(u) & W_1(u)+W_2(u) & 0 \\ 0 & W_1(u)+W_2(u) & W_0(u)-W_3(u) & 0 \\ W_1(u)-W_2(u) & 0 & 0 & W_0(u)+W_3(u) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & d(u) \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ d(u) & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где

$$
\begin{aligned}
a(u) &= \frac{2\theta_4(\eta|2\tau)\,\theta_1(u+\eta|2\tau)\,\theta_4(u|2\tau)}{\theta_2(0|\tau)\,\theta_4(0|2\tau)},\\
b(u) &= \frac{2\theta_4(\eta|2\tau)\,\theta_4(u+\eta|2\tau)\,\theta_1(u|2\tau)}{\theta_2(0|\tau)\,\theta_4(0|2\tau)},\\
c(u) &= \frac{2\theta_1(\eta|2\tau)\,\theta_4(u+\eta|2\tau)\,\theta_4(u|2\tau)}{\theta_2(0|\tau)\,\theta_4(0|2\tau)},\\
d(u) &= \frac{2\theta_1(\eta|2\tau)\,\theta_1(u+\eta|2\tau)\,\theta_1(u|2\tau)}{\theta_2(0|\tau)\,\theta_4(0|2\tau)}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Можно показать, что эта R-матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (2.6), а построенная по ней квантовая матрица монодромии – сплетающему соотношению (2.8), так что трансфер-матрицы $\mathsf{T}(u)$ коммутируют. Величины Γ и Δ для R-матрицы (2.27) таковы:

$$
\Gamma = \frac{\theta_1^2(\eta|2\tau)}{\theta_4^2(\eta|2\tau)}, \quad \Delta = \frac{\theta_4^2(0|2\tau)}{\theta_4^2(\eta|2\tau)}\,\frac{\theta_2(\eta|\tau)}{\theta_2(0|\tau)}. \tag{2.29}
$$

Ниже нам будут нужны следующие свойства R-матрицы (2.27):

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{R}_{12}(-u;-\eta,\tau) = -\mathsf{R}_{12}(u;\eta,\tau),\\
&\mathsf{R}_{12}^{t_1t_2}(u) = \mathsf{R}_{12}(u),\\
&\mathsf{R}_{12}(u-\eta;\eta,\tau) = e^{\pi i(2u-\eta+\tau)}\mathsf{R}_{12}^{t_1}(u+\tau+1;-\eta,\tau),
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

где t_i означает транспонирование в i-м пространстве.

Представляет интерес поведение R-матрицы (2.27) при модулярном преобразовании $\tau \to -1/\tau$. Пользуясь формулами для модулярного преобразования тэта-функций, находим:

$$
\mathsf{R}\Big(\frac{u}{\tau};\frac{\eta}{\tau},-\frac{1}{\tau}\Big) = -i\sqrt{-i\tau}\,e^{\pi i(u^2+u\eta+\eta^2)/\tau}\,\tilde{\mathsf{R}}(u;\eta,\tau), \tag{2.31}
$$

где

$$
\tilde{\mathsf{R}}(u;\eta,\tau) = \theta_1(\eta|\tau)\sum_{a=0}^{3}\frac{\theta_{a+1}\Big(u+\frac{\eta}{2}|\tau\Big)}{2\theta_{a+1}\Big(\frac{\eta}{2}|\tau\Big)}\,\sigma_a\otimes\sigma_a = \begin{pmatrix} \tilde{a}(u) & 0 & 0 & \tilde{d}(u)\\ 0 & \tilde{b}(u) & \tilde{c}(u) & 0\\ 0 & \tilde{c}(u) & \tilde{b}(u) & 0\\ \tilde{d}(u) & 0 & 0 & \tilde{a}(u) \end{pmatrix}.
$$

Явный вид матричных элементов следующий:

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}(u) &= \frac{\theta_2\left(\frac{\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_2\left(\frac{u}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_1\left(\frac{u+\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)}{\theta_2\left(0\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_4(0|\tau)}, \\
\tilde{b}(u) &= \frac{\theta_2\left(\frac{\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_1\left(\frac{u}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_2\left(\frac{u+\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)}{\theta_2\left(0\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_4(0|\tau)}, \\
\tilde{c}(u) &= \frac{\theta_1\left(\frac{\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_2\left(\frac{u}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_2\left(\frac{u+\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)}{\theta_2\left(0\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_4(0|\tau)}, \\
\tilde{d}(u) &= -\frac{\theta_1\left(\frac{\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_1\left(\frac{u}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_1\left(\frac{u+\eta}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\right)}{\theta_2\left(0\Big|\frac{\tau}{2}\right)\theta_4(0|\tau)}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

2.3.2 Связь с XYZ-цепочкой

Из формул (2.25), (2.26) сразу следует, что $\mathsf{R}(0) = \theta_1(\eta|\tau)\mathsf{P}$, поэтому $\mathsf{T}(0)$, как и в случае 6-вершинной модели, пропорциональна оператору циклического сдвига на один узел. Логарифмическая производная $\partial_u \log \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}$ содержит гамильтониан H^{XYZ} анизотропной цепочки Гейзенберга. Чтобы это увидеть, надо проделать вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны в разделе 2.2.3. Мы имеем:

$$
\theta_1(\eta|\tau)\left(\frac{d}{du}\log \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}\right)_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}} = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\alpha_1\alpha_1'}\ldots\delta_{\alpha_{j-2}\alpha_{j-2}'}\frac{d}{du}R_{\alpha_j\alpha_{j-1}}^{\alpha_{j-1}'\alpha_j'}(u)\Big|_{u=0}\delta_{\alpha_{j+1}\alpha_{j+1}'}\ldots\delta_{\alpha_N\alpha_N'}.
$$

Теперь заметим, что $\mathsf{P}\mathsf{R}(u) = \check{\mathsf{R}}(u) = \sum_{a=0}^{3}\check{W}_a(u)\,\sigma_a\otimes\sigma_a$, где

$$
\check{W}_0 = \frac{1}{2}(a+c), \quad \check{W}_1 = \frac{1}{2}(b+d), \quad \check{W}_2 = \frac{1}{2}(b-d), \quad \check{W}_3 = \frac{1}{2}(a-c),
$$

и тогда

$$
R_{\alpha_j\alpha_{j-1}}^{\alpha_{j-1}'\alpha_j'}(u) = \sum_{a=0}^{3}\check{W}_a(u)(\sigma_a)_{\alpha_{j-1}\alpha_{j-1}'}(\sigma_a)_{\alpha_j\alpha_j'}.
$$

Для логарифмической производной трансфер-матрицы получаем:

$$
\partial_u \log \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} = \theta_1^{-1}(\eta|\tau)\sum_{j=1}^{N}\sum_{a=0}^{3}\check{W}_a'(0)\sigma_a^{(j)}\sigma_a^{(j+1)}.
$$

Несложное вычисление с использованием тождеств для тэта-функций Якоби показывает, что

$$
\check{W}_a(u) = \theta_1(u|\tau)\,\frac{\theta_{5-a}\left(\frac{u}{2}+\eta\Big|\tau\right)}{2\theta_{5-a}\left(\frac{u}{2}\Big|\tau\right)}, \tag{2.33}
$$

так что
$$\check{W}_0'(0)=\frac{1}{2}\,\theta_1'(\eta|\tau),\quad \check{W}_1'(0)=\frac{1}{2}\,\theta_1'(0|\tau)\,\frac{\theta_4(\eta|\tau)}{\theta_4(0|\tau)},$$

$$\check{W}_2'(0)=\frac{1}{2}\,\theta_1'(0|\tau)\,\frac{\theta_3(\eta|\tau)}{\theta_3(0|\tau)},\quad \check{W}_3'(0)=\frac{1}{2}\,\theta_1'(0|\tau)\,\frac{\theta_2(\eta|\tau)}{\theta_2(0|\tau)}.$$

(Отметим, что $\check{\mathsf{R}}(u;\eta,\tau)=\mathsf{R}(\eta;u,\tau)$, что очевидно из (2.28).) Мы приходим к выводу, что
$$\partial_u \log \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}=\frac{\theta_1'(0|\tau)}{2\theta_1(\eta|\tau)}\,H^{\mathrm{XYZ}}+J_0N\mathsf{I}, \tag{2.34}$$

где $J_0=\frac{1}{2}\,\theta_1'(\eta|\tau)/\theta_1(\eta|\tau)$, а гамильтониан XYZ-цепочки равен
$$H^{\mathrm{XYZ}}=\sum_{j=1}^{N}\Big(J_x\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}+J_y\sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(j+1)}+J_z\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}\Big)$$

с константами
$$J_x=\frac{\theta_4(\eta|\tau)}{\theta_4(0|\tau)}\,,\quad J_y=\frac{\theta_3(\eta|\tau)}{\theta_3(0|\tau)}\,,\quad J_z=\frac{\theta_2(\eta|\tau)}{\theta_2(0|\tau)}\,.$$

Отметим, что $J_x:\,J_y:\,J_z=(1+\Gamma):\,(1-\Gamma):\,\Delta$ (см. (2.29)).

2.3.3 Результат диагонализации трансфер-матрицы

Диагонализация трансфер-матрицы 8-вершинной модели, впервые осуществленная Бакстером в 1973 году, – сложная и нетривиальная процедура. Мы познакомимся с ней ниже в разделе 3.3, а здесь приведем только окончательный ответ. Собственные значения трансфер-матрицы при четном $N=2n$ (точное решение известно только в этом случае) даются выражением
$$T(u)=e^{i\nu}\theta_1^N(u+\eta|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_i-\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_i|\tau)}+e^{-i\nu}\theta_1^N(u|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_i+\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_i|\tau)}, \tag{2.35}$$

где n чисел u_i должны удовлетворять системе n уравнений Бете
$$e^{2i\nu}\left(\frac{\theta_1(u_j+\eta|\tau)}{\theta_1(u_j|\tau)}\right)^N=\prod_{k=1,\neq j}\frac{\theta_1(u_j-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-u_k-\eta|\tau)}\,. \tag{2.36}$$

Параметр ν может принимать некоторый дискретный набор значений, среди которых содержится $\nu=0$.

2.3.4 Тригономерические вырождения эллиптической R-матрицы

Обсудим тригонометрические вырождения формул из этого раздела. Как видно из формул (2.24), в пределе $\tau\to+i\infty$ ($q\to 0$) эллиптическая R-матрица вырождается в тригонометрическую R-матрицу симметричной 6-вершинной модели:
$$\mathsf{R}(u)\to 2q^{\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}\sin\pi(u+\eta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\pi u & \sin\pi\eta & 0\\ 0 & \sin\pi\eta & \sin\pi u & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sin\pi(u+\eta)\end{pmatrix}+O(q^{\frac{5}{4}}).$$

Для соответствия с формулами предыдущего раздела надо заменить $\eta \to i\eta$ и $u \to iu$.

Другое тригонометрическое вырождение получается при $\tau \to 0$ ($q \to 1$). Для этого удобно перейти к модулярно-преобразованной R-матрице (2.31). Пользуясь формулами (2.32), найдем:

$$\frac{i}{4}\lim_{\tau\to+i\infty}(-i\tau)^{-1/2}q^{-1/4}\mathsf{R}\Big(\frac{u}{\tau};\frac{\eta}{\tau},-\frac{1}{\tau}\Big)=\tilde{\mathsf{R}}^{\rm trig}(u;\eta)=\begin{pmatrix}\tilde{a}^{\rm trig} & 0 & 0 & \tilde{d}^{\rm trig}\\ 0 & \tilde{b}^{\rm trig} & \tilde{c}^{\rm trig} & 0\\ 0 & \tilde{c}^{\rm trig} & \tilde{b}^{\rm trig} & 0\\ \tilde{d}^{\rm trig} & 0 & 0 & \tilde{a}^{\rm trig}\end{pmatrix}.$$

Матричные элементы таковы:

$$\begin{aligned}\tilde{a}^{\rm trig}&=\cos\tfrac{\eta}{2}\,\cos\tfrac{u}{2}\,\sin\tfrac{u+\eta}{2},\\ \tilde{b}^{\rm trig}&=\cos\tfrac{\eta}{2}\,\sin\tfrac{u}{2}\,\cos\tfrac{u+\eta}{2},\\ \tilde{c}^{\rm trig}&=\sin\tfrac{\eta}{2}\,\cos\tfrac{u}{2}\,\cos\tfrac{u+\eta}{2},\\ \tilde{d}^{\rm trig}&=-\sin\tfrac{\eta}{2}\,\sin\tfrac{u}{2}\,\sin\tfrac{u+\eta}{2}.\end{aligned}$$

В пределе получается 8-вершинная модель, у которой больцмановские веса не все независимы (остается только два параметра).

Отметим, что кроме этих стандартных тригонометрических вырождений существует другой тригонометрический предел эллиптической R-матрицы, который дает так называемую 7-вершинную модель. Он получается, если перед взятием предела подвергнуть эллиптическую R-матрицу калибровочному преобразованию

$$\mathsf{R}(u)\to\mathsf{R}^q(u)=G_1G_2\mathsf{R}(u)(G_1G_2)^{-1},\quad G_1=G\otimes 1,\quad G_2=1\otimes G$$

с матрицей

$$G=\begin{pmatrix}q^{\frac14}\gamma^{-\frac12} & 0\\ 0 & q^{-\frac14}\gamma^{\frac12}\end{pmatrix},$$

так что $G_1G_2=\mathrm{diag}\Big(q^{\frac12}\gamma^{-1},1,1,q^{-\frac12}\gamma\Big)$, где γ – произвольный параметр.

Задача. Показать, что R-матрица $\mathsf{R}^q(u)$ удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (2.6).

Теперь определим R-матрицу

$$\mathsf{R}^{7\rm v}(u)=\frac12\lim_{q\to0}q^{-\frac14}\,\mathsf{R}^q(u), \tag{2.37}$$

которая тоже, очевидно, удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера. Из приведенных выше формул сразу следует ее явный вид:

$$\mathsf{R}^{7\rm v}(u)=\begin{pmatrix}a^{7\rm v}(u) & 0 & 0 & 0\\ 0 & b^{7\rm v}(u) & c^{7\rm v}(u) & 0\\ 0 & c^{7\rm v}(u) & b^{7\rm v}(u) & 0\\ d^{7\rm v}(u) & 0 & 0 & a^{7\rm v}(u)\end{pmatrix},$$

где

$$a^{7\rm v}(u)=\sin\pi(u+\eta),\quad b^{7\rm v}(u)=\sin\pi u,\quad c^{7\rm v}(u)=\sin\pi\eta,$$
$$d^{7\rm v}(u)=4\gamma^2\sin\pi\eta\,\sin\pi(u+\eta)\sin\pi u.$$

3 Алгебраический анзац Бете

3.1 Алгебраический анзац Бете в 6-вершинной модели

Сплетающее соотношение (2.8)

$$\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u')) = (\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u') \tag{3.1}$$

или, что то же самое,

$$\mathsf{R}(u-u')\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(u') = \mathcal{T}_2(u')\mathcal{T}_1(u)\mathsf{R}(u-u') \tag{3.2}$$

играет основную роль в теории интегрируемых моделей статистической физики на двумерной решетке, а также интегрируемых моделей физики твердого тела и теории поля. С алгебраической точки зрения оно задает коммутационные соотношения между генераторами бесконечномерной алгебры (квантовой аффинной алгебры), порождаемой коэффициентами разложения матричных элементов матрицы $\mathcal{T}(u)$ по u. Уравнение Янга-Бакстера эквивалентно ассоциативности этой алгебры, а реализация сплетающего соотношения для 6-вершинной модели матрицами больцмановских весов означает выбор ее специального конечномерного представления. Процедура построения собственных векторов трансфер-матрицы с помощью алгебраических свойств введенных операторов называется алгебраическим анзацем Бете. Далее в этом разделе мы проследим основные моменты этой конструкции в случае, когда R-матрица имеет вид

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

с $a = \sinh(u+\eta)$, $b = \sinh u$, $c = \sinh\eta$.

Матричные элементы квантовой матрицы монодромии

$$\mathcal{T}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$

представляют собой некоторые операторы в пространстве $\mathcal{H} \cong (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Поэлементное выписывание соотношений, содержащихся в (3.1), дает правила коммутации этих операторов. Вот как выглядит равенство (3.1) в подробной матричной записи:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u)A(v) & A(u)B(v) & B(u)A(v) & B(u)B(v) \\ A(u)C(v) & A(u)D(v) & B(u)C(v) & B(u)D(v) \\ C(u)A(v) & C(u)B(v) & D(u)A(v) & D(u)B(v) \\ C(u)C(v) & C(u)D(v) & D(u)C(v) & D(u)D(v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A(v)A(u) & A(v)B(u) & B(v)A(u) & B(v)B(u) \\ A(v)C(u) & A(v)D(u) & B(v)C(u) & B(v)D(u) \\ C(v)A(u) & C(v)B(u) & D(v)A(u) & D(v)B(u) \\ C(v)C(u) & C(v)D(u) & D(v)C(u) & D(v)D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

где $a = a(u-v)$, $b = b(u-v)$, $c = c(u-v)$. Ниже мы явно выпишем только те соотношения, которые понадобятся для вычислений.

Во-первых, одноименные элементы коммутируют при различных значениях спектрального параметра: $[A(u),\, A(v)] = 0$, $[B(u),\, B(v)] = 0$, и т.д. Во-вторых, имеют место коммутационные соотношения

$$a(u-v)B(u)A(v) = c(u-v)B(v)A(u) + b(u-v)A(v)B(u) \tag{3.4}$$

$$a(u-v)B(v)D(u) = c(u-v)B(u)D(v) + b(u-v)D(u)B(v) \tag{3.5}$$

Упражнение. Выписать все соотношения на операторы $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, $D(u)$, содержащиеся в (3.1).

Задача. Доказать, что величина

$$\det_q \mathcal{T}(u) = A(u+\eta)D(u) - B(u+\eta)C(u) \tag{3.6}$$

является центральным элементом алгебры, порожденной матричными элементами квантовой матрицы монодромии, т.е. коммутирует со всеми генераторами этой алгебры.

В случае рационального вырождения R-матрицы (3.3) (в пределе $\epsilon \to 0$ после подстановки $u \to \epsilon u, \eta \to \epsilon\eta$), когда $a = u + \eta$, $b = u$, $c = \eta$, коммутационные соотношения, содержащиеся в (3.1), можно компактно записать в виде

$$[\mathcal{T}_{ij}(u),\, \mathcal{T}_{kl}(v)] = \frac{\eta}{u-v}\Big(\mathcal{T}_{kj}(v)\mathcal{T}_{il}(u) - \mathcal{T}_{kj}(u)\mathcal{T}_{il}(v)\Big) \tag{3.7}$$

при всех $i, j, k, l = 1, 2$.

Рассмотрим опять вектор $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$. Нетрудно увидеть, что он является собственным для операторов $A(u)$ и $D(u)$, а $C(u)$ уничтожает его:

$$A(u)\,|\Omega\rangle = a^N(u)\,|\Omega\rangle\,, \quad D(u)\,|\Omega\rangle = b^N(u)\,|\Omega\rangle\,, \quad C(u)\,|\Omega\rangle = 0$$

Вектор $|\Omega\rangle$ будем называть порождающим (или вакуумным), поскольку все остальные собственные вектора трансфер-матрицы будут строиться многократным применением к нему операторов $B(u)$.

Напомним, что трансфер-матрица – это след во вспомогательном пространстве $V_0 \cong \mathbb{C}^2$ от произведения R-матриц:

$$\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}_0\Big(\mathsf{R}_{01}(u)\mathsf{R}_{02}(u)\ldots\mathsf{R}_{0N}(u)\Big).$$

Следующая основная теорема дает алгебраическую конструкцию собственных векторов и собственных значений трансфер-матрицы.

Теорема. *Векторы*

$$|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

являются собственными векторами трансфер-матрицы ($\mathsf{T}(u)\,|\Phi\rangle = T(u)\,|\Phi\rangle$) при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\frac{a^N(u_j)}{b^N(u_j)} = (-1)^{n-1}\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{a(u_j-u_k)}{a(u_k-u_j)} \tag{3.8}$$

или

$$\left(\frac{\sinh(u_j+\eta)}{\sinh u_j}\right)^N = \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{\sinh(u_j-u_k+\eta)}{\sinh(u_j-u_k-\eta)},$$

причем собственное значение $T(u) = T(u; u_1, \dots, u_n)$ *дается формулой*

$$T(u; u_1, \dots, u_n) = a^N(u) \prod_{j=1}^{n} \frac{a(u_j-u)}{b(u_j-u)} + b^N(u) \prod_{j=1}^{n} \frac{a(u-u_j)}{b(u-u_j)}$$

или

$$T(u; u_1, \dots, u_n) = \sinh^N(u+\eta) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(u-u_j-\eta)}{\sinh(u-u_j)} + \sinh^N u \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(u-u_j+\eta)}{\sinh(u-u_j)}.$$

Доказательство. Перепишем нужные нам коммутационные соотношения (3.4), (3.5) в более удобном виде:

$$A(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{b(v-u)}\, B(v)A(u) - \frac{c(v-u)}{b(v-u)}\, B(u)A(v),$$

$$D(u)B(v) = \frac{a(u-v)}{b(u-v)}\, B(v)D(u) - \frac{c(u-v)}{b(u-v)}\, B(u)D(v).$$

С помощью этих соотношений можно преобразовать выражение

$$(A(u)+D(u)) \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle\,,$$

пронося $A(u)$ и $D(u)$ через $B(u_j)$ направо до встречи с вектором $|\Omega\rangle$, который является для них собственным. При этом возникают 2^n слагаемых, которые собираются в выражения вида

$$T(u) \prod_{k=1}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle \quad \text{и} \quad \Lambda_j(u)\, B(u) \prod_{k=1,\neq j}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle \tag{3.9}$$

с некоторыми числовыми множителями $T(u)$ и $\Lambda_j(u)$. Первое из этих выражений получается, если при коммутации учитывать только первые слагаемые в правых частях коммутационных соотношений. Действительно, если на каком-то шаге воспользоваться вторым слагаемым, возникнет оператор $B(u)$, который потом исчезнуть уже не может. Таким образом, $T(u)$ дается выражением для собственного значения, приведенным выше. Однако, пока мы еще не можем сказать, что наш вектор собственный, поскольку имеются "плохие члены" – векторы вида $B(u) \prod_{k=1,\neq j}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle$ с коэффициентами $\Lambda_j(u)$. Коэффициент $\Lambda_j(u)$ можно найти, поставив $B(u_j)$ на первое место (пользуясь коммутативностью операторов B), и пронеся сначала $A(u)+D(u)$ через $B(u_j)$, пользуясь при этом вторыми слагаемыми в коммутационных соотношениях, а потом, при дальнейшем проносе направо, пользоваться только первыми слагаемыми. В результате получается

$$\Lambda_j(u) = -\frac{c}{b(u_j-u)} \left(a^N(u_j) \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{a(u_k-u_j)}{b(u_k-u_j)} - b^N(u_j) \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{a(u_j-u_k)}{b(u_j-u_k)} \right). \tag{3.10}$$

Для того, чтобы все плохие члены исчезли, достаточно потребовать $\Lambda_j(u) = 0$ при всех $j = 1, \dots, n$, что, очевидно, эквивалентно системе уравнений Бете.

3.2 Модели общего вида с тригонометрической R-матрицей

Польза рассмотренного в предыдущем разделе алгебраического метода не ограничивается только элегантным решением 6-вершинной модели. Что, возможно, даже более важно, алгебраический анзац Бете позволяет существенно расширить запас интегрируемых моделей.

3.2.1 Неоднородные модели

Начнем с того, что перепишем R-матрицу (2.9) на j-м узле в виде

$$\mathsf{L}_j(u) = \begin{pmatrix} \sinh\Big(u + \frac{\eta}{2}\,\sigma_z^{(j)}\Big) & \sinh\eta\sigma_-^{(j)} \\ \\ \sinh\eta\sigma_+^{(j)} & \sinh\Big(u - \frac{\eta}{2}\,\sigma_z^{(j)}\Big) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

и назовем *квантовым L-оператором* (терминология восходит к методу обратной задачи рассеяния). Очевидно, $\mathsf{L}_j(u) = \mathsf{R}_{j0}(u-\frac{\eta}{2})$, а также $\mathcal{T}(u) = \mathsf{L}_1(u)\mathsf{L}_2(u)\ldots\mathsf{L}_N(u)$, где мы переопределили $\mathcal{T}(u)$ сдвигом аргумента на $\frac{\eta}{2}$. Квантовый L-оператор можно рассматривать как "элементарную" квантовую матрицу монодромии (для модели на одном узле). Ясно поэтому, что L-оператор удовлетворяет основному сплетающему соотношению

$$\check{\mathsf{R}}(u-v)(\mathsf{L}(u)\otimes\mathsf{L}(v)) = (\mathsf{L}(v)\otimes\mathsf{L}(u))\check{\mathsf{R}}(u-v) \tag{3.12}$$

с R-матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\eta & \sinh u & 0 \\ 0 & \sinh u & \sinh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u+\eta) \end{pmatrix}$$

Действие элементов L-оператора на вектор $|+\rangle$ таково:

$$\mathsf{L}(u)\,|+\rangle = \begin{pmatrix} \sinh\Big(u+\frac{\eta}{2}\Big) & \star \\ 0 & \sinh\Big(u-\frac{\eta}{2}\Big) \end{pmatrix} |+\rangle \tag{3.13}$$

Звездочкой обозначен несущественный для нас ненулевой элемент.

Обобщение, позволяющее породить широкий класс моделей, которые решаются тем же методом, основано на замечании, что сплетающее соотношение (3.1) для квантовых матриц монодромии останется в силе, если спектральный параметр в каждом L-операторе в произведении по цепочке сдвигать на произвольные зависящие от номера узла величины:

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{L}_1(u-\xi_1)\,\mathsf{L}_2(u-\xi_2)\,\ldots\,\mathsf{L}_N(u-\xi_N) \tag{3.14}$$

(Разумеется, сплетающее соотношение (3.1) для $\mathcal{T}(u)$, $\mathcal{T}(v)$ и вытекающая из него коммутативность их следов имеет место, если только параметры ξ_i одинаковы в обеих матрицах.) Такая $\mathcal{T}$-матрица называется матрицей монодромии неоднородной цепочки, а величины ξ_i – неоднородностями в узлах. Наряду с η они являются параметрами, задающими модель. Тем самым мы построили бесконечно-параметрическое семейство моделей, трансфер-матрицы которых поддаются диагонализации с помощью того же алгебраического анзаца Бете. В математическом отношении неоднородные модели ничем не хуже (а, возможно, даже лучше) однородной 6-вершинной модели или XXZ-цепочки. С физической точки зрения, однако, их недостатком является то, что как правило не удается найти локальный гамильтониан, который можно было бы включить в построенное коммутирующее семейство. Поэтому вместо "мы построили модель", физик скорее сказал бы лишь "мы построили однопараметрическое семейство коммутирующих операторов".

Важным условием применимости алгебраического анзаца Бете было существование вакуумного вектора $|\Omega\rangle$ – такого, что $C(u)\,|\Omega\rangle = 0$ и собственного для $A(u), D(u)$, т.е. такого, что

$$\mathcal{T}(u)\,|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} |\Omega\rangle = \begin{pmatrix} \mathsf{a}(u) & \star \\ 0 & \mathsf{d}(u) \end{pmatrix} |\Omega\rangle$$

с некоторыми функциями $\mathsf{a}(u)$, $\mathsf{d}(u)$. Свойство (3.13) означает, что в нашей обобщенной модели в качестве вакуумного вектора можно взять $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$, тогда

$$\mathsf{a}(u) = \prod_{j=1}^{N} \sinh\Big(u - \xi_j + \frac{\eta}{2}\Big)\,, \qquad \mathsf{d}(u) = \prod_{j=1}^{N} \sinh\Big(u - \xi_j - \frac{\eta}{2}\Big).$$

Функции такого вида будем называть *тригонометрическими полиномами* (степени N).

Можно пойти еще дальше и взять целые функции $\mathsf{a}(u)$, $\mathsf{d}(u)$ с периодом $2\pi i$ (вакуумные собственные значения операторов $A(u)$ и $D(u)$) в качестве *функциональных параметров* модели. (Будем называть такую модель обобщенной XXZ моделью.) Для обобщенной модели с вакуумным вектором существует общая алгебраическая процедура диагонализации коммутативного семейства операторов $\operatorname{tr}\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$.

Теорема. *Векторы*

$$|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

являются собственными векторами трансфер-матрицы ($\mathsf{T}(u)\,|\Phi\rangle = T(u)\,|\Phi\rangle$) при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\frac{\mathsf{a}(u_j)}{\mathsf{d}(u_j)} = \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{\sinh(u_j - u_k + \eta)}{\sinh(u_j - u_k - \eta)}, \tag{3.15}$$

причем собственное значение $T(u) = T(u; u_1,\ldots,u_n)$ дается формулой

$$T(u;u_1,\ldots,u_n) = \mathsf{a}(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j-\eta)}{\sinh(u-u_j)} + \mathsf{d}(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j+\eta)}{\sinh(u-u_j)}. \tag{3.16}$$

Доказательство полностью аналогично таковому для 6-вершинной модели.

3.2.2 Q-оператор Бакстера и TQ-соотношение.

Обратим внимание на то, что система уравнений Бете в точности эквивалентна тому, что собственное значение трансфер-матрицы $T(u) = T(u; u_1, \ldots, u_n)$ (3.16) не имеет полюсов в точках $u = u_i$. На этом замечании основан альтернативный метод получения уравнений Бете. Именно, из того, что трансфер-матрицы коммутируют при всех u следует, что они могут быть приведены к диагональному виду преобразованием, не зависящим от u, а тогда, поскольку все их матричные элементы – тригонометрические полиномы степени N, таковыми должны быть и все их собственные значения. Поэтому надо потребовать, чтобы правая часть (3.16) была регулярной функцией в конечной части комплексной плоскости. Требование равенства нулю вычетов в точках u_i и даст систему уравнений Бете (3.15).

Обозначим
$$Q(u) = \prod_{j=1}^{n} \sinh(u - u_j),$$
тогда соотношение (3.16) можно записать в виде
$$T(u)Q(u) = \mathsf{a}(u)Q(u-\eta) + \mathsf{d}(u)Q(u+\eta), \tag{3.17}$$
а уравнения Бете в виде
$$\frac{\mathsf{a}(u_j)}{\mathsf{d}(u_j)} = -\frac{Q(u_j+\eta)}{Q(u_j-\eta)}.$$
Оказывается, можно построить *оператор* $\mathsf{Q}(u)$ такой, что а) он коммутирует со всеми трансфер-матрицами, т.е. $[\mathsf{T}(u), \mathsf{Q}(v)] = 0$ при всех u, v и б) его собственные значения на бетевских векторах $|\Phi(u_1, \ldots, u_n)\rangle$ равны $Q(u)$. Соотношение (3.17) запишется тогда в операторном виде:
$$\mathsf{T}(u)\mathsf{Q}(u) = \mathsf{a}(u)\mathsf{Q}(u-\eta) + \mathsf{d}(u)\mathsf{Q}(u+\eta).$$
Оно называется TQ-соотношением, а $\mathsf{Q}(u)$ – Q-оператором Бакстера.

3.2.3 Предел в XXX-модель и алгебра sl_2.

Перенормируем $u \to \eta u$ и совершим предельный переход $\eta \to 0$. Тригонометрическая R-матрица при этом перейдет в рациональную (полиномиальную)
$$\mathsf{R}(u) = \begin{pmatrix} u{+}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u{+}1 \end{pmatrix} = u\mathsf{I} + \mathsf{P}. \tag{3.18}$$
Отметим, что она $GL(2)$-инвариантна в следующем смысле:
$$\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}\, \mathsf{R}(u) = \mathsf{R}(u)\, \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} \tag{3.19}$$
для любой матрицы $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$. L-оператор примет вид
$$\mathsf{L}(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{1}{2}\sigma_z & \sigma_- \\ \sigma_+ & u - \frac{1}{2}\sigma_z \end{pmatrix}.$$

Производящая функция интегралов движения XXX-модели строится как $\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}\Big(\mathsf{L}_1(u)\ldots\mathsf{L}_N(u)\Big)$. Как и в XXZ-случае, модель допускает интегрируемое неоднородное обобщение. $GL(2)$-инвариантность позволяет ввести интегрируемую модель с непериодическими (твистованными) граничными условиями путем вставки произвольного элемента $\mathbf{g} \in GL(2)$ под след, так что более общее коммутативное семейство выглядит следующим образом:

$$\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}\Big(\mathbf{g}\,\mathsf{L}_1(u-u_1)\ldots\mathsf{L}_N(u-u_N)\Big). \tag{3.20}$$

Более общий L-оператор, который сплетается рациональной R-матрицей (т.е. удовлетворяет $RLL = LLR$-соотношению) можно искать в виде

$$\mathsf{L}(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{1}{2}\,\mathsf{S} & \mathsf{S}_- \\ \mathsf{S}_+ & u - \frac{1}{2}\,\mathsf{S} \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Здесь $\mathsf{S}, \mathsf{S}_\pm$ – некоторые неизвестные пока операторы. Подстановка в $RLL = LLR$ приводит к следующим соотношениям:

$$[\mathsf{S},\, \mathsf{S}_\pm] = \pm 2\mathsf{S}_\pm, \qquad [\mathsf{S}_+,\, \mathsf{S}_-] = \mathsf{S}, \tag{3.22}$$

которые представляют собой соотношения алгебры sl_2 (можно считать ее вложенной в универсальную обертывающую алгебру $U(sl_2)$). Этот L-оператор действует в тензорном произведении $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – пространство какого-либо представления этой алгебры. Соответственно, квантовое пространство модели с трансфер-матрицей (3.20) и L-оператором (3.21) – это $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{V}_i$, где $\mathcal{V}_i \cong \mathcal{V}$.

Представления алгебры $U(sl_2)$ можно реализовать дифференциальными операторами в пространстве функций от переменной z:

$$\mathsf{S}_- = \partial_z, \qquad \mathsf{S} = z\partial_z - \ell, \qquad \mathsf{S}_+ = -z^2\partial_z + 2\ell z. \tag{3.23}$$

В общем случае это представление неприводимо и бесконечномерно. Если же $2\ell+1 \in \mathbb{Z}_+$, оно становится приводимым, и из него отщепляется $(2\ell+1)$-мерное неприводимое представление спина ℓ (целого или полуцелого), реализуемого в пространстве полиномов степени 2ℓ. В частности, при $\ell = \frac{1}{2}$ имеем представление $\mathsf{S} = \sigma_z$, $\mathsf{S}_\pm = \sigma_\pm$.

Приведем пример L-оператора с бесконечномерным квантовым пространством. Введем бозонные операторы рождения и уничтожения на решетке $\psi_n^\dagger$, ψ_n с коммутационными соотношениями $[\psi_n, \psi_m^\dagger] = \Delta^{-1}\delta_{mn}$, где Δ – постоянная решетки и возьмем операторы $\mathsf{S}, \mathsf{S}_\pm$ в виде

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}^{(n)} &= -\frac{4}{c\Delta}\left(1 + \frac{c\Delta^2}{2}\,\psi_n^\dagger\psi_n\right) \\
\mathsf{S}_+^{(n)} &= 2i\left(1 + \frac{c\Delta^2}{4}\,\psi_n^\dagger\psi_n\right)\psi_n \\
\mathsf{S}_-^{(n)} &= \frac{2i}{c}\,\psi_n^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Задача. Показать, что эти операторы удовлетворяют алгебре sl_2 (3.22).

L-оператор решеточной версии модели бозе-газа с точечным взаимодействием (квантового нелинейного уравнения Шредингера) с константой связи c на n-м узле решетки имеет вид

$$\mathsf{L}_n^{\mathrm{QNLS}}(\lambda) = -\tfrac{1}{2}\, c\Delta\sigma_z \mathsf{L}_n(i\lambda/c)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\, i\lambda\Delta + \frac{1}{2}\, c\Delta^2\psi_n^\dagger\psi_n & -i\Delta\psi_n^\dagger \\ ic\Delta\Big(1 + \frac{1}{4}\, c\Delta^2\psi_n^\dagger\psi_n\Big)\psi_n & 1 + \frac{1}{2}\, i\lambda\Delta + \frac{1}{2}\, c\Delta^2\psi_n^\dagger\psi_n \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

где L_n – L-оператор (3.21) на n-м узле с операторами $\mathsf{S}, \mathsf{S}_\pm$ как в (3.24). Квантовое пространство этого L-оператора – фоковское пространство, натянутое векторы, получающиеся действием операторов рождения $\psi_n^\dagger$ на вакуум $|0\rangle$ ($\psi_n\,|0\rangle = 0$).

В непрерывном пределе $\Delta \to 0$, $N \to \infty$ (здесь N – число узлов решетки), так что $L = N\Delta$ фиксировано. Можно показать, что гамильтониан квантового нелинейного уравнения Шредингера (1.55) содержится в разложении трансфер-матрицы по обратным степеням λ.

3.2.4 XXZ-модель и q-деформация алгебры sl_2.

По аналогии с рациональным случаем более общий L-оператор, который сплетается тригонометрической R-матрицей, можно искать в виде

$$\mathsf{L}(u) = \begin{pmatrix} \sinh\Big(u + \frac{\eta}{2}\,\mathsf{S}\Big) & \sinh\eta\,\mathsf{S}_- \\ \sinh\eta\,\mathsf{S}_+ & \sinh\Big(u - \frac{\eta}{2}\,\mathsf{S}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Подстановка в $RLL = LLR$ приводит к следующим соотношениям:

$$[\mathsf{S},\, \mathsf{S}_\pm] = \pm 2\mathsf{S}_\pm, \qquad [\mathsf{S}_+,\, \mathsf{S}_-] = \frac{\sinh(\eta\mathsf{S})}{\sinh\eta}.$$

Эти соотношения задают q-деформацию $U_q(sl_2)$ алгебры $U(sl_2)$. Положим $q = e^\eta$ и введем генераторы

$$\mathsf{A} = q^{\mathsf{S}/2}, \quad \mathsf{D} = q^{-\mathsf{S}/2}, \quad \mathsf{B} = \mathsf{S}_+, \quad \mathsf{C} = \mathsf{S}_-,$$

тогда соотношения запишутся в виде

$$\mathsf{AB} = q\mathsf{BA}, \quad \mathsf{BD} = q\mathsf{DB}, \quad \mathsf{DC} = q\mathsf{CD}, \quad \mathsf{CA} = q\mathsf{AC}, \quad [\mathsf{B},\, \mathsf{C}] = \frac{\mathsf{A}^2 - \mathsf{D}^2}{q - q^{-1}}.$$

Элемент Казимира выглядит так:

$$\Omega = \frac{q^{-1}\mathsf{A}^2 + q\mathsf{D}^2 - 2}{(q - q^{-1})^2} + \mathsf{BC} = \frac{\sinh^2(\frac{\eta}{2}(\mathsf{S} - 1))}{\sinh^2\eta} + \mathsf{S}_+\mathsf{S}_-. \tag{3.27}$$

При q в общем положении (не равном корню из 1) представления алгебры $U_q(sl_2)$ являются гладкими деформациями представлений алгебры $U(sl_2)$. Их можно реализовать разностными операторами в пространстве функций от переменной z. Введем операторы сдвига $T_\pm f(z) = f(q^{\pm 1}z)$. Тогда

$$\begin{gathered}
\mathsf{A} = q^{-\ell}T_+, \qquad \mathsf{D} = q^{\ell}T_-, \\
\mathsf{B} = \frac{z}{q^{-1}-q}\Big(q^{-2\ell}T_+ - q^{2\ell}T_-\Big), \\
\mathsf{C} = \frac{z^{-1}}{q^{-1}-q}\Big(T_- - T_+\Big).
\end{gathered} \tag{3.28}$$

Как и в случае алгебры $U(sl_2)$, при $2\ell+1 \in \mathbb{Z}_+$ это представление становится приводимым, и из него отщепляется $(2\ell+1)$-мерное неприводимое представление спина ℓ, реализуемого в пространстве полиномов степени 2ℓ. При $\ell = \frac{1}{2}$ имеем двумерное неприводимое представление $\mathsf{S} = \sigma_z$, $\mathsf{S}_\pm = \sigma_\pm$.

3.2.5 Тригонометрическая R-матрица и квантованная алгебра функций на группе $GL(2)$

Вместо симметричной тригонометрической R-матрицы (2.9) рассмотрим асимметричную R-матрицу

$$\bar{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh u & e^{u}\sinh\eta & 0 \\ 0 & e^{-u}\sinh\eta & \sinh u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u+\eta) \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Задача. Доказать, что эта R-матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера.

Оказывается, существует не зависящее от спектрального параметра решение сплетающего соотношения

$$\bar{\mathsf{R}}_{12}(u-v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(v) = \mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)\bar{\mathsf{R}}_{12}(u-v),$$

которое имеет вид $\mathcal{T}(u) = \hat{\mathbf{g}}$, где $\hat{\mathbf{g}}$ – матрица с некоммутативными матричными элементами

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющими алгебре

$$\hat{a}\hat{b} = q\hat{b}\hat{a}, \quad \hat{c}\hat{b} = q\hat{c}\hat{a}, \quad \hat{b}\hat{d} = q\hat{d}\hat{b}, \quad \hat{c}\hat{d} = q\hat{d}\hat{c}, \quad [\hat{b},\hat{c}] = 0, \quad [\hat{a},\hat{d}] = (q-q^{-1})\hat{b}\hat{c}, \tag{3.30}$$

где $q = e^{\eta}$, так что сплетающее соотношение принимает вид

$$\bar{\mathsf{R}}_{12}(u-v)\hat{\mathbf{g}}_1\hat{\mathbf{g}}_2 = \hat{\mathbf{g}}_2\hat{\mathbf{g}}_1\bar{\mathsf{R}}_{12}(u-v). \tag{3.31}$$

Это равенство обобщает свойство $GL(2)$-инвариантности (3.19) рациональной R-матрицы. Алгебра с образующими и соотношениями (3.30) известна как $GL_q(2)$, квантованная алгебра функций на группе $GL(2)$.

3.3 Алгебраический анзац Бете в 8-вершинной модели

R-матрица 8-вершинной модели может быть также записана в виде L-оператора

$$\mathsf{L}(u) = \begin{pmatrix} W_0(u)\sigma_0 + W_3(u)\sigma_3 & W_1(u)\sigma_1 - iW_2(u)\sigma_2 \\ \\ W_1(u)\sigma_1 + iW_2(u)\sigma_2 & W_0(u)\sigma_0 - W_3(u)\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{a}(u) & \mathsf{b}(u) \\ \\ \mathsf{c}(u) & \mathsf{d}(u) \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

который представляет собой матрицу 2×2, матричные элементы которой являются операторами в $\mathbb{C}^2$. Это та же самая R-матрица (2.27), записанная как блочная. Уравнение Янга-Бакстера для R превращается в $RLL = LLR$ соотношение для L:

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)\mathsf{L}_1(u)\mathsf{L}_2(v) = \mathsf{L}_2(v)\mathsf{L}_1(u)\mathsf{R}_{12}(u-v), \tag{3.33}$$

где $\mathsf{L}_1(u) = \mathsf{L}(u) \otimes 1$, $\mathsf{L}_2(v) = 1 \otimes \mathsf{L}(v)$.

Квантовая матрица монодромии 8-вершинной модели имеет вид

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{L}_1(u-\xi_1)\mathsf{L}_2(u-\xi_2)\ldots\mathsf{L}_N(u-\xi_N) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

где ξ_i – параметры неоднородности. Здесь $\mathsf{L}_j(u)$ дается формулой (3.32), в которой сигма-матрицы $\sigma_a^{(j)}$ действуют в j-й копии пространства $\mathbb{C}^2$, ассоциированного с j-м узлом решетки. Мы рассматриваем случай четного $N = 2n$, в противном случае точное решение модели проблематично. Квантовая матрица монодромии удовлетворяет $RTT = TTR$-соотношению

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(v) = \mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathsf{R}_{12}(u-v), \tag{3.35}$$

или

$$\check{\mathsf{R}}(u-v)\mathcal{T}(u) \otimes \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}(v) \otimes \mathcal{T}(u)\check{\mathsf{R}}(u-v), \tag{3.36}$$

Из этого соотношения следует, что трансфер-матрицы

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(u) &= \mathrm{tr}_0\Big(\mathsf{R}_{01}(u-\xi_1)\mathsf{R}_{02}(u-\xi_2)\ldots\mathsf{R}_{0N}(u-\xi_N)\Big) \\ &= \mathrm{tr}\Big(\mathsf{L}_1(u-\xi_1)\mathsf{L}_2(u-\xi_2)\ldots\mathsf{L}_N(u-\xi_N)\Big) = \mathrm{tr}\,\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u) \end{aligned} \tag{3.37}$$

коммутируют при различных значениях спектрального параметра u.

3.3.1 Сплетающие векторы

L-оператор 8-вершинной модели не имеет вакуумного вектора, т.е. вектора, уничтожаемого оператором $\mathsf{c}(u)$, поскольку матрица $\mathsf{c}(u)$ невырождена при почти всех u. Этот факт делает невозможным прямое применение алгебраического анзаца Бете, использованного в случае 6-вершинной модели. Ключевой ингридиент алгебраического анзаца Бете для 8-вершинной модели – правило действия R-матрицы (2.27) на некоторые специальные векторы. Введем семейство векторов

$$|\phi(s)\rangle = \begin{pmatrix} \theta_1(s|2\tau) \\ \theta_4(s|2\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

где s – комплексный параметр. Они называются сплетающими векторами. Ковектор, ортогональный $|\phi(s)\rangle$, имеет вид

$$\left\langle \phi^{\perp}(s) \right| = \Big(-\theta_4(s|2\tau), \theta_1(s|2\tau)\Big) = ie^{-\pi i(s+\frac{\tau}{2})}\left\langle \phi(s+\tau+1) \right|,$$

а скалярное произведение $\left\langle \phi^{\perp}(t)|\phi(s) \right\rangle$ дается выражением

$$\begin{aligned} \left\langle \phi^{\perp}(t)|\phi(s) \right\rangle &= \theta_1\left(\tfrac{1}{2}\,(t-s)|\tau\right)\theta_2\left(\tfrac{1}{2}\,(t+s)|\tau\right) \\ = 2&\frac{\theta_1(\frac{1}{2}\,(t-s)|2\tau)\theta_4(\frac{1}{2}\,(t-s)|2\tau)\theta_2(\frac{1}{2}\,(t+s)|2\tau)\theta_3(\frac{1}{2}\,(t+s)|2\tau)}{\theta_2(0|2\tau)\theta_3(0|2\tau)}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Используя тождества для тэта-функций, можно доказать следующее важное тождество для сплетающих векторов:

$$\mathsf{R}(u)\,|\phi(s+\eta)\rangle \otimes |\phi(s-u)\rangle = \theta_1(u+\eta|\tau)\ |\phi(s)\rangle \otimes |\phi(s-u+\eta)\rangle \tag{3.40}$$

или, явно указывая номера пространств, в которых живут векторы:

$$\mathsf{R}_{12}(u)\,|\phi(s+\eta)\rangle_1\,|\phi(s-u)\rangle_2 = \theta_1(u+\eta|\tau)\ |\phi(s)\rangle_1\,|\phi(s-u+\eta)\rangle_2\,. \tag{3.41}$$

Отметим, что при действии R-матрицы на тензорное произведение двух векторов в общем случае получается линейная комбинация тензорных произведений. Ситуация, когда в правой части остается только один член, как в (3.40), является исключительной. Это свойство было названо Бакстером “прохождением пары векторов через вершину”, и оно играло очень важную роль в его решении 8-вершинной модели. Векторы, удовлетворяющие этому свойству, параметризуются точками эллиптической кривой, которая униформизуется параметром s. Это объясняет происхождение параметра s в (3.40).

Приведем некоторые другие версии тождества (3.41). Заменив $u \to -u$, $\eta \to -\eta$ в (3.41) и используя (2.30), мы получим

$$\mathsf{R}_{12}(u)\,|\phi(s-\eta)\rangle_1\,|\phi(s+u)\rangle_2 = \theta_1(u+\eta|\tau)\ |\phi(s)\rangle_1\,|\phi(s+u-\eta)\rangle_2\,. \tag{3.42}$$

Сдвинув $s \to s+\tau+1$ и сделав транспонирование в обоих пространствах, придем к транспонированной версии уравнения (3.41):

$$\left\langle \phi^{\perp}(s+\eta) \right|_1 \left\langle \phi^{\perp}(s-u) \right|_2 \mathsf{R}_{12}(u) = \theta_1(u+\eta|\tau)\ \left\langle \phi^{\perp}(s) \right|_1 \left\langle \phi^{\perp}(s-u+\eta) \right|_2. \tag{3.43}$$

Сдвинув $u \to u-\xi$, а затем $s \to s+u$ в (3.40), и взяв скалярное произведение обеих частей с ковектором $\left\langle \phi^{\perp}(s+u) \right|$, получим:

$$\left\langle \phi^{\perp}(s+u) \right|_1 \mathsf{R}_{12}(u-\xi) \left| \phi(s+u+\eta) \right\rangle_1\ |\phi(s+\xi)\rangle_2 = 0, \tag{3.44}$$

где ξ – дополнительный произвольный параметр. Здесь оператор $\left\langle \phi^{\perp}(s+u) \right|_1 \mathsf{R}_{12}(u-\xi)\left| \phi(s+u+\eta) \right\rangle_1$ действует в вертикальном пространстве (номер 2). Взяв скалярное произведение (3.40) с ковектором $\left\langle \phi^{\perp}(t) \right|$, получим

$$\left\langle \phi^{\perp}(t) \right|_1 \mathsf{R}(u)_{12} \left| \phi(s+\eta) \right\rangle_1 |\phi(s-u)\rangle_2 = \theta_1(u+\eta|\tau)\ \left\langle \phi^{\perp}(t) \right| \phi(s) \Big\rangle\ |\phi(s-u+\eta)\rangle_2$$

или, что то же самое, но с дополнительным параметром ξ, вводимом с помощью сдвига $u \to u-\xi$,

$$\frac{\Big\langle \phi^{\perp}(t-u)\Big|_1 \mathsf{R}_{12}(u-\xi)\Big|\phi(s{+}u{+}\eta)\Big\rangle_1}{\langle\phi^{\perp}(t-u)|\,\phi(s+u)\rangle}\;|\phi(s+\xi)\rangle_2 = \theta_1(u{-}\xi{+}\eta|\tau)\;|\phi(s{+}\xi{+}\eta\rangle_2\,. \tag{3.45}$$

Сдвинув аргументы в (3.41) и поменяв знак η, используя свойства (2.30) и транспонировав в первом пространстве, получим важное следствие:

$$\Big\langle \phi^{\perp}(s)\Big|_1 \mathsf{R}_{12}(u)\Big|\phi(s-u)\Big\rangle_2 = \theta_1(u|\tau)\,\Big\langle \phi^{\perp}(s+\eta)\Big|_1\Big|\phi(s-u-\eta)\Big\rangle_2 \tag{3.46}$$

или, что то же самое, но с дополнительным параметром ξ,

$$\Big\langle \phi^{\perp}(s+u)\Big|_1 \mathsf{R}_{12}(u-\xi)\Big|\phi(s+\xi)\Big\rangle_2 = \theta_1(u-\xi|\tau)\,\Big\langle \phi^{\perp}(s+u+\eta)\Big|_1\Big|\phi(s+\xi-\eta)\Big\rangle_2. \tag{3.47}$$

Подчеркнем, что $\langle\ldots|_1|\ldots\rangle_2$ здесь – это не скалярное произведение, а тензорное произведение вектора и ковектора (которые живут в разных пространствах). Взяв скалярное произведение с вектором $|\phi(t-u+\eta)\rangle_1$ в первом пространстве, можно представить это тождество в следующем виде:

$$\frac{\Big\langle \phi^{\perp}(s+u)\Big|_1 \mathsf{R}_{12}(u-\xi)\Big|\phi(t-u+\eta)\Big\rangle_1}{\Big\langle\phi^{\perp}(s+u+\eta)|\,\phi(t-u+\eta)\Big\rangle}\;|\phi(s+\xi)\rangle_2 = \theta_1(u-\xi|\tau)\,|\phi(s+\xi-\eta)\rangle_2\,. \tag{3.48}$$

Теперь приведем более общее тождество для сплетающих векторов, которое доказывается практически так же, как (3.41):

$$\begin{aligned} &\mathsf{R}_{12}(u)\,|\phi(s+\eta)\rangle_1\,|\phi(t-u)\rangle_2 \\ &= \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)-u|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)|\tau)}\;|\phi(t)\rangle_1\,|\phi(s+u+\eta)\rangle_2 \\ &+\frac{\theta_1(u|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)+\eta|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)|\tau)}\;|\phi(s)\rangle_1\,|\phi(t-u-\eta)\rangle_2. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Оно дает правило действия R-матрицы на тензорное произведение двух произвольных векторов. При $t=s$ (3.49) совпадает с (3.41) (это можно увидеть, используя тождество для тэта-функций). Заменив $u\to -u$, $\eta\to-\eta$, мы также получим:

$$\begin{aligned} &\mathsf{R}_{12}(u)\,|\phi(s-\eta)\rangle_1\,|\phi(t+u)\rangle_2 \\ &= \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)+u|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)|\tau)}\;|\phi(t)\rangle_1\,|\phi(s-u-\eta)\rangle_2 \\ &+\frac{\theta_1(u|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)-\eta|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}\,(s+t)|\tau)}\;|\phi(s)\rangle_1\,|\phi(t+u+\eta)\rangle_2. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Уравнения (3.41), (3.42), (3.49), (3.50) можно объединить в “сплетающее соотношение” между R-матрицей и набором больцмановских весов модели типа IRF (interaction round a face). Введем векторы

$$\left|\phi_k^{k+1}(u)\right\rangle = \left|\phi(s-u+k\eta+\tfrac{\eta}{2})\right\rangle,$$
$$\left|\phi_{k+1}^{k}(u)\right\rangle = \left|\phi(s+u+k\eta+\tfrac{\eta}{2})\right\rangle, \tag{3.51}$$

тогда упомянутые выше уравнения можно компактно записать в виде

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)\left|\phi_k^{k'}(u)\right\rangle_1\left|\phi_{k'}^{k''}(v)\right\rangle_2 = \sum_l \left|\phi_l^{k''}(u)\right\rangle_1\left|\phi_k^{l}(v)\right\rangle_2 W\left[\begin{array}{cc} k & k' \\ l & k'' \end{array}\right](u-v), \tag{3.52}$$

где $W\left[\begin{array}{cc} k & k' \\ l & k'' \end{array}\right](u) = 0$ во всех случаях кроме $|k-k'| = |k'-k''| = |l-k''| = |l-k| = 1$. Ненулевые веса таковы:

$$W\left[\begin{array}{cc} k & k\pm1 \\ k\pm1 & k\pm2 \end{array}\right](u) = \theta_1(u+\eta|\tau),$$
$$W\left[\begin{array}{cc} k & k\pm1 \\ k\pm1 & k \end{array}\right](u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(s+k\eta\mp u|\tau)}{\theta_2(s+k\eta|\tau)}, \tag{3.53}$$
$$W\left[\begin{array}{cc} k & k\pm1 \\ k\mp1 & k \end{array}\right](u) = \frac{\theta_1(u|\tau)\theta_2(s+(k\pm1)\eta|\tau)}{\theta_2(s+k\eta|\tau)}.$$

Аналогичное сплетающее соотношение, которое можно получить из (3.52) транспонированием в обоих пространствах, справедливо для соответствующих ковекторов.

3.3.2 Вакуумные векторы

Рассмотрим калибровочное преобразование L-оператора

$$\mathsf{L}'_k(u,\xi_k) = M^{-1}_{k+l-1}(u)\mathsf{L}_k(u-\xi_k)M_{k+l}(u) = \begin{pmatrix} \mathsf{a}'_k(u) & \mathsf{b}'_k(u) \\ \mathsf{c}'_k(u) & \mathsf{d}'_k(u) \end{pmatrix}, \tag{3.54}$$

где $l \in \mathbb{Z}$ – целочисленный параметр. Матрица $M_k(u)$ дается выражением

$$M_k(u) = \begin{pmatrix} \theta_1(s_k+u|2\tau) & \gamma_k\theta_1(t_k-u|2\tau) \\ \theta_4(s_k+u|2\tau) & \gamma_k\theta_4(t_k-u|2\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

где $s_k = s+k\eta$, $t_k = t+k\eta$, $s,t \in \mathbb{C}$ – произвольные параметры, и

$$\gamma_k = \frac{1}{\theta_2(\tau_k|2\tau)\theta_3(\tau_k|2\tau)}, \quad \tau_k = \frac{1}{2}(s_k+t_k). \tag{3.56}$$

Отметим, что столбцы этой матрицы – сплетающие вектора. Обратная матрица имеет вид

$$M_k^{-1}(u) = \frac{1}{\det M_k(u)}\begin{pmatrix} \gamma_k\theta_4(t_k-u|2\tau) & -\gamma_k\theta_1(t_k-u|2\tau) \\ -\theta_4(s_k+u|2\tau) & \theta_1(s_k+u|2\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

где

$$\begin{aligned}\det M_k(u) = & -\gamma_k \left\langle \phi^{\perp}(t_k-u) \right| \phi(s_k+u) \Big\rangle \\ & = \gamma_k \theta_1(\tfrac{1}{2}(s-t)+u|\tau)\theta_2(\tau_k|\tau) \\ = 2 & \frac{\theta_1(\frac{1}{2}(s-t)+u|2\tau)\theta_4(\frac{1}{2}(s-t)+u|2\tau)}{\theta_2(0|2\tau)\theta_3(0|2\tau)} \equiv \mu(u).\end{aligned} \tag{3.58}$$

Отметим, что $\det M_k(u) = \mu(u)$ не зависит от k.

Калибровочно-преобразованный L-оператор (3.54) имеет локальный не зависящий от u вакуумный вектор

$$\left|\omega_k^l\right\rangle = \begin{pmatrix} \theta_1(s_{k+l-1}+\xi_k|2\tau) \\ \theta_4(s_{k+l-1}+\xi_k|2\tau) \end{pmatrix} = |\phi(s_{k+l-1}+\xi_k)\rangle_k \in V_k \tag{3.59}$$

который уничтожается левым нижним элементом $\mathsf{c}'_k(u)$:

$$\mathsf{c}'_k(u)\left|\omega_k^l\right\rangle = 0 \tag{3.60}$$

(напомним, что $\mathsf{c}'_k(u)$ зависит также от s и l). Это прямо следует из уравнения (3.44) (в нем надо положить $s = s_{k+l-1}$). В свою очередь, уравнения (3.45) и (3.48) (где надо положить $s = s_{k+l-1}$, $t = t_{k+l-1}$) говорят, как операторы $\mathsf{a}'_k(u)$, $\mathsf{d}'_k(u)$ действуют на вакуумный вектор:

$$\begin{aligned}\mathsf{a}'_k(u)\left|\omega_k^l\right\rangle &= \theta_1(u-\xi_k+\eta|\tau)\left|\omega_k^{l+1}\right\rangle, \\ \mathsf{d}'_k(u)\left|\omega_k^l\right\rangle &= \theta_1(u-\xi_k|\tau)\left|\omega_k^{l-1}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.61}$$

В отличие от 6-вершинной модели, вакуумный вектор не является собственным для этих операторов, но просто преобразуется под их действием.

Калибровочно-преобразованная матрица монодромии имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{T}'(u) &= \mathsf{L}'_1(u-\xi_1)\mathsf{L}'_2(u-\xi_2)\ldots\mathsf{L}'_N(u-\xi_N) \\ &= M_l^{-1}(u)\mathcal{T}(u)M_{N+l}(u) = \begin{pmatrix} A^l(u) & B^l(u) \\ C^l(u) & D^l(u) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Глобальные вакуумные векторы определяются как тензорное произведение локальных:

$$\left|\Omega^l\right\rangle = \left|\omega_1^l\right\rangle \otimes \left|\omega_2^l\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\omega_N^l\right\rangle.$$

В соответствии с (3.60), (3.61) действие операторов $A^l(u)$, $D^l(u)$ и $C^l(u)$ на глобальный вакуумный вектор дается формулами

$$\begin{aligned}C^l(u)\left|\Omega^l\right\rangle &= 0, \\ A^l(u)\left|\Omega^l\right\rangle &= \prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\left|\Omega^{l+1}\right\rangle, \\ D^l(u)\left|\Omega^l\right\rangle &= \prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i|\tau)\left|\Omega^{l-1}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.62}$$

3.3.3 Перестановочные соотношения

Введем обобщенные матрицы монодромии

$$\mathcal{T}_{k,l}(u) = M_k^{-1}(u)\mathcal{T}(u)M_l(u) = \begin{pmatrix} A_{k,l}(u) & B_{k,l}(u) \\ C_{k,l}(u) & D_{k,l}(u) \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

В этих новых обозначениях $\mathcal{T}'(u) = \mathcal{T}_{l,l+N}(u)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
A_{k,l}(u) &= \frac{\left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right| \mathcal{T}(u) \left|\phi(s_l+u)\right\rangle}{\left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right| \phi(s_k+u)\rangle}, \\
B_{k,l}(u) &= \gamma_l \frac{\left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right| \mathcal{T}(u) \left|\phi(t_l-u)\right\rangle}{\left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right| \phi(s_k+u)\rangle}, \\
C_{k,l}(u) &= -\frac{1}{\gamma_k} \frac{\left\langle \phi^\perp(s_k+u)\right| \mathcal{T}(u) \left|\phi(s_l+u)\right\rangle}{\left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right| \phi(s_k+u)\rangle}, \\
D_{k,l}(u) &= -\frac{\gamma_l}{\gamma_k} \frac{\left\langle \phi^\perp(s_k+u)\right| \mathcal{T}(u) \left|\phi(t_l-u)\right\rangle}{\left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right| \phi(s_k+u)\rangle}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Для требующихся ниже вычислений удобно ввести следующие вспомогательные обозначения для векторов:

$$X^l(u) = \left|\phi(s_l+u)\right\rangle, \quad Y^l(u) = \left|\phi(t_l-u)\right\rangle,$$
$$\tilde{X}^k(u) = \left\langle \phi^\perp(s_k+u)\right|, \quad \tilde{Y}^k(u) = \left\langle \phi^\perp(t_k-u)\right|,$$

тогда

$$\begin{aligned}
A_{k,l}(u) &= -\frac{\gamma_k}{\mu(u)}\, \tilde{Y}^k(u)\mathcal{T}(u)X^l(u), \\
B_{k,l}(u) &= -\frac{\gamma_k\gamma_l}{\mu(u)}\, \tilde{Y}^k(u)\mathcal{T}(u)Y^l(u), \\
C_{k,l}(u) &= \frac{1}{\mu(u)}\, \tilde{X}^k(u)\mathcal{T}(u)X^l(u), \\
D_{k,l}(u) &= \frac{\gamma_l}{\mu(u)}\, \tilde{X}^k(u)\mathcal{T}(u)Y^l(u).
\end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнения (3.42), (3.49), (3.50) выглядят следующим образом:

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)Y_1^{l-1}(u)Y_2^l(v) = \theta_1(u-v+\eta|\tau)Y_1^l(u)Y_2^{l-1}(v), \tag{3.65}$$

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)Y_1^{l+1}(u)X_2^l(v) = f_l^+(u-v)Y_1^l(u)X_2^{l-1}(v) + g_l(v-u)X_1^l(u)Y_2^{l+1}(v), \tag{3.66}$$

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)X_1^k(u)Y_2^{k-1}(v) = f_k^-(u-v)X_1^{k+1}(u)Y_2^k(v) + g_k(u-v)Y_1^{k-1}(u)X_2^k(v), \tag{3.67}$$

где

$$f_k^\pm(u) = \frac{\theta_1(u|\tau)\theta_2(\tau_{k\pm1}|\tau)}{\theta_2(\tau_k|\tau)}, \quad g_k(u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\tau_k+u|\tau)}{\theta_2(\tau_k|\tau)}.$$

Аналогичные соотношения справедливы для ковекторов $\tilde{X}^l(u)$, $\tilde{Y}^l(u)$; они получаются из (3.65), (3.66), (3.67) транспонированием в обоих пространствах.

Взяв соотношение $RTT = TTR$ (3.35) в обкладках векторов $Y_1^{l-1}(u)Y_2^l(v)$ справа и $\tilde{Y}_1^{k-1}(u)\tilde{Y}_2^k(v)$ слева и используя (3.65), придем к перестановочному соотношению

$$B_{k+1,l}(u)B_{k,l+1}(v) = B_{k+1,l}(v)B_{k,l+1}(u). \tag{3.68}$$

Аналогично, взяв (3.35) в обкладках векторов $Y_1^{l+1}(u)X_2^l(v)$ справа и $\tilde{Y}_1^{k-1}(u)\tilde{Y}_2^k(v)$ слева и используя (3.66), получим

$$\begin{aligned} &\theta_1(u-v+\eta|\tau)B_{k,l+1}(u)A_{k-1,l}(v) \\ &= \theta_1(u-v|\tau)A_{k,l-1}(v)B_{k-1,l}(u) + g_l(v-u)B_{k,l+1}(v)A_{k-1,l}(u). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Наконец, взяв (3.35) в обкладках векторов $Y_1^l(u)Y_2^{l+1}(v)$ справа и $\tilde{X}_1^k(u)\tilde{Y}_2^{k-1}(v)$ слева и используя (3.67), получим

$$\begin{aligned} &\theta_1(u-v+\eta|\tau)B_{k-1,l}(v)D_{k,l+1}(u) \\ &= \theta_1(u-v|\tau)D_{k+1,l}(u)B_{k,l+1}(v) + g_k(u-v)B_{k-1,l}(u)D_{k,l+1}(v). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Это основные операторные перестановочные соотношения, нужные для процедуры алгебраического анзаца Бете. Перепишем их в более удобной для дальнейшего форме:

$$A_{k,l}(u)B_{k-1,l+1}(v) = \alpha(u-v)B_{k,l+2}(v)A_{k-1,l+1}(u) + \beta_{l+1}(u-v)B_{k,l+2}(u)A_{k-1,l+1}(v), \tag{3.71}$$

$$D_{k,l}(u)B_{k-1,l+1}(v) = \alpha(v-u)B_{k-2,l}(v)D_{k-1,l+1}(u) - \beta_{k-1}(u-v)B_{k-2,l}(u)D_{k-1,l+1}(v), \tag{3.72}$$

где

$$\alpha(u) = \frac{\theta_1(u-\eta|\tau)}{\theta_1(u|\tau)}, \quad \beta_k(u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\,\theta_2(\tau_k+u|\tau)}{\theta_1(u|\tau)\,\theta_2(\tau_k|\tau)}. \tag{3.73}$$

Задача. Вывести все перестановочные соотношения для операторов $A_{k,l}(u)$, $B_{k,l}(u)$, $C_{k,l}(u)$, $D_{k,l}(u)$.

3.3.4 Обобщенный алгебраический анзац Бете

Рассмотрим вектор

$$\left|\Psi^l(u_1,\ldots,u_n)\right\rangle = B_{l-1,l+1}(u_1)B_{l-2,l+2}(u_2)\ldots B_{l-n,l+n}(u_n)\left|\Omega^{l-n}\right\rangle. \tag{3.74}$$

Напомним, что число n фиксировано и равно $N/2$. Из коммутационного соотношения (3.68) следует, что этот вектор является симметрической функцией от параметров $u_1,\ldots,u_n$. Действие операторов $A_{l,l}(u)$, $D_{l,l}(u)$ на этот вектор может быть найдено аналогично тому как это было сделано в случае 6-вершинной модели, с помощью перестановочных соотношений (3.71), (3.72) и свойства (3.62). Результат таков:

$$A_{l,l}(u)\left|\Psi^l(u_1,\ldots,u_n)\right\rangle = T_A(u)\left|\Psi^{l+1}(u_1,\ldots,u_n)\right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Lambda^{l}_{A,j}(u)\left|\Psi^{l+1}(u_1,\ldots,u_{j-1},u,u_{j+1},\ldots,u_n)\right\rangle,$$

$$D_{l,l}(u)\left|\Psi^{l}(u_1,\ldots,u_n)\right\rangle = T_D(u)\left|\Psi^{l-1}(u_1,\ldots,u_n)\right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Lambda^{l}_{D,j}(u)\left|\Psi^{l-1}(u_1,\ldots,u_{j-1},u,u_{j+1},\ldots,u_n)\right\rangle,$$

где

$$T_A(u)=\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\,\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)},$$

$$T_D(u)=\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i|\tau)\,\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)},$$

$$\Lambda^{l}_{A,j}(u)=\frac{\theta_1(\eta|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)}\,\Phi\Big(u-u_j,\tau_{l+1}+\frac{1}{2}\Big)\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u_j-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(u_j-u_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-u_k|\tau)},$$

$$\Lambda^{l}_{D,j}(u)=-\frac{\theta_1(\eta|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)}\,\Phi\Big(u-u_j,\tau_{l-1}+\frac{1}{2}\Big)\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u_j-\xi_i|\tau)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(u_j-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-u_k|\tau)}.$$

В последних двух формулах мы ввели функцию

$$\Phi(u,v)=\frac{\theta_1'(0|\tau)\,\theta_1(u+v|\tau)}{\theta_1(u|\tau)\,\theta_1(v|\tau)}. \tag{3.75}$$

Она имеет простой полюс в $u=0$ с вычетом 1.

Рассмотрим теперь преобразование Фурье от вектора $\left|\Psi^{l}\right\rangle$:

$$|\Psi(u_1,\ldots,u_n)\rangle=\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-il\nu}\left|\Psi^{l}(u_1,\ldots,u_n)\right\rangle. \tag{3.76}$$

Действие трансфер-матрицы $\mathsf{T}(u)=A_{l,l}(u)+D_{l,l}(u)$ на этот вектор дается выражением

$$\begin{gathered}\mathsf{T}(u)\,|\Psi(u_1,\ldots,u_n)\rangle = T(u)\,|\Psi(u_1,\ldots,u_n)\rangle\\ +\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{n}e^{-il\nu}\left(e^{i\nu}\Lambda^{l-1}_{A,j}(u)+e^{-i\nu}\Lambda^{l+1}_{D,j}(u)\right)\left|\Psi^{l}(u_1,\ldots,u_{j-1},u,u_{j+1},\ldots,u_n)\right\rangle,\end{gathered} \tag{3.77}$$

где

$$T(u)=e^{i\nu}\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)}+e^{-i\nu}\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)}.$$

Отметим, что (3.77) может быть переписано в виде

$$\begin{gathered}\mathsf{T}(u)\,|\Psi(u_1,\ldots,u_n)\rangle = T(u)\,|\Psi(u_1,\ldots,u_n)\rangle\\ -\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{n}e^{-il\nu}\Phi\Big(u-u_j,\tau_l+\frac{1}{2}\Big)\Big(\operatorname*{res}_{u=u_j}T(u)\Big)\left|\Psi^{l}(u_1,\ldots,u_{j-1},u,u_{j+1},\ldots,u_n)\right\rangle.\end{gathered} \tag{3.78}$$

Из этой формулы ясно, что правая часть регулярна в точках $u = u_j$, как и должно быть.

Собственное значение трансфер-матрицы должно быть регулярной функцией от u. Условия $\operatorname*{res}_{u=u_j} T(u) = 0$ – это одновременно условия того, что "нежелательные члены" в (3.78) обращаются в ноль. Эти условия имеют вид уравнений Бете (2.36). Если эти уравнения удовлетворяются, вектор $|\Psi(u_1, \ldots, u_n)\rangle$ является собственным для трансфер-матрицы при условии, что ν таково, что ряд (3.76) сходится и не обращается в ноль тождественно. По-видимому, это имеет место для некоторых выделенных значений ν, и значение $\nu = 0$ находится среди них.

3.4 Эллиптическая R-матрица и алгебра Склянина

Как мы видели, общее решение уравнения Янга-Бакстера выражается в эллиптических функциях от спектрального параметра (или тэта-функциях Якоби). Соответствующие R-матрицы параметризуют больцмановские веса 8-вершинной модели, а построенная из них трансфер-матрица содержит гамильтониан XYZ-цепочки. Напомним, что эллиптическая R-матрица имеет вид

$$\mathsf{R}(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u+\eta)\sigma_a \otimes \sigma_a\,, \qquad W_a(u) = \frac{\theta_{a+1}(u|\tau)}{\theta_{a+1}(\eta|\tau)}\,, \tag{3.79}$$

где $\theta_a(u|\tau)$ – тэта-функции Якоби (индекс a понимается по модулю 4). Эллиптический L-оператор общего вида, сплетаемый этой R-матрицей, будем искать в виде

$$\mathsf{L}(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u)\,\sigma_a \otimes \mathsf{S}_a = \begin{pmatrix} W_0(u)\mathsf{S}_0 + W_3(u)\mathsf{S}_3 & W_1(u)\mathsf{S}_1 - iW_2(u)\mathsf{S}_2 \\ W_1(u)\mathsf{S}_1 + iW_2(u)\mathsf{S}_2 & W_0(u)\mathsf{S}_0 - W_3(u)\mathsf{S}_3 \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

где $\mathsf{S}_0, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3$ – неизвестные пока операторы. Подстановка в $RLL = LLR$ приводит к следующим шести квадратичным соотношениям для них:

$$[\mathsf{S}_0,\, \mathsf{S}_\alpha]_- = iJ_{\beta\gamma}[\mathsf{S}_\beta,\, \mathsf{S}_\gamma]_+, \qquad [\mathsf{S}_\alpha,\, \mathsf{S}_\beta]_- = i[\mathsf{S}_0,\, \mathsf{S}_\gamma]_+. \tag{3.81}$$

Здесь и далее $[\ ,\ ]_\mp$ – соответственно коммутатор и антикоммутатор, а $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ означает любую циклическую перестановку индексов $\{1, 2, 3\}$. Алгебра, порождаемая образующими и соотношениями (3.81) называется алгеброй Склянина (введена Скляниным в 1982 году). Структурные константы имеют вид

$$J_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha-\beta-1}\left(\frac{\theta_1(\eta|\tau)\,\theta_{\gamma+1}(\eta|\tau)}{\theta_{\alpha+1}(\eta|\tau)\theta_{\beta+1}(\eta|\tau)}\right)^2$$

или

$$J_{\alpha\beta} = \frac{J_\beta - J_\alpha}{J_\gamma}, \qquad J_\alpha = \frac{\theta_{\alpha+1}(0)\theta_{\alpha+1}(2\eta)}{\theta^2_{\alpha+1}(\eta)}.$$

В алгебре Склянина есть два независимых центральных элемента (элементы Казимира):

$$\Omega_1 = \mathsf{S}_0^2 + \mathsf{S}_1^2 + \mathsf{S}_2^2 + \mathsf{S}_3^2, \qquad \Omega_2 = J_1\mathsf{S}_1^2 + J_2\mathsf{S}_2^2 + J_3\mathsf{S}_3^2.$$

Переопределим генераторы с помощью соотношений

$$\mathsf{S}_a = i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta|\tau)\mathcal{S}_a,$$

тогда можно записать соотношения алгебры Склянина в виде

$$(-1)^{\alpha+1} I_{\alpha 0} \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_0 = I_{\beta\gamma} \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\gamma - I_{\gamma\beta} \mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta$$

$$(-1)^{\alpha+1} I_{\alpha 0} \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_\alpha = I_{\gamma\beta} \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\gamma - I_{\beta\gamma} \mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta,$$

где $I_{ab} = \theta_{a+1}(0|\tau)\theta_{b+1}(2\eta|\tau)$.

Если $\eta \neq r_1 + r_2\tau$ с рациональными r_1, r_2, представления алгебры Склянина являются гладкими деформациями представлений алгебры $U(gl_2)$. Их можно реализовать разностными операторами в пространстве функций от переменной z:

$$\mathcal{S}_a = \frac{\theta_{a+1}(2z - 2\ell\eta|\tau)}{\theta_1(2z|\tau)}\, e^{\eta\partial_z} - \frac{\theta_{a+1}(-2z - 2\ell\eta|\tau)}{\theta_1(2z|\tau)}\, e^{-\eta\partial_z}. \tag{3.82}$$

Параметр ℓ является аналогом спина представления. Если $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$, эти операторы имеют конечномерное инвариантное подпространство $\Theta^+_{4\ell}$ четных тэта-функций порядка 4ℓ, т.е. пространство целых функций $F(z)$ таких, что $F(-z) = F(z)$ и

$$F(z+1) = F(z), \qquad F(z+\tau) = e^{-4\ell\pi i\tau - 8\ell\pi i z} F(z).$$

Это подпространство имеет размерность $2\ell + 1$. В нем реализуется неприводимое представление алгебры Склянина. Центральные элементы имеют на нем следующие значения:

$$\Omega_1 = 4\theta_1^2((2\ell+1)\eta|\tau), \qquad \Omega_2 = 4\theta_1(2\ell\eta|\tau)\,\theta_1(2(\ell+1)\eta|\tau).$$

3.5 $GL(n)$-инвариантные R-матрицы

До сих пор мы рассматривали R-матрицы размера 4×4. Оказывается, существуют решения уравнения Янга-Бакстера размера $n^2 \times n^2$ с $n \geq 2$. Они являются линейными операторами в пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Мы для простоты ограничимся рассмотрением R-матриц с рациональной зависимостью от спектрального параметра (но существуют также их тригонометрические и эллиптические обобщения). Эти R-матрицы имеют вид

$$\mathsf{R}(u) = u\mathsf{I} + \eta\mathsf{P}, \tag{3.83}$$

где P – оператор перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, а η – параметр (в R-матрице (3.18) $\eta = 1$). Можно проверить, что такая R-матрица $GL(n)$-инвариантна:

$$\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}\, \mathsf{R}(u) = \mathsf{R}(u)\, \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 \mathsf{R}_{12}(u) = \mathsf{R}_{12}(u)\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 \tag{3.84}$$

для любой матрицы $\mathbf{g} \in GL(n)$. Оператор перестановки P выражается через элементарные $n \times n$ матрицы e_{ab} (с 1 в месте ab и 0 в остальных местах) следующим образом:

$$\mathsf{P} = \sum_{a,b} e_{ab} \otimes e_{ba}.$$

Скажем несколько слов о представлениях группы $GL(n)$ и универсальной обертывающей алгебры $U(gl_n)$. Алгебра $U(gl_n)$ порождена генераторами $\mathbf{e}_{ab}$ с соотношениями

$$\mathbf{e}_{ab}\mathbf{e}_{a'b'} - \mathbf{e}_{a'b'}\mathbf{e}_{ab} = \delta_{a'b}\mathbf{e}_{ab'} - \delta_{ab'}\mathbf{e}_{a'b}. \tag{3.85}$$

Конечномерные неприводимые представления π_λ алгебры $U(gl_n)$ характеризуются старшим весом $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, где $\lambda_{i+1} \le \lambda_i$ – целые неотрицательные числа. Набор чисел λ_i можно отождествить с диаграммой Юнга λ или разбиением числа $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. Обозначим V_λ пространство предствления π_λ. Очевидно, $\pi_{(1)}(\mathbf{e}_{ab}) = e_{ab}$ и $V_{(1)} = \mathbb{C}^n$ (здесь (1) – диаграмма Юнга, состоящая из одной клеточки, она соответствует векторному представлению).

Более общие $GL(n)$-инвариантные R-матрицы действуют в тензорном произведении $V_\lambda \otimes \mathbb{C}^n$ и имеют вид

$$\mathsf{R}^\lambda(u) = u\mathsf{I} + \eta \sum_{a,b} \pi_\lambda(\mathbf{e}_{ab}) \otimes e_{ba}. \tag{3.86}$$

Их $GL(n)$-инвариантность выражается равенством

$$\pi_\lambda(\mathbf{g}) \otimes \mathbf{g}\, \mathsf{R}^\lambda(u) = \mathsf{R}^\lambda(u)\, \pi_\lambda(\mathbf{g}) \otimes \mathbf{g}.$$

R-матрицы $\mathsf{R}^\lambda(u)$ удовлетворяют уравнению Янга-Бакстера

$$\mathsf{R}^{\lambda\mu}_{12}(u-v)\mathsf{R}^\lambda_{13}(u)\mathsf{R}^\mu_{23}(v) = \mathsf{R}^\mu_{23}(v)\mathsf{R}^\lambda_{13}(u)\mathsf{R}^{\lambda\mu}_{12}(u-v), \tag{3.87}$$

где $\mathsf{R}^{\lambda\mu}(u-v)$ – некоторая R-матрица, действующая в тензорном произведении $V_\lambda \otimes V_\mu$. При произвольных λ, μ ее явный вид сложен.

4 Скалярные произведения векторов Бете

Хотя многое из того, что обсуждается в этом разделе остается с необходимыми модификациями верным и в более общем случае, мы для простоты ограничимся здесь рассмотрением моделей, построенных по стандартной рациональной $GL(2)$-инвариантной R-матрице

$$\mathsf{R}(u) = \begin{pmatrix} u+\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \eta & 0 \\ 0 & \eta & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+\eta \end{pmatrix} = u\mathsf{I} + \eta\mathsf{P}.$$

Квантовая матрица монодромии неоднородной модели имеет вид

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{R}_{01}(u-\xi_1)\mathsf{R}_{02}(u-\xi_2)\ldots\mathsf{R}_{0N}(u-\xi_N) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix},$$

где мы обозначили параметры неоднородности буквами ξ_i, а трансфер-матрица дается выражением $\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}_0\, \mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$. Операторы $A(u)$ и $D(u)$ действуют на вакуумный вектор $|\Omega\rangle = (|+\rangle)^{\otimes N}$ следующим образом:

$$A(u)\,|\Omega\rangle = \phi(u+\eta)\,|\Omega\rangle\,, \quad D(u)\,|\Omega\rangle = \phi(u)\,|\Omega\rangle\,.$$

Здесь через $\phi(u)$ мы обозначили полином

$$\phi(u) = \prod_{j=1}^{N} (u - \xi_j). \tag{4.1}$$

4.1 Скалярные произведения: история вопроса

Следуя алгебраическому подходу, введем в рассмотрение вектора Бете

$$|u_1, u_2, \dots, u_m\rangle = B(u_1)B(u_2)\dots B(u_m)\,|\Omega\rangle \;\in\; \mathcal{H} \cong (\mathbb{C}^2)^N, \tag{4.2}$$

где u_j – произвольные параметры. В дальнейшем мы для краткости будем иногда писать $|u_1, \dots, u_m\rangle = |\{u_i\}_m\rangle$. Согласно терминологии, принятой в литературе, такой вектор $|u_1, u_2, \dots, u_m\rangle$ называется вектором Бете вне массовой поверхности ("off-shell"). Если же параметры u_j не произвольны, а связаны уравнениями Бете (и тем самым вектор $|u_1, u_2, \dots, u_m\rangle$ – собственный для трансфер-матрицы), такой вектор называется вектором Бете, лежащим на массовой поверхности ("on-shell").

Нетрудно видеть, что $(B(u))^\dagger = C(u)$. Поэтому, вспоминая определение скалярного произведения векторов из пространства $\mathcal{H}$, данное в разделе 1.1.1, мы можем представить скалярное произведение векторов типа (4.2) в виде

$$\langle v_m, \dots, v_1 | u_1, \dots, u_m\rangle = \langle\Omega|\, C(v_m)\dots C(v_1)B(u_1)\dots B(u_m)\,|\Omega\rangle\,. \tag{4.3}$$

Очевидно, число операторов B в скалярном произведении (4.3) должно совпадать с числом операторов C, иначе скалярное произведение равно нулю.

Задача. Найти скалярные произведения (4.3) при $m = 1$ и $m = 2$.

Важным вопросом теории является вопрос о вычислении скалярных произведений векторов Бете. Умение вычислять такие скалярные произведения необходимо для нахождения форм-факторов и корреляционных функций. Попытки найти скалярные произведения "в лоб" с помощью алгебры $RTT = TTR$-соотношений показывают, что это сложная комбинаторная задача.

История вопроса такова. Первое достижение на пути вычисления скалярных произведений – гипотеза Годена 1972 года о том, как выглядит выражение для нормы собственного состояния гамильтониана модели бозе-газа с точечным взаимодействием (формула (1.77)). Основное утверждение, доказанное в 1982 году Корепиным с помощью квантового метода обратной задачи для достаточно широкого класса моделей, заключается в том, что квадрат нормы собственных состояний трансфер-матрицы (векторов Бете на массовой поверхности) дается детерминантом некоторой матрицы размера m на m, явный вид которой восстанавливается из формы уравнений Бете. Далее, в 1989 году Славновым была получена детерминантная формула для скалярного произведения двух векторов Бете, один из которых лежит на массовой поверхности, а второй – произвольный вектор вида (4.2). Метод получения этого результата в оригинальной работе заключался в сложном комбинаторном анализе структуры выражений для скалярных произведенй и применении рекуррентных соотношений для них. В 1998 году в работе Китанина, Майе и Террас этот результат был получен другим методом (но тоже достаточно сложным) и было показано, что матричные элементы матрицы, участвовавшей в детерминантном представлении скалярных произведений, выражаются через производные от собственных значений трансфер-матрицы. Наконец, совсем недавно, в 2019 году Беллиардом и Славновым был предложен чрезвычайно простой метод нахождения скалярных произведений, избегающий всяческих комбинаторных сложностей, и была выяснена причина, по которой скалярные произведения on-shell и off-shell векторов Бете имеют детерминантные представления. Этот метод настолько прост, что после того как он был предложен, кажется, что он лежит на поверхности, и становится удивительным тот факт, что никто не догадался до него в течение более чем 35 лет. В нашем изложении мы близко следуем работе Беллиарда и Славнова [12].

4.2 Действие трансфер-матрицы на векторы Бете

Начиная с этого места мы будем предполагать, что вектор $|v_1,\dots,v_m\rangle$ в скалярном произведении (4.3) лежит на массовой поверхности, т.е. набор чисел $\{v_j\}$ удовлетворяет уравнениям Бете

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{v_j-\xi_k+\eta}{v_j-\xi_k}=\prod_{l=1,\neq j}^{m}\frac{v_j-v_l+\eta}{v_j-v_l-\eta}, \tag{4.4}$$

а набор $\{u_i\}$ произвольный с единственным ограничением, что среди чисел u_i нет совпадающих. Собственное значение $T(u)$ трансфер-матрицы на векторе $|v_1,\dots,v_m\rangle$,

$$\mathsf{T}(u)\,|v_1,\dots,v_m\rangle=T(u;v_1,\dots,v_m)\,|v_1,\dots,v_m\rangle\,,$$

дается формулой

$$T(u)=T(u;v_1,\dots,v_m)=\prod_{k=1}^{N}(u-\xi_k+\eta)\prod_{l=1}^{m}\frac{u-v_l-\eta}{u-v_l}+\prod_{k=1}^{N}(u-\xi_k)\prod_{l=1}^{m}\frac{u-v_l+\eta}{u-v_l}. \tag{4.5}$$

Как мы знаем, вычеты этого выражения как функции от u в точках v_j равны 0 (эти условия эквивалентны уравнениям Бете). Мы можем распространить определение функции $T(u)=T(u;u_1,\dots,u_m)$ с помощью этой формулы на произвольный набор чисел $\{u_j\}$; тогда $T(u;u_1,\dots,u_m)$, вообще говоря, не будет собственным значением трансфер-матрицы, и вычеты в точках u_j не будут равны нулю. Очевидно, можно представить формулу для функции $T(u;u_1,\dots,u_m)$ в виде

$$T(u;u_1,\dots,u_m)==T(u;\{u_i\}_m)=\frac{P(u;u_1,\dots,u_m)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(u-u_j)}, \tag{4.6}$$

где $P(u;u_1,\dots,u_m)$ – полином от переменной u и симметрический полином от переменных u_j вида

$$P(u;u_1,\dots,u_m)=\phi(u+\eta)\prod_{l=1}^{m}(u-u_l-\eta)+\phi(u)\prod_{l=1}^{m}(u-u_l+\eta) \tag{4.7}$$

(полином $\phi(u)$ определен в (4.1)). Заметим, что полином P можно разложить по базису элементарных симметрических полиномов $e_k^{(m)}(u_1,\dots,u_m)$:

$$P(u;u_1,\dots,u_m)=\sum_{k=0}^{m}A_k(u)e_k^{(m)}(u_1,\dots,u_m). \tag{4.8}$$

Элементарные симметрические полиномы даются формулами $e_0^{(m)} = 1$, $e_1^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} u_j$, $e_2^{(m)} = \sum_{i<j}^{m} u_i u_j$, …, $e_m^{(m)} = \prod_{j=1}^{m} u_j$, $e_k^{(m)} = 0$ при $k > m$. Общая формула такова:

$$e_k^{(m)}(u_1, \ldots, u_m) = \frac{1}{(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \prod_{i=1}^{m} (t + u_i) \Big|_{t=0}. \tag{4.9}$$

Функции $A_k(u)$ в (4.8) можно рассматривать как функциональные параметры, задающие конкретную модель (они заменяют числовые параметры ξ_j).

Вспоминая рассуждения из раздела 3.1, составляющие суть метода алгебраического анзаца Бете, мы можем написать:

$$\mathsf{T}(u) \Big| \{u_i\}_m \Big\rangle = T(u; \{u_i\}_m) \Big| \{u_i\}_m \Big\rangle + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j(u, \{u_i\}_m) \Big| \{u_i\}_m \setminus u_j, u \Big\rangle, \tag{4.10}$$

где $\Big| \{u_i\}_m \setminus u_j, u \Big\rangle$ означает, что в этом векторе переменная u_j заменена на u. Как следует из формул раздела 3.1, коэффициент Λ_j имеет вид

$$\begin{gathered} \Lambda_j(u, \{u_i\}_m) = -\frac{1}{u - u_j} \operatorname*{res}_{u=u_j} T(u; u_1, \ldots, u_m) \\ = \frac{\eta}{u - u_j} \left(\phi(u_j + \eta) \prod_{k=1, \neq j} \frac{u_j - u_k - \eta}{u_j - u_k} - \phi(u_j) \prod_{k=1, \neq j} \frac{u_j - u_k + \eta}{u_j - u_k} \right). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Отметим, что формула (4.10) вместе с первым равенством в (4.11) означает, что вектор-функция $\mathsf{T}(u)|u_1, \ldots, u_m\rangle$ не имеет полюсов при $u = u_i$, как и должно быть, поскольку трансфер-матрица – полином по u.

4.3 Вывод системы линейных уравнений для скалярных произведений

Основная идея метода Беллиарда-Славнова – показать, что скалярные произведения векторов Бете удовлетворяют системе линейных уравнений. После проведенной подготовки мы можем приступить к выводу этой системы. Зададим набор из $m+1$ произвольных параметров $u_1, u_2, \ldots, u_{m+1} = \{u_i\}_{m+1}$ и рассмотрим матричный элемент трансфер-матрицы

$$S_j = \Big\langle \{v_i\}_m \Big| \mathsf{T}(u_j) \Big| \{u_i\}_{m+1} \setminus u_j \Big\rangle, \quad j = 1, \ldots, m+1 \tag{4.12}$$

между собственным состоянием трансфер-матрицы $\Big\langle \{v_i\}_m \Big|$ (on-shell бетевским вектором) и произвольным off-shell вектором Бете $\Big| \{u_i\}_{m+1} \setminus u_j \Big\rangle$, лежащим, как и $\Big| \{v_i\}_m \Big\rangle$, в секторе с m перевернутыми спинами, в котором из набора параметров исключен u_j. Мы можем вычислить S_j двумя способами – либо подействовав трансфер-матрицей налево $\left(\Big\langle\{v_i\}_m\Big|\mathsf{T}(u_j)=T(u_j;\{v_i\}_m)\Big\langle\{v_i\}_m\Big|\right)$, либо подействовав ею направо с помощью формулы (4.10), которую мы здесь применительно к данной ситуации кратко запишем в виде

$$\mathsf{T}(u_j)\Big|\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j\Big\rangle=\sum_{k=1}^{m+1}L_{jk}\Big|\{u_i\}_{m+1}\setminus u_k\Big\rangle.$$

Здесь, очевидно, $L_{jj}=T(u_j;\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j)$ и $L_{jk}=\Lambda_k(u_j;\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j)$ при $j\neq k$. Сравнивая формулы (4.6) и (4.11), найдем:

$$L_{jk}=\frac{P(u_k;\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j)}{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k-u_l)}=\operatorname*{res}_{u=u_k}\frac{T(u;\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j)}{u-u_j}\quad\text{при всех } j,k. \tag{4.13}$$

Рассмотрим скалярные произведения

$$X_j=\Big\langle\{v_i\}_m\Big|\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j\Big\rangle,\quad j=1,\ldots,m+1. \tag{4.14}$$

Вычисляя двумя способами матричные элементы (4.12), как указано выше, получим равенства

$$\sum_{k=1}^{n+1}L_{jk}X_k=T(u_j;\{v_i\}_m)X_j,$$

которые представляют собой однородную систему линейных уравнений на $m+1$ переменную X_j:

$$\sum_{k=1}^{m+1}M_{jk}X_k=0,\quad j=1,\ldots m+1, \tag{4.15}$$

где матрица M размера $(m+1)\times(m+1)$ имеет вид

$$\begin{aligned}M_{jk}&=L_{jk}-T(u_j;\{v_i\}_m)\delta_{jk}\\&=\frac{P(u_k;\{u_i\}_{m+1}\setminus u_j)}{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k-u_l)}-\delta_{jk}\frac{P(u_k;\{v_i\}_m)}{\prod\limits_{l=1}^{m}(u_k-v_l)}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Это и есть искомая система линейных уравнений на скалярные произведения.

4.4 Разрешимость системы уравнений для скалярных произведений

Система (4.15) имеет нетривиальные решения, если ранг матрицы M строго меньше $m+1$, т.е. $\det M=0$. В этом случае решения даются минорами матрицы M, откуда уже ясно, что рассматриваемые скалярные произведения должны иметь детерминантное представление.

Для того чтобы показать, что $\det M=0$, мы воспользуемся тем очевидным обстоятельством, что матрицу M можно умножить слева на любую невырожденную матрицу V: $M\to\tilde{M}=VM$; при этом решение системы не поменяется. Расширим набор $\{v_i\}_m = \{v_1, \ldots, v_m\}$ до набора из $m+1$ элемента $\{v_i\}_{m+1} = \{v_1, \ldots, v_m, v\}$, где $v_{m+1} = v$ – свободный параметр, и выберем матрицу V в виде

$$V_{ij} = \frac{u_j - v_j}{u_j - v_i} \prod_{l=1,\neq j}^{m+1} \frac{u_j - v_l}{u_j - u_l}, \quad i, j = 1, \ldots, m+1. \tag{4.17}$$

Это матрица Коши $C_{ij} = 1/(v_i - u_j)$, умноженная справа на диагональную матрицу. Пользуясь известным выражением для детерминанта матрицы Коши, найдем:

$$\det V = \prod_{i<j} \frac{v_i - v_j}{u_i - u_j} = \frac{\Delta(\{v\})}{\Delta(\{u\})},$$

где Δ – детерминант Вандермонда, так что матрица V невырождена.

Для матрицы $\tilde{M} = VM$ мы получаем, пользуясь (4.16):

$$\tilde{M}_{ik} = \Big(\prod_{l=1,\neq k}^{m+1} (u_k - u_l)\Big)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{u_j - v_j}{u_j - v_i} \prod_{s=1,\neq j}^{m+1} \frac{u_j - v_s}{u_j - u_s} P(u_k; \{u_n\}_{m+1} \setminus u_j) \right.$$
$$\left. - \frac{u_k - v}{u_k - v_i} P(u_k; \{v_n\}_m) \right).$$

Воспользуемся разложением полинома P по базису элементарных симметрических функций (4.8) и представлением (4.9) для последних, чтобы показать, что

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1} (u_j - v_s)}{\prod\limits_{r=1,\neq j}^{m+1} (u_j - u_r)} P(u_k; \{u_n\}_{m+1} \setminus u_j) = P(u_k; \{v_n\}_{m+1} \setminus v_i).$$

В самом деле, поскольку

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=R\to\infty} \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1} (u - v_s)}{\prod\limits_{r=1}^{m+1} (u - u_r)} \frac{du}{t+u} = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1} (u_j - v_s)}{\prod\limits_{r=1,\neq j}^{m+1} (u_j - u_r)} \frac{1}{t + u_j} - \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1} (t + v_s)}{\prod\limits_{r=1}^{m+1} (t + u_r)}$$

(равный нулю интеграл в левой части представлен как сумма вычетов), мы имеем

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1} (u_j - v_s)}{\prod\limits_{r=1,\neq j}^{m+1} (u_j - u_r)} \prod_{l=1,\neq j}^{m+1} (t + u_l) = \prod_{s=1,\neq i}^{m+1} (t + v_s),$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1} (u_j - v_s)}{\prod\limits_{r=1,\neq j}^{m+1} (u_j - u_r)} e_k^{(m)}(\{u_n\}_{m+1} \setminus u_j) = e_k^{(m)}(\{v_n\}_{m+1} \setminus v_i), \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Для матрицы $\tilde{M}$ имеем тем самым выражение

$$\tilde{M}_{ik} = \Big(\prod_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k - u_l)\Big)^{-1}\left(P(u_k;\{v_n\}_{m+1}\setminus v_i) - \frac{u_k - v}{u_k - v_i}\,P(u_k;\{v_n\}_m)\right)$$

$$= \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1}(u_k - v_s)}{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k - u_l)}\Big(T(u_k;\{v_n\}_{m+1}\setminus v_i) - T(u_k;\{v_n\}_m)\Big). \tag{4.18}$$

Отсюда видно, что последняя ($(m+1)$-я) строка матрицы $\tilde{M}$ состоит из нулей, т.е. действительно $\det M = \det\tilde{M} = 0$, и система (4.15) имеет нетривиальные решения.

Для полноты укажем, что в [12] рассматривалось также более общее преобразование матрицы M вида $M \to \tilde{M} = WM$, где

$$W_{ij} = \frac{u_j - w_j}{u_j - w_i}\prod_{l=1,\neq j}^{m+1}\frac{u_j - w_l}{u_j - u_l}, \quad i,j = 1,\ldots,m+1. \tag{4.19}$$

Здесь $\{w_i\}_{m+1}$ – произвольный набор параметров; матрица V получается из W при $w_i = v_i$, $i = 1\ldots,m$, $w_{m+1} = v$. Проделав те же вычисления, что и выше, получим:

$$\tilde{M}_{ik} = \frac{\prod\limits_{s=1,\neq i}^{m+1}(u_k - w_s)}{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k - u_l)}\Big(T(u_k;\{w_n\}_{m+1}\setminus w_i) - T(u_k;\{v_n\}_m)\Big). \tag{4.20}$$

Выражение (4.18) можно преобразовать дальше. Для этого заметим, произведя несложное прямое вычисление с использованием (4.5), что

$$T(u;\{v_n\}_{m+1}\setminus v_i) - T(u;\{v_n\}_m)$$
$$= \frac{\eta(v - v_i)}{(v-u)(v_i - u)}\left(-\phi(u+\eta)\prod_{l=1,\neq i}^{m}\frac{u - v_l - \eta}{u - v_l} + \phi(u)\prod_{l=1,\neq i}^{m}\frac{u - v_l + \eta}{u - v_l}\right)$$
$$= (v - v_i)\,\frac{u - v_i}{u - v}\,\frac{\partial T(u;\{v_n\}_m)}{\partial v_i}.$$

Поэтому

$$\tilde{M}_{ik} = (v - v_i)\,\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}(u_k - v_s)}{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k - u_l)}\,T_{ik}, \tag{4.21}$$

где матрица $T_{ik} = \partial T(u_k)/\partial v_i$ имеет вид

$$T_{ik} = \frac{\eta}{u_k - v_i}\left(-\frac{\phi(u_k+\eta)}{u_k - v_i - \eta}\prod_{l=1}^{m}\frac{u_k - v_l - \eta}{u_k - v_l} + \frac{\phi(u_k)}{u_k - v_i + \eta}\prod_{l=1}^{m}\frac{u_k - v_l + \eta}{u_k - v_l}\right). \tag{4.22}$$

Предположим, что ранг матрицы $\tilde{M}$ равен m (это случай общего положения) и рассмотрим эквивалентную (4.15) систему m уравнений

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{\partial T(u_k)}{\partial v_i}\,\tilde{X}_k = 0, \quad i = 1,\ldots,m,$$

где

$$\tilde{X}_k = X_k \frac{\prod\limits_{s=1}^{m}(u_k - v_s)}{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k - u_l)}.$$

Ее решение строится из миноров матрицы T_{ik} и имеет вид

$$X_k = (-1)^k c \, \frac{\prod\limits_{l=1,\neq k}^{m+1}(u_k - u_l)}{\prod\limits_{s=1}^{m}(u_k - v_s)} \, \det_{j\neq k}\left(\frac{\partial T(u_j)}{\partial v_i}\right)_{m\times m},$$

где c – произвольный не зависящий от k множитель. Нетрудно проверить, что при этом мы имеем

$$X_k \frac{\det\limits_{j\neq k}\left(\frac{1}{u_j - v_i}\right)_{m\times m}}{\det\limits_{j\neq k}\left(\frac{\partial T(u_j)}{\partial v_i}\right)_{m\times m}} = X_n \frac{\det\limits_{j\neq n}\left(\frac{1}{u_j - v_i}\right)_{m\times m}}{\det\limits_{j\neq n}\left(\frac{\partial T(u_j)}{\partial v_i}\right)_{m\times m}}$$

для всех $k, n = 1, \dots, m+1$. Левая часть не зависит от u_k (но, возможно, зависит от всех остальных переменных u_j), а правая не зависит от u_n. Отсюда следует, что левая часть на самом деле вообще не зависит от переменных u_j, и мы можем написать

$$X_k = \Phi(\{v_i\}_m) \, \frac{\det\limits_{j\neq k}(\partial T(u_j)/\partial v_i)}{\det\limits_{j\neq k}\left(\frac{1}{u_j - v_i}\right)}, \tag{4.23}$$

где Φ – некоторая симметрическая функция от $\{v_i\}$, остающаяся пока неопределенной. Ее можно найти, вычислив скалярное произведение при некоторых специальных значениях u_j и сравнив с формулой (4.23) (см. ниже в следующем разделе). Это вычисление дает $\Phi = \prod\limits_{l=1}^{m} \phi(v_l)$. Для скалярных произведений, следовательно, получаем:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\, C(v_m) \dots C(v_1) B(u_1) \dots B(u_m) \,|\Omega\rangle &= \frac{\det\limits_{1\leq i,j\leq m} T_{ij}}{\det\limits_{1\leq i,j\leq m}\left(\frac{1}{u_i - v_j}\right)} \prod_{l=1}^{m} \phi(v_l) \\ &= \frac{\prod\limits_{r,s=1}^{m}(u_r - v_s)}{\prod\limits_{k<k'}(u_k - u_{k'})(v_{k'} - v_k)} \prod_{l=1}^{m}\prod_{a=1}^{N}(v_l - \xi_a) \det_{1\leq i,j\leq m}\left(\frac{\partial T(u_j)}{\partial v_i}\right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Напомним, что это представление справедливо при условии, что параметры v_i удовлетворяют уравнениям Бете (4.4).

4.5 Скалярные произведения и статсумма 6-вершинной модели с граничным условием типа доменной стенки

В этом разделе мы приведем без вывода некоторые важные результаты, относящиеся к теории скалярных произведений.

Комбинаторный анализ с использованием коммутационных соотношений операторов A, B, C, D позволяет получить следующую формулу для скалярного произведения бетевских векторов общего вида:

$$\langle\Omega| \prod_{\alpha=1}^{m} C(v_\alpha) \prod_{\beta=1}^{m} B(u_\beta) |\Omega\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{\{v\}_m = \{v_{\mathrm{I}}\}_{m-k} \cup \{v_{\mathrm{II}}\}_k \\ \{u\}_m = \{u_{\mathrm{I}}\}_{m-k} \cup \{u_{\mathrm{II}}\}_k}} \prod_{i\in\{v_{\mathrm{II}}\}} \phi(v_i) \prod_{i\in\{u_{\mathrm{I}}\}} \phi(u_i) \prod_{i\in\{u_{\mathrm{II}}\}} \phi(u_i+\eta) \prod_{i\in\{v_{\mathrm{I}}\}} \phi(u_i+\eta) \tag{4.25}$$

$$\times K_k\Big(\{v_{\mathrm{II}}\}_k \Big| \{u_{\mathrm{II}}\}_k\Big) K_{m-k}\Big(\{u_{\mathrm{I}}\}_{m-k} \Big| \{v_{\mathrm{I}}\}_{m-k}\Big) \prod_{\substack{i\in\{v_{\mathrm{II}}\}_k \\ j\in\{v_{\mathrm{I}}\}_{m-k}}} f(v_i, v_j) \prod_{\substack{a\in\{u_{\mathrm{I}}\}_{m-k} \\ b\in\{u_{\mathrm{II}}\}_k}} f(u_a, u_b)$$

(мы опять предполагаем, что среди чисел v_α, u_β нет совпадающих). Здесь сумма идет по всем разбиениям множеств $\{v\}_m$ и $\{u\}_m$ на непересекающиеся подмножества $\{v\}_m = \{v_{\mathrm{I}}\}_{m-k} \cup \{v_{\mathrm{II}}\}_k$ и $\{u\}_m = \{u_{\mathrm{I}}\}_{m-k} \cup \{u_{\mathrm{II}}\}_k$ с числом элементов k и $m-k$, где k бежит от 0 до m,

$$f(u,v) = \frac{u-v+\eta}{u-v},$$

а $K_m\Big(\{v\}_m \Big| \{u\}_m\Big)$ – статсумма рациональной 6-вершинной модели на квадратной неоднородной решетке размера $m \times m$ с с граничными условиями типа доменной стенки. Более точно: в этой модели статвес в вершине (i,j) (пересечение i-й вертикальной линии и j-й горизонтальной считая от левого нижнего угла) дается R-матрицей

$$\tilde{\mathsf{R}}(v_j - u_i) = \frac{\mathsf{R}(v_j - u_i)}{v_j - u_i},$$

а граничные условия таковы, что все стрелки на ребрах в нижнем крайнем ряду направлены вверх, в верхнем крайнем ряду – вниз, в крайнем левом столбце – влево, а в крайнем правом столбце – вправо. Для такой статсуммы известно детерминантное представление, найденное Изергиным в 1987 году:

$$K_m\Big(\{v\}_m \Big| \{u\}_m\Big) = \frac{\prod\limits_{k,l=1}^{m} (v_k - u_l + \eta)}{\prod\limits_{k<l} (v_l - v_k)(u_k - u_l)} \det_{m\times m}\left(\frac{\eta}{(v_i - u_j)(v_i - u_j + \eta)}\right). \tag{4.26}$$

На сегодняшний день формула (4.25) вместе с (4.26) – это наиболее полное описание скалярных произведений бетевских векторов общего вида.

Теперь положим $u_i = \xi_i$ для $i = 1, \ldots, m$, тогда $\phi(u_i) = \phi(\xi_i) = 0$. В сумме (4.25) при этом остается только один ненулевой член, отвечающий пустым множествам $\{u_{\mathrm{I}}\}$ и $\{v_{\mathrm{I}}\}$ $(k = m)$, и формула превращается в

$$\langle\Omega| \prod_{\alpha=1}^{m} C(v_\alpha) \prod_{\beta=1}^{m} B(\xi_\beta) |\Omega\rangle = \prod_{i=1}^{m} \phi(v_i) \prod_{j=1}^{m} \phi(\xi_j + \eta) \, K_m\Big(\{v\}_m \Big| \{\xi\}_m\Big). \tag{4.27}$$

Сравнение с формулой (4.23) в случае $\phi(u_i) = \phi(\xi_i) = 0$ дает $\Phi = \prod\limits_{l=1}^{m} \phi(v_l)$, так что (4.24) в этом случае совпадает с (4.27).

4.6 Ортогональность векторов Бете на массовой поверхности и их норма

Наконец, обсудим важный частный случай, когда оба вектора в скалярном произведении находятся на массовой поверхности. Если они при этом различны, то стандартное простое рассуждение показывает, что они должны быть ортогональны друг другу. Действительно, рассмотрим матричный элемент

$$\langle\Omega|\prod_{\alpha=1}^{m}C(v_\alpha)\mathsf{T}(u)\prod_{\beta=1}^{m}B(u_\beta)\,|\Omega\rangle.$$

Действуя трансфер-матрицей налево и направо, получаем

$$(T(u;u_1,\ldots,u_m)-T(u;v_1,\ldots,v_m))\,\langle\Omega|\prod_{\alpha=1}^{m}C(v_\alpha)\prod_{\beta=1}^{m}B(u_\beta)\,|\Omega\rangle=0,$$

и если $T(u;u_1,\ldots,u_m)$ не совпадает с $T(u;v_1,\ldots,v_m)$, скалярное произведение равно нулю. Продемонстрируем, как это получается из формулы (4.24).

Нам надо показать, что если параметры $\{u_i\}_m$ удовлетворяют уравнениям Бете

$$\frac{\phi(u_j+\eta)}{\phi(u_j)}=\prod_{l=1,\neq j}^{m}\frac{u_j-u_l+\eta}{u_j-u_l-\eta}$$

и при этом не совпадают с $\{v_i\}_m$ (мы для простоты предполагаем, что ни один из u_i не совпадает ни с одним из v_i), матрица T_{ij} в формуле (4.24) становится вырожденной: $\det T_{ij}=0$. После подстановки в нее уравнений Бете для u_i, мы имеем:

$$T_{ik}=\eta\phi(u_k)\prod_{s=1}^{m}\frac{u_k-v_s+\eta}{u_k-v_s}\,\tilde{T}_{ik},$$

где

$$\tilde{T}_{ik}=\frac{1}{(u_k-v_i)(u_k-v_i+\eta)}+\frac{y_k}{(u_k-v_i)(u_k-v_i-\eta)} \tag{4.28}$$

с

$$y_k=\prod_{l=1}^{m}\frac{(u_k-u_l+\eta)(u_k-v_l-\eta)}{(u_k-u_l-\eta)(u_k-v_l+\eta)}.$$

Очевидно, надо показать, что $\det\tilde{T}_{ik}=0$. Мы покажем, что, в самом деле, у матрицы $\tilde{T}_{ik}$ есть собственный вектор-строка с нулевым собственным значением, т.е ее строки линейно зависимы. Положим

$$x_j=\frac{\prod\limits_{l=1}^{m}(v_j-u_l)}{\prod\limits_{s=1,\neq j}^{m}(v_j-v_s)};$$

мы утверждаем (см. [11], стр. 111), что $\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\tilde{T}_{jk}=0$. Мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{m}x_j\tilde{T}_{jk}=U_k^{+}+y_kU_k^{-},\quad U_k^{\pm}=\sum_{j=1}^{m}\frac{x_j}{(u_k-v_j)(u_k-v_j\pm\eta)}. \tag{4.29}$$

Рассмотрим равный нулю контурный интеграл

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R\to\infty} \frac{\eta\, dz}{(u_k - z)(u_k - z \pm \eta)} \prod_{s=1}^{m} \frac{z - u_s}{z - v_s}.$$

Вычисляя его по вычетам, будем иметь тождество

$$\pm \prod_{s=1}^{m} \frac{u_k - u_s \pm \eta}{u_k - v_s \pm \eta} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\eta}{(u_k - v_j)(u_k - v_j \pm \eta)} \frac{\prod\limits_{l=1}^{m}(v_j - u_l)}{\prod\limits_{s=1,\neq j}^{m}(v_j - v_s)} = 0$$

или

$$\eta U_k^{\pm} = \mp \prod_{s=1}^{m} \frac{u_k - u_s \pm \eta}{u_k - v_s \pm \eta}.$$

Подставляя это в (4.29), найдем, что наша линейная комбинация действительно равна нулю.

Для нахождения квадрата нормы вектора Бете

$$\mathcal{N}^2(v_1, \ldots, v_m) = \langle \Omega | \prod_{l=1}^{m} C(v_l) \prod_{s=1}^{m} B(v_s) \, |\Omega\rangle$$

нужно положить $u_k = v_k + \epsilon_k$ в формуле (4.24) и устремить $\epsilon_k \to 0$ (помня, что $\{v_i\}_m$ удовлетворяют уравнениям Бете). В недиагональных элементах матрицы T_{ij} можно просто положить $\epsilon_k = 0$, а в диагональных возникает неопределенность (ноль в знаменателе и ноль в числителе), которую надо разрешить по правилу Лопиталя. В результате получается

$$\mathcal{N}^2(v_1, \ldots, v_m) = \eta^m \prod_{l=1}^{m} \phi^2(v_l) \prod_{r\neq s} \frac{v_r - v_s + \eta}{v_r - v_s} \det_{m\times m} t_{ik}, \tag{4.30}$$

где матрица t_{ik} следующая:

$$t_{ik} = -\delta_{ik}\left(\partial_{v_k} \log \frac{\phi(v_k + \eta)}{\phi(v_k)} + \sum_{l=1}^{m} \frac{2\eta}{(v_k - v_l)^2 - \eta^2}\right) + \frac{2\eta}{(v_k - v_i)^2 - \eta^2}. \tag{4.31}$$

Заметим, что $t_{ik} = \partial B_k / \partial v_i$, где

$$B_k = \log \frac{\phi(v_k)}{\phi(v_k + \eta)} + \sum_{l=1,\neq k}^{m} \log \frac{v_k - v_l + \eta}{v_k - v_l - \eta} \tag{4.32}$$

представляет собой прологарифмированную левую часть уравнений Бете в форме

$$\frac{\phi(v_k)}{\phi(v_k + \eta)} \prod_{l=1,\neq k}^{m} \frac{v_k - v_l + \eta}{v_k - v_l - \eta} = 1$$

(уравнения Бете гласят, что $B_k = 2\pi i q_k$ с целыми q_k) и тем самым совпадает с гессианом действия Янга в точке минимума.

5 Обобщенные магнетики и порождающий T-оператор

5.1 Трансфер-матрицы обобщенных магнетиков

В этом разделе мы рассмотрим интегрируемые системы, построенные по $GL(n)$-инвариантным R-матрицам. Для них можно построить семейство коммутирующих трансфер-матриц подобно тому, как это было сделано для $GL(2)$-моделей. Соответствующие интегрируемые модели можно назвать обобщенными магнетиками (или вершинными моделями). Например, можно рассмотреть неоднородную $GL(n)$-цепочку с трансфер-матрицей

$$\mathsf{T}(x) = \mathrm{tr}_0\Big(\mathsf{R}_{01}(x-x_1)\mathsf{R}_{02}(x-x_2)\dots\mathsf{R}_{0N}(x-x_N)\Big),$$

где каждая R-матрица имеет вид (3.83). (В этом разделе нам удобно будет обозначать спектральный параметр через x.) Уравнение Янга-Бакстера для $\mathsf{R}_{ij}(x)$ гарантирует, что $[\mathsf{T}(x),\, \mathsf{T}(x')] = 0$. Можно также рассмотреть цепочку не с периодическими, а с квазипериодическими (твистованными) граничными условиями, вставив под след групповой элемент $\mathbf{g}$ (твист), который мы для простоты возьмем диагональным ($\mathbf{g} = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$):

$$\mathsf{T}(x) = \mathrm{tr}_0\Big(\mathsf{R}_{01}(x-x_1)\mathsf{R}_{02}(x-x_2)\dots\mathsf{R}_{0N}(x-x_N)\,\mathbf{g}_0\Big) \tag{5.1}$$

Индекс 0 у элемента $\mathbf{g}$ означает, что он действует во вспомогательном пространстве (номер 0). В силу $GL(n)$-инвариантности (3.84) такие трансфер-матрицы тоже коммутируют при различных значениях спектрального параметра. В однородной изотропной цепочке (при $u_j = 0$, $\mathbf{g} = \mathsf{I}$) можно ввести локальный гамильтониан как логарифмическую производную $\mathsf{T}(x)$ в нуле; как и в $GL(2)$-случае он окажется суммой операторов перестановки соседних узлов: $\sum_j \mathsf{P}_{j,j+1}$. В неоднородной цепочке определить локальные гамильтонианы, коммутирующие с трансфер-матрицей, вообще говоря, нельзя.

Матричные элементы трансфер-матрицы (5.1) – полиномы по x. Нормируем трансфер-матрицу по-другому, разделив на полином $\prod_{j=1}^N (x-x_j)$:

$$\mathbf{T}(x) = \frac{\mathsf{T}(x)}{\prod_{j=1}^N (x-x_j)}$$

Тогда можно ввести гамильтонианы спиновой цепочки $\mathbf{H}_j$ как вычеты в полюсах x_j:

$$\mathbf{T}(x) = \mathrm{tr}\,\mathbf{g} + \sum_{j=1}^N \frac{\eta \mathbf{H}_j}{x-x_j} \tag{5.2}$$

Эти операторы коммутируют между собой. Однако, они нелокальны. Их явный вид следующий:

$$\mathbf{H}_i = \tilde{\mathsf{R}}_{i\,i-1}(x_i - x_{i-1})\dots\tilde{\mathsf{R}}_{i1}(x_i-x_1)\mathbf{g}_i\tilde{\mathsf{R}}_{iN}(x_i-x_N)\dots\tilde{\mathsf{R}}_{i\,i+1}(x_i-x_{i+1})$$

где

$$\tilde{\mathsf{R}}(x) = \mathsf{I} + \frac{\eta}{x}\,\mathsf{P}$$

Сравнив разложения при $x \to \infty$ выражений (5.2) и

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(x) &= \mathrm{tr}_0 \left[\Big(\mathsf{I} + \frac{\eta \mathsf{P}_{01}}{x - x_1} \Big) \dots \Big(\mathsf{I} + \frac{\eta \mathsf{P}_{0N}}{x - x_N} \Big) \, \mathbf{g}_0 \right] \\
&= \mathrm{tr}\, \mathbf{g} \cdot \mathsf{I} + \frac{\eta}{x} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{tr}_0 \Big(\mathsf{P}_{0i} \mathbf{g}_0 \Big) + \dots \\
&= \mathrm{tr}\, \mathbf{g} \cdot \mathsf{I} + \frac{\eta}{x} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{g}_i + \dots
\end{aligned}$$

получим следующее “правило сумм”:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{g}_i$$

Представляет интерес предел этой конструкции при $\eta \to 0$. В этом пределе из обобщенного XXX магнетика[1] получается модель Годена. Положим $\mathbf{g} = e^{\eta \mathbf{h}}$, тогда в пределе $\eta \to 0$ имеем $\mathbf{H}_i = 1 + \eta \mathbf{H}_i^G + O(\eta^2)$, где

$$\mathbf{H}_i^G = \mathbf{h}_i + \sum_{j \neq i} \frac{\mathsf{P}_{ij}}{x_i - x_j}$$

коммутирующие гамильтонианы модели Годена.

Можно построить более общие трансфер-матрицы, действующие в том же квантовом пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$, взяв в качестве вспомогательного пространства не $\mathbb{C}^n$, а пространство V_λ неприводимого представления π_λ алгебры $U(gl_n)$. Такая трансфер-матрица получается как след в V_λ от произведения R-матриц (3.86):

$$\mathsf{T}_\lambda(x) = \mathrm{tr}_{V_\lambda} \Big(\mathsf{R}_{01}^{\lambda}(x - x_1) \mathsf{R}_{02}^{\lambda}(x - x_2) \dots \mathsf{R}_{0N}^{\lambda}(x - x_N) \, \pi_\lambda(\mathbf{g}_0) \Big). \tag{5.3}$$

Из уравнения Янга-Бакстера (3.87) и $GL(n)$-инвариантности следует, что трансфер-матрицы $\mathsf{T}_\lambda(x)$ коммутируют при различных x и λ:

$$[\mathsf{T}_\lambda(x), \, \mathsf{T}_\mu(x')] = 0.$$

В частности, если λ – пустая диаграмма ($\lambda = \emptyset$), имеем

$$\mathsf{T}_\emptyset(x) = \prod_{i=1}^{N} (x - x_i) \cdot \mathsf{I}.$$

Можно ввести нормированные трансфер-матрицы, поделив на $\mathsf{T}_\emptyset(x)$:

$$\mathbf{T}_\lambda(x) = \frac{\mathsf{T}_\lambda(x)}{\mathsf{T}_\emptyset(x)}.$$

[1] Здесь мы используем название XXX в расширенном смысле, как название моделей с рациональной R-матрицей.

5.2 Трансфер-матрицы как обобщенные характеры

Если $N = 0$, имеем
$$\mathbf{T}_\lambda^{(N=0)}(u) = \mathrm{tr}_{V_\lambda} \pi_\lambda(\mathbf{g}) = \chi_\lambda(\mathbf{g}), \tag{5.4}$$
где $\chi_\lambda(\mathbf{g})$ – характер элемента $\mathbf{g}$ в представлении π_λ. Кроме того,
$$\mathbf{T}_\lambda(x) = \chi_\lambda(\mathbf{g}) \cdot \mathsf{I} + O(1/x), \qquad x \to \infty.$$

Так что нормированные трансфер-матрицы можно рассматривать как обобщения характеров.

Известно, что характеры даются полиномами Шура s_λ от собственных значений g_i матрицы $\mathbf{g}$:
$$\chi_\lambda(\mathbf{g}) = s_\lambda(\{g_i\}) = \frac{\det_{ij}\left(g_i^{n+\lambda_j-j}\right)}{\det_{ij}\left(g_i^{n-j}\right)}.$$

Полиномы Шура – симметрические функции от g_i. Часто удобно рассматривать полином Шура $s_\lambda(\{x_i\})$ как полином от переменных $t_k = \frac{1}{k}\sum_i g_i^k$. Обозначим его $s_\lambda(\mathbf{t})$, где $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$. Например, $s_\emptyset(\mathbf{t}) = 1$, $s_{(1)}(\mathbf{t}) = t_1$, $s_{(2)}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_1^2 + t_2$, $s_{(1^2)}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_1^2 - t_2$ и т. д. Для каждой конечной диаграммы λ полином $s_\lambda(\mathbf{t})$ зависит только от конечного числа t_i. Полиномы Шура удовлетворяют ряду нетривиальных тождеств. Отметим тождество Коши-Литтлвуда:
$$\sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{t}) s_\lambda(\mathbf{t}') = \exp\Big(\sum_{k\geq 1} k t_k t_k'\Big), \tag{5.5}$$

где сумма в левой части берется по всем диаграммам Юнга включая пустую. Имеют место также тождества Якоби-Труди, которые выражают характер (полином Шура) χ_λ через характеры $\chi_{(k)}$ и $\chi_{(1^k)}$, отвечающие диаграммам, представляющим собой соответственно строку или столбец длины k:
$$\chi_\lambda(\mathbf{g}) = \det_{1\leq i,j\leq \lambda_1'} \chi_{(\lambda_i - i + j)}(\mathbf{g}), \tag{5.6}$$
$$\chi_\lambda(\mathbf{g}) = \det_{1\leq i,j\leq \lambda_1} \chi_{(1^{\lambda_i' - i + j})}(\mathbf{g}). \tag{5.7}$$
В этих формулах λ' – это диаграмма λ, транспонированная относительно главной диагонали, так что $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ – длины столбцов диаграммы λ.

Аналогию между трансфер-матрицами и характерами углубляет тот факт, что для трансфер-матриц справедливы тождества (функциональные соотношения), аналогичные тождествам Якоби-Труди:
$$\mathbf{T}_\lambda(x) = \det_{1\leq i,j\leq \lambda_1'} \mathbf{T}_{(\lambda_i - i + j)}(x - (j-1)\eta), \tag{5.8}$$
$$\mathbf{T}_\lambda(x) = \det_{1\leq i,j\leq \lambda_1} \mathbf{T}_{(1^{\lambda_i' - i + j})}(x + (j-1)\eta). \tag{5.9}$$
Они называются тождествами Чередника-Бажанова-Решетихина.

Для трансфер-матриц, отвечающим прямоугольным диаграммам Юнга $\lambda = (s^a)$ с a строками длины s, тождества Чередника-Бажанова-Решетихина эквивалентны замечательному функциональному соотношению, которое имеет вид трехчленного уравнения Хироты, известного в теории разностных солитонных уравнений. Введем трансфер-матрицы

$$\mathsf{T}^a_s(x) = \mathsf{T}_{(s^a)}\Big(x - \tfrac{\eta}{2}\,(s+a)\Big),$$

отвечающие прямоугольным диаграммам Юнга, тогда из тождеств Чередника-Бажанова-Решетихина следует функциональное соотношение

$$\mathsf{T}^a_s\Big(x+\tfrac{\eta}{2}\Big)\mathsf{T}^a_s\Big(x-\tfrac{\eta}{2}\Big) - \mathsf{T}^a_{s+1}(x)\mathsf{T}^a_{s-1}(x) = \mathsf{T}^{a+1}_s(x)\mathsf{T}^{a-1}_s(x). \qquad (5.10)$$

Задача. Доказать функциональное соотношение (5.10).

Существует элегантный способ выразить трансфер-матрицы $\mathsf{T}_\lambda(x)$ как специального вида матричные производные от характеров $\chi_\lambda(\mathbf{g})$ по матрице $\mathbf{g}$ (которая при этом, вообще говоря, уже не предполагается диагональной). Пусть $f(\mathbf{g})$ – любая функция на группе $GL(n)$ ($\mathbf{g} \in GL(n)$). Определим ее матричную производную (которую будем называть копроизводной) следующим образом:

$$Df(\mathbf{g}) = \sum_{a,b} e_{ab}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f\left(e^{\varepsilon \mathbf{e}_{ba}}\mathbf{g}\right)\Big|_{\varepsilon=0} \qquad (5.11)$$

Согласно этому определению, если значения функции f лежали в пространстве V, значения $Df(\mathbf{g})$ лежат в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes V$. Эквивалентное определение в компонентах:

$$D^a_b = \sum_c g^a_c \frac{\partial}{\partial g^b_c}$$

где g^a_b – матричные элементы матрицы $\mathbf{g} \in GL(n)$ в векторном представлении. В явном виде имеем

$$D^a_b f(\mathbf{g}) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} f\left(e^{\varepsilon \mathbf{e}_{ba}}\mathbf{g}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

Прямое вычисление коммутатора $[D^{a_2}_{b_2}, D^{a_1}_{b_1}]$ показывает, что

$$[D^{a_2}_{b_2}, D^{a_1}_{b_1}] = \delta_{a_1 b_2} D^{a_2}_{b_1} - \delta_{a_2 b_1} D^{a_1}_{b_2} \qquad (5.12)$$

т.е. операторы D^a_b имеют те же коммутационные соотношения, что и генераторы $\mathbf{e}_{ab}$ алгебры $U(gl_n)$ (см. (3.85)).

В случае, когда копроизводные действуют на функциях со значениями в тензорном произведении $\otimes_i V_i$ пространств V_i удобно модифицировать обозначения, введя индекс i у копроизводной:

$$D_i f(\mathbf{g}) = \sum_{a,b} e^{(i)}_{ab}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f\left(e^{\varepsilon \mathbf{e}_{ba}}\mathbf{g}\right)\Big|_{\varepsilon=0},$$

где $e^{(i)}_{ab}$ нетривиально действует в V_i. В этих обозначениях имеем, например, $D_1 \mathrm{tr}\,\mathbf{g} = \mathbf{g}_1$, $D_2\mathbf{g}_1 = \mathsf{P}_{21}\mathbf{g}_1$, а соотношение (5.12) запишется в виде $[D_2, D_1] = \mathsf{P}_{12}(D_1 - D_2)$.

Внимательный анализ показывает, что трансфер-матрица $\mathsf{T}_\lambda(u)$ может быть представлена в виде

$$\mathsf{T}_\lambda(x) = (x - x_N + \eta D_N)\dots(x - x_1 + \eta D_1)\chi_\lambda(\mathbf{g}). \qquad (5.13)$$

С помощью этого представления можно доказать тождества Чередника-Бажанова-Решетихина.

5.3 Производящий T-оператор как тау-функция

Введем производящую функцию для трансфер-матриц $\mathsf{T}_\lambda(x)$. Она называется производящим T-оператором. Пусть $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$ – бесконечный набор комплексных переменных. Производящий T-оператор имеет вид

$$\mathsf{T}(x;\mathbf{t}) = \sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{t}) \mathsf{T}_\lambda(x), \tag{5.14}$$

где сумма, как и в (**??**), берется по всем диаграммам Юнга включая пустую. Как и $\mathsf{T}_\lambda(x)$, это оператор в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$. Он зависит от элементов g_i матрицы твиста $\mathbf{g}$ как от параметров. Очевидно, операторы $\mathsf{T}(x;\mathbf{t})$ коммутируют при всех x, $\mathbf{t}$.

В терминах копроизводных производящий T-оператор можно представить в виде

$$\mathsf{T}(x;\mathbf{t}) = (x - x_N + \eta D_N) \ldots (x - x_1 + \eta D_1) \exp\Bigl(\sum_{k \geq 1} t_k \mathrm{tr}\, \mathbf{g}^k\Bigr)$$

(надо воспользоваться формулой (5.13) и тождеством Коши-Литтлвуда (5.5)).

Очевидно, $\mathsf{T}(x;0) = \mathsf{T}_\emptyset(x)$. Действуя на $\mathsf{T}(x;\mathbf{t})$ дифференциальными операторами по t_k при $\mathbf{t} = 0$ можно воспроизвести все трансфер-матрицы $\mathsf{T}_\lambda(x)$. Например,

$$\mathsf{T}_{(1)}(x) = \partial_{t_1} \mathsf{T}(x;\mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=0}, \qquad \mathsf{T}_{(2)}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_{t_1}^2 + \partial_{t_2}\right) \mathsf{T}(x;\mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=0}.$$

Общая формула имеет вид

$$\mathsf{T}_\lambda(x) = s_\lambda(\tilde{\partial}) \mathsf{T}(x;\mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=0},$$

где $\tilde{\partial} = \{\partial_{t_1}, \frac{1}{2}\partial_{t_2}, \frac{1}{3}\partial_{t_3}, \ldots\}$.

Анализируя поведение производящего T-оператора $\mathsf{T}(x;\mathbf{t})$ по $\mathbf{t}$ в окрестности некоторых других точек, отличных от $\mathbf{t} = 0$, можно показать, что в этом семействе содержатся также Q-операторы Бакстера.

Перейдем к важнейшему свойству производящего T-оператора, которое устанавливает связь с теорией классических интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных. Введем обозначения

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k,$$

$$\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = \{t_1 \pm z^{-1},\, t_2 \pm \tfrac{1}{2} z^{-2},\, t_3 \pm \tfrac{1}{3} z^{-3},\, \ldots\}.$$

Можно показать, что тождества Чередника-Бажанова-Решетихина эквивалентны следующему *билинейному соотношению* для производящего T-оператора:

$$\oint_C z e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} \mathsf{T}\left(x; \mathbf{t} - [z^{-1}]\right) \mathsf{T}\left(x - \eta; \mathbf{t}' + [z^{-1}]\right) dz = 0, \tag{5.15}$$

справедливому при любых $x, \mathbf{t}, \mathbf{t}'$. Контур интегрирования C должен охватывать точку ∞ и не содержать внутри себя тех сингулярностей, которые приходят из T-сомножителей в подынтегральном выражении.

Билинейное соотношение (5.15) позволяет отождествить производящий T-оператор (точнее, любое из его собственных значений) с тау-функцией модифицированной иерархии Кадомцева-Петвиашвили (мКП), известной в теории солитонных уравнений. Обратим внимание на то, что спектральный параметр x играет при этом роль "нулевого времени" t_0.

Положив, например, $\mathbf{t}' = \mathbf{t} - [z_1^{-1}] - [z_2^{-1}]$, получим из билинейного тождества (после взятия интеграла с помощью вычетов) трехчленное разностное уравнение Хироты для иерархии мКП:

$$\begin{aligned} z_2 \mathsf{T}\left(x+\eta; \mathbf{t} - [z_2^{-1}]\right) \mathsf{T}\left(x; \mathbf{t} - [z_1^{-1}]\right) - z_1 \mathsf{T}\left(x+\eta; \mathbf{t} - [z_1^{-1}]\right) \mathsf{T}\left(x; \mathbf{t} - [z_2^{-1}]\right) \\ = (z_1 - z_2)\mathsf{T}(x+\eta; \mathbf{t})\mathsf{T}\left(x; \mathbf{t} - [z_1^{-1}] - [z_2^{-1}]\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.4 Связь с моделями типа Калоджеро-Мозера

Итак, мы можем сказать, что любое собственное значение производящего T-оператора, как функция "времен" $\{t_k\}$ и $t_0 = x$, – решение иерархии мКП в билинейной форме (тау-функция). К какому типу относятся эти решения? Ответ на этот вопрос может быть дан, если учесть, что все $\mathsf{T}(x; \mathbf{t})$ коммутируют и могут быть одновременно диагонализованы, а матричные элементы этих операторов – полиномы по x степени N. Значит, собственные значения (обозначим их $T(x; \mathbf{t})$) – тоже полиномы по x степени N, т.е. они имеют вид

$$T(x; \mathbf{t}) = e^{t_1 \operatorname{tr} \mathbf{g} + t_2 \operatorname{tr} \mathbf{g}^2 + \dots} \prod_{k=1}^{N} (x - x_k(\mathbf{t})) \tag{5.17}$$

(вид экспоненциального фактора восстанавливается из предела $x \to \infty$). Корни этих полиномов зависят от времен t_i, причем $x_k(0) = x_k$.

Динамика нулей полиномиальных тау-функций – хорошо известный сюжет в теории интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных. Из работ Кричевера и др. следует, что эта динамика описывается уравнениями движения интегрируемых иерархий многочастичных систем типа Калоджеро-Мозера. В частности, динамика нулей тау-функции иерархии мКП вида (5.17) по времени t_k совпадает с динамикой интегрируемой системы частиц Руйсенаарса-Шнайдера (релятивистской деформации системы Калоджеро-Мозера) относительно k-го гамильтонова потока. Например, уравнения движения по времени t_1 имеют вид

$$\ddot{x}_i = -\sum_{k \neq i} \frac{2\eta^2 \dot{x}_i \dot{x}_k}{(x_i - x_k)((x_i - x_k)^2 - \eta^2)}$$

(здесь точка означает дифференцирование по t_1) с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\eta p_i} \prod_{k \neq i} \frac{x_i - x_k + \eta}{x_i - x_k}, \qquad \{p_i, x_k\} = \delta_{ik}.$$

Отсюда вытекает нетривиальная связь обобщенных неоднородных квантовых магнетиков, интегрируемых с помощью алгебраического анзаца Бете, и классических многочастичных интегрируемых систем типа Калоджеро-Мозера.

Список литературы

[1] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Москва, "Наука", 1992

[2] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Москва, "Мир", 1987

[3] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Москва, "Мир", 1985

[4] А.А. Белавин, А.Г. Кулаков, Г.М. Тарнопольский, *Лекции по теоретической физике*, 3-е изд., испр. и доп., Москва, МЦНМО, 2015

[5] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, УМН **34:5** (1979) 13-63

[6] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга*, Записки научных семинаров ЛОМИ, **109** (1981) 134-178

[7] А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Квантовый метод обратной задачи*, Физика ЭЧАЯ **13** (1982) 501–541

[8] L. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model*, https://arxiv.org/pdf/hep-th/9605187.pdf

[9] P. Kulish and E. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments*, Lecture Notes in Physics, Volume 151, p. 61–119 (1982)

[10] M. Zvonarev, *Notes on Bethe ansatz*, http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/LectureZvonarev.pdf

[11] N. Slavnov, *Algebraic Bethe ansatz*, https://arxiv.org/pdf/1804.07350.pdf

[12] S. Belliard and N. Slavnov, *Why scalar products in the algebraic Bethe ansatz have determinant representation*, https://arxiv.org/pdf/1908.00032.pdf

[13] S. Kharchev and A. Zabrodin, *Theta vocabulary I*, Journal of Geometry and Physics **94** (2015) 19–31, https://arxiv.org/pdf/1502.04603.pdf