0.1 Мотивировка действий

Часто приходится иметь дело с функциями, постоянными на классах сопряженности - $f(x) = f(gxg^{-1})$, например, характерами представлений, в частности, усреднять их по группе $\int_{g\in G} f(g)dg$. Для этого, во первых, стоит ввести меру хаара на группе, а во вторых, поскольку введенная мера будет зависеть от всех элементов группы, хочется перейти от нее интегрированию по множеству классов сопряженности, для этого вводится радиальная мера хаара. (Можно провести аналогию с переходом от интегрирования по переменным x,y функций, зависящих только от радиуса $r = \sqrt{x^2+y^2}$ к интегрированию по радиусу)

0.2 Мера хаара, примеры, GL(n)

Меры на многообразиях локально устроены, как Лебеговы меры: есть локальная карта, в которой вводятся координаты, кроме того, есть функция плотности

$$\varphi(x)dx_1 \dots dx_n.$$

Инвариантная мера на группе - такая, что пусть группа G действует на себе, тогда мера инвариантна, если мера

$$\mu(gE) = \mu(E)$$

для любого множества $E \in G$ и элемента $g \in G$.
Определение. Форма $a(t)$ правоинвариантна, если

$$(a(t), v(t)) = (a(\tau), v(\tau)), \tau = tg,$$

аналогично - левоинвариантна.
Теорема. На группе Ли размерности n существует ровно n линейно независимых правоинвариантных и ровно n линейно независимых левоинвариантных форм. Коэффициенты этих форм являются алитическими функциями на G
Доказательство Запишем условие инвариантности в единице -

$$(a(e), v(e)) = (a(t), v(t)),$$

группа дейстует на себе, разнося векторы из единицы по группе, тогда можно определить матрицу преобразования вектора при перенесении

$$v(t) = A(t, e)v(e)$$

и

$$(a(e), v(e)) = (a(t), A(t, e)v(e)) = (a(t)A^T(t, e),v(e)),$$

то есть

$$a(e) = a(t)A^T(t, e), a(t) = (A^T(t, e))^{-1}a(e), \tag{1}$$

Поскольку в единице можно определить n независимых форм, каждая разносится по группе указанным образом, то существует n ивариантных форм на группе.
Пример. Пусть

$$g \in GL(n),$$

dg - матрица, составленная из дифференциалов элементов g, положим

$$a(g)dg = dg \cdot g^{-1}.$$

Правые сдвиги:

$$h = gg_0, dh = dg \cdot g_0,$$

откуда

$$dh \cdot h^{-1} = dg \cdot g^{-1},$$

следовательно, матрица $w(g, dg)$ является правоинвариантной. Элементы $a(g)dg$ - дифференциальные формы на G, число линейно независимых среди них форм равно n.

Теорема. На группе Ли размерности n существует элемент обьема, инвариантный относительно правых (левых) сдвигов и представимый в виде

$$d\mu(g) = \Omega(t) dt^1 dt^2 ... dt^n,$$

где $\Omega(t)$ аналитическая функция на группе G, определяемая однозначно с точностью до домножения на постоянный множитель.

Доказательство Элемент обьема задается в единичной точке с помощью старшей формы, она определяется заданием n линейно независимых форм степени 1, которые, как показано выше, сущестуют, определены с точностью до домножения на константу, т.е. и старшая форма определена однозначно с точностью до домножения на константу.

Определение. Пусть A - произвольное измеримое множество на группе, т.е. такое, что интеграл

$$\mu(A) = \int_A d\mu(g)$$

существует. Полученный интеграл называется мерой (обьемом) множества A (мерой Хаара).

Пример. Мера Хаара на группе GL(n)

Рассмотрим

$$\int_{E \in G} f(x) \mu_L(dx)$$

При действии на множество E элементом g элементы $x \in E$ переходят в $gx \in gE$ Тогда для группы $GL(N, \mathbb{R}) \subset Mat(N,\mathbb{R})$ для левоинвариантной меры должно выполняться условие

$$\int_E f(gx) \mu_L(dx) = \int_E f(x) \mu_L(dx), \quad x, g \in GL(N, \mathbb{R})$$

Покажем, что такая мера есть

$$\mu_L(dx) = \text{ const } \times |\det x|^{-N} dx$$

Проверим, что будет выполнено условие левоинвариантности

$$\int f(gx) |\det x|^{-N} dx = \int f(x) |\det x|^{-N} dx$$

Сделаем замену переменной $y = gx$, тогда $|\det y| = |\mathrm{detg}||\det x|$ и $|\det x|^{-N} = |\mathrm{detg}|^N |\det y|^{-N}$. Чтобы посчитать якобиан преобразования, запишем y как вектор, составленный из столбцов

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in R^{n^2}$$

В этой записи $y = gx$ запишется как

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g} & & & \\ & \boldsymbol{g} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$dy = |(\det(g))^n| \, dx = |\det(g)|^n dx$$

и

$$\int f(gx) |\det x|^{-N} dx = \int f(y) |\det y|^{-N} |\mathrm{detg}|^N dx = \int f(y) |\det y|^{-N} dy$$

0.3 Разложение $u = v^{-1}\gamma v$, уточнение про классы смежности и особые точки γ

Для интегрирования функций, постоянных на классах сопряженности только по множеству классов сопряженности в U(n) рассмотрим разложение

$$u = v^{-1}\gamma v,$$

где $\gamma = diag(e^{i\phi_1}, ..., e^{i\phi_n})$ - диагональная матрица, а $v \in U(n)$. Будем искать разложение меры Хаара в виде $du = \omega dv d\gamma$, где ω -якобиан перехода.
Заметим, что для каждого элемента $u \in U(n)$ матрицы γ и v определены неоднозначно, γ - с точностью до перестановки собственных значений, v с точностью до таких матриц v_1, v_2, что

$$v_1 \gamma v_1^{-1} = v_2 \gamma v_2^{-1},$$

то есть матрица $w = v_2^{-1} v_1$ должна коммутировать с матрицей γ,

$$(w\gamma)_{ij} = w_{ij}\gamma_{jj} = (\gamma w)_{ij} = \gamma_{ii} w_{ij},$$

и значит,

$$w_{ij}(\gamma_{ii} - \gamma_{jj}) = 0$$

для всех i,j. Если собственные числа матрицы γ не совпадают, то условие означает, что матица w - диагональная. Поскольку условие совпадения собственных значений выделяет уравнением

$$\phi_i = \phi_j$$

в группе некоторую поверхность меньшей размерности, такие элементы имеют нулевую меру и не влияют на интеграл.
Таким образом, для каждой матрицы (за исключением матриц со совпадающими собственными значениями) $u \in U(n)$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу

$$\gamma = diag(e^{i\phi_1}, ..., e^{i\phi_n}), \phi_1 > \phi_2 > ... > \phi_n$$

и матрицу v, определенную с точностью до домножения справа на произвольную матрицу

$$\xi \in \Gamma = \{diag(\lambda_1 ... \lambda_n) : |\lambda_i| = 1\},$$

поскольку матрица $w = v_2^{-1} v_1$ осуществляет переход между v_1 и v_2 с помощью домножения справа, то есть ставим в соответствие каждому элементу $u \in U(n)$ правый класс смежности $v\Gamma$, $v \in U(n)$ и матрицу $\gamma = diag(e^{i\phi_1}, ..., e^{i\phi_n}), \phi_1 > \phi_2 > ... > \phi_n$, причем в каждом классе смежности одинаковое, не зависящее от матрицы γ, число элементов. Таким образом определено взаимно однозначное соответствие

$$(\gamma, v\Gamma) \to u = v\gamma v^{-1}$$

0.4 Пример - вычисление разложения для группы SU(2)

Группа SU(2) задается двумя уравнениями - $uu* = 1$ и $det(u) = 1$. Из первого условия получаем

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a\overline{a} + b\overline{b} = 1, a\overline{c} + b\overline{d} = 0, c\overline{c} + d\overline{d} = 1$$

Решая эти уравнения получаем, что $c = -\lambda b, d = \lambda\overline{a}$, где $|a|^2 + |b^2| = 1$,$|\lambda| = 1$ Если наложить дополнительное условие $det(u) = 1$, то это фиксирует $\lambda = 1$ и, следовательно, группа состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Собственные значиния матрицы u находим, исходя из предполагаемого разложения $u = v^{-1}\gamma v$, тогда

$$tr(u) = tr(v^{-1})tr(\gamma)tr(v) = tr(\gamma) = e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2cos\phi$$

и

$$tr(u) = tr\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = a + \overline{a} = 2Re(a),$$

следовательно $cos\phi = Re(a)$.
Переходя к вещественным переменным $a = x_1 + ix_2, b = x_3 + ix_4, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, получаем, что фиксация собственного значения матрицы u фиксирует координату x_1 для u как точки на трехмерной сфере, остальные координаты задает матрица v.
Стандартным образом вычисляя матрицу v, приводящую u к диагональному виду, можем убедиться, что она может быть выбрана с точностью до домножения справа на диагональную матрицу

0.5 Вычисление определителя

Вычислим определитель в точке

$$u = v\gamma v^{-1},$$

в окрестности u элементы имеют вид

$$v_X(t) = ve^{tX}, \gamma_H(t) = \gamma e^{tH},$$

где элементы $X \in Lie(U(n)), H \in Lie(\Gamma)$. Тогда

$$u_{X,H}(t,t') = v_X\gamma_H v_X^{-1} = ve^{tX}\gamma e^{t'H}e^{-tX}v^{-1}$$

и в первом порядке малости

$$u_{X,H}(t,t') = v\gamma v^{-1} + t(vX\gamma v^{-1} - v\gamma Xv^{-1}) + t'v\gamma Hv^{-1} + o(\sqrt{t^2 + t'^2})$$

и линейная часть преобразования есть

$$vX\gamma v^{-1} + v\gamma Hv^{-1} - v\gamma Xv^{-1} = v[X\gamma - \gamma X + \gamma H]v^{-1} = \\ v\gamma v^{-1}v[\gamma^{-1}X\gamma - X + H]v^{-1} = v\gamma v^{-1}Ad_v[(Ad_{\gamma^{-1}} - id)X + H]$$

Рассмотрим $\Phi = (Ad_{\gamma^{-1}} - id)X + H$ в базисе $(X_{1,1}, Y_{1,1}...X_{n-1,n}, Y_{n-1,n}, H_1...H_n)$ матриц алгебры $Lie(U(n))$, где

$$X_{k,l} = E_{k,l} - E_{l,k}, Y_{k,l} = i(E_{k,l} + E_{l,k}), H_k = iE_{k,k}.$$

Тогда вычислим значение Φ для базисных элементов:

$$Ad_{\gamma^{-1}}(X_{k,l}) = \gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}}E_{k,l} - \gamma_l^{-1}\overline{\gamma_k^{-1}}E_{l,k} = \\ Re(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})(E_{k,l} - E_{l,k}) + Im(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})(E_{k,l} + E_{l,k}) = Re(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})X_{k,l} + Im(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})Y_{k,l}$$

и аналогично

$$Ad_{\gamma_{-1}}(Y_{k,l}) = -Im(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})X_{k,l} + Re(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})Y_{k,l}$$

и, таким образом,

$$(Ad_{\gamma^{-1}} - id)X_{k,l} = (Re(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}}) + 1)X_{k,l} + Im(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})Y_{k,l},$$

$$(Ad_{\gamma^{-1}} - id)Y_{k,l} = -Im(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}})X_{k,l} + (Re(\gamma_k^{-1}\overline{\gamma_l^{-1}}) - 1)Y_{k,l}$$

и в указанном базисе матрица замены координат примет вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} Re(\overline{\gamma_1^{-1}}\gamma_2^{-1})-1 & Im(\overline{\gamma_1^{-1}}\gamma_2^{-1}) & & & & & & \\ -Im(\overline{\gamma_1^{-1}}\gamma_2^{-1}) & Re(\overline{\gamma_1^{-1}}\gamma_2^{-1})-1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & Re(\overline{\gamma_{n-1}^{-1}}\gamma_n^{-1})-1 & Im(\overline{\gamma_{n-1}^{-1}}\gamma_n^{-1}) & & & \\ & & & -Im(\overline{\gamma_{n-1}^{-1}}\gamma_n^{-1}) & Re(\overline{\gamma_{n-1}^{-1}}\gamma_n^{-1})-1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \det\Phi &= \prod_{1\le k<l\le n}\left[\left(\mathrm{Re}\left(\overline{\gamma^{-1}}_k\gamma_l^{-1}\right)-1\right)^2+\mathrm{Im}\left(\overline{\gamma^{-1}}_k\gamma_l^{-1}\right)^2\right] \\ &= \prod_{1\le k<l\le n}\left|\overline{\gamma^{-1}}_k\gamma_l^{-1}-1\right|^2 = \prod_{1\le k<l\le n}\left|\gamma_k\gamma_l^{-1}-1\right|^2 \\ &= \prod_{1\le k<l\le n}\left|\gamma_k-\gamma_l\right|^2 = \prod_{1\le k<l\le n}\left|e^{i\phi_k}-e^{i\phi_l}\right|^2 = \Delta\overline{\Delta} \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \prod_{1\le k<l\le n}\left(e^{i\phi_k}-e^{i\phi_l}\right)$$

Искомый якобиан преобразования имеет вид

$$w = \Delta\overline{\Delta}$$

Имея в виду вышесказанное о $v \in g\Gamma, g \in U(n)$, причем число элементов в Γ не зависит от $\gamma = diag(e^{i\phi_1}, ..., e^{i\phi_n})$, так же, как и определитель w, можем проинтегрировать полученное выражение для меры по части, зависящей от классов смежности, получим ненормированную меру, зависящую только от диагональной части γ

$$du = const \times \Delta\overline{\Delta} d\phi_1 ... d\phi_n$$

Для получения нормированной меры (такой, что мера всего U(n) равна 1) необходимо разделить интегрируемое выражение на

$$\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Delta\overline{\Delta}d\phi_1\ldots\phi_n$$

Тогда интегрирование по группе для функций классов примет вид

$$\int_U f du = \frac{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f\Delta\overline{\Delta}d\phi_1\ldots\phi_n}{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Delta\overline{\Delta}d\phi_1\ldots\phi_n}$$

Определим, чему равен знаменатель этого выражения. Заметим, вспомнив определение определителя вандермонда, что можем записать

$$\delta = \prod_{i>j}(\gamma_i-\gamma_j) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1^{N-1} \\ 1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_N & \cdots & \gamma_N^{N-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\gamma^0_{\sigma(1)}\gamma^1_{\sigma(2)}\ldots\gamma^{n-1}_{\sigma(n)}$$

Тогда можем вычислить нормировочный множитель

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Delta\overline{\Delta}d\phi_1\ldots\phi_n \\ &\quad = \textstyle\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\gamma_1^{N-\sigma(1)}\ldots\gamma_N^{N-\sigma(N)}\times \\ &\qquad\qquad \textstyle\sum_{\tau\in S_N}\operatorname{sgn}(\tau)\overline{\gamma}_1^{N-\tau(1)}\ldots\overline{\gamma}_N^{N-\tau(N)}, \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)e^{i\phi_1(\tau(1)-\sigma(1))}\ldots e^{i\phi_N(\tau(N)-\sigma(N))} \end{aligned}$$

где переставили суммирование и интегрирование и, вспомнили, что $\gamma_j = e^{i\phi_j}$. Далее поскольку

$$\int_0^{2\pi} e^{i\phi_j(k-l)} = 2\pi\delta_{kl},$$

после интегрирования ненулевой вклад возникнет в случаях, когда $\sigma = \tau$, таких слагаемых N!. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Delta\overline{\Delta} d\phi_1 \dots \phi_n = (2\pi)^N N!$$

И получаем итоговую формулу для радиальной части меры Хаара

$$\int_U f du = \frac{\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f\Delta\overline{\Delta} d\phi_1 \dots \phi_n}{(2\pi)^N N!}, \quad \Delta = \prod_{1\le k<l\le n} \left(e^{i\phi_k} - e^{i\phi_l}\right)$$

0.6 Примеры вычисления радиальной меры для SU(2)

Для иллюстрации полученной формулы вычислим радиальную часть меры для группы SU(2) Рассмотрим элемент SU(2)

$$u = \begin{pmatrix} x_1 + ix_4 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_1 - ix_4 \end{pmatrix}$$

Интеграл функции по группе есть

$$\int_{SU(2)} f du = \frac{\int f(x_1, x_2, x_3, x_4)\delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{\int \delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}$$

Параметризуем координаты как

$$\begin{array}{ll} x_1 = r\cos(\theta) & x_2 = r\sin(\theta)\cos(\psi) \\ x_3 = r\sin(\theta)\sin(\psi)\cos(\phi) & x_4 = r\sin(\theta)\sin(\psi)\sin(\phi) \end{array}$$

Тогда Якобиан преобразования имеет вид:

$$J = \left|\det\left(\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \theta, \psi, \psi)}\right)\right| = r^3 \sin^2(\theta)\sin(\psi).$$

Поскольку $u \in SU(2)$, то $r^2 = 1$ и получаем

$$\int_{SU(2)} f du = \frac{\int fJ\delta(r^2-1) d\theta d\psi d\phi}{\int J\delta(r^2-1) d\theta d\psi d\phi} = \frac{\int f \sin^2(\theta)\sin(\psi) d\theta d\psi d\phi}{\int \sin^2(\theta)\sin(\psi) d\theta d\psi d\phi} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\theta,\psi,\phi=0}^{\pi,\pi,2\pi} f(\theta,\psi,\phi)\sin^2(\theta)\sin(\psi) d\theta d\psi d\phi$$

Тогда для функций классов $f(\theta,\psi,\phi) = f(\theta)$ интеграл принимает вид

$$\int_{SU(2)} f du = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\theta,\psi,\phi=0}^{\pi,\pi,2\pi} f(\theta)\sin^2(\theta)\sin(\psi) d\theta d\psi d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin^2(\theta) d\theta$$

Сверяемся с полученной общей формулой:

$$\Delta = e^{i\theta} - e{-}i\theta = 2isin(\theta), \quad \Delta\overline{\Delta} = 4sin^2(\theta)$$

Нормировочный множитель:

$$\int_0^{\pi} \Delta\overline{\Delta} d\theta = \pi \cdot 2! = 2\pi$$

и итоговая формула

$$\int_{SU(2)} f du = \frac{\int_0^{\pi} f\Delta\overline{\Delta} d\theta}{\int_0^{\pi} \Delta\overline{\Delta} d\theta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin^2(\theta) d\theta$$

Таким образом, результат, найденный по общей формуле, совпадает с вычисленным напрямую.