Тезисы к докладу по теме: «Стохастические вершинные модели. Вершинные веса. Уравнение Янга-Бакстера в координатном и операторном виде»

(Ширалиева Айсель)

Часть 1

Возможно, что перед тем, как начинать тему, нужно напомнить аудитории о пуассоновских процессах, важном свойстве «отсутствия памяти»: P ($\eta \geq s+t \mid \eta \geq s$) = P ($\eta \geq t$).

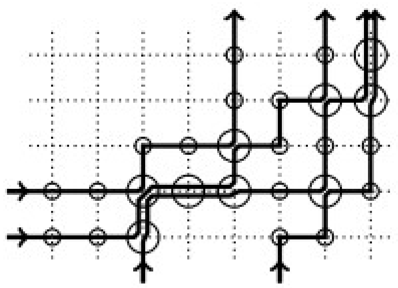
Далее, следует рассказать о том, что такое вообще 6-вершинная модель, что в простейшей модели в каждой вершине 2 потенциальных входа/выхода (в нашей модели уже не так) и выполняются правила Кирхгофа (количество входящих стрелок равно количеству исходящих или $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$).

Функция высоты на простейшем примере, вероятность допустимой конфигурации (вес конфигурации / стат.сумма).

Естественно, для выполнения этих условий, граничные условия или веса стрелок на границе должны задаваться отдельно.

6-вершинная модель высших спинов (high spin 6-vertex model)

Опр.: 6-вершинная модель высших спинов может рассматриваться как способ присвоения весов наборам верхних правых путей в конечной области Z^2 при определенных начальных условиях. Пример такого набора путей приведен на рис. ниже.



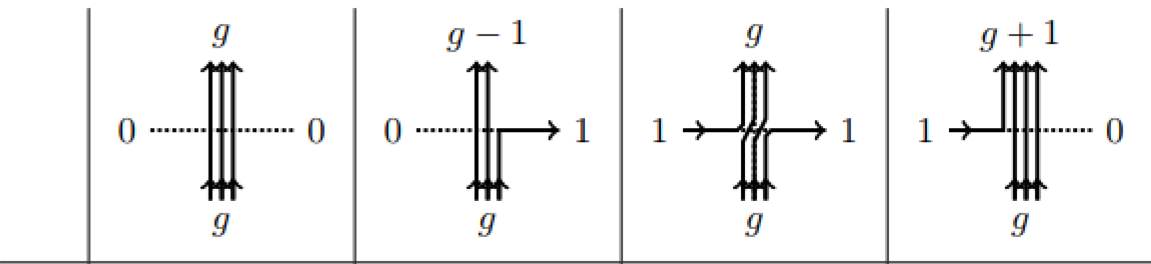
Вес набора путей равен произведению весов всех вершин, которые принадлежат путям.

Вес пустой вершины равен 1.

Таким образом, вес набора путей может эквивалентно определяться как произведение весов всех вершин в $\mathbb{Z}^2$.

На рисунке приведена верная конфигурация в области $\mathbb{Z}^2$.

Опр.: Вершинные веса рассчитываются таким образом: они зависят от двух фиксированных параметров *q* и *s* (вообще говоря, комплексных), а также от дополнительного спектрального параметра *u*.



w_u	$\dfrac{1-sq^g u}{1-su}$	$\dfrac{(1-s^2q^{g-1})u}{1-su}$	$\dfrac{u-sq^g}{1-su}$	$\dfrac{1-q^{g+1}}{1-su}$

Как видно, вес пустой вершины (0, 0, 0, 0) = 1, *g* – это любое целое неотрицательное число.

Сопряженные и стохастические веса

Сравнение двух близких версий для подсчета весов.

Введем q-символы Похгаммера и q-биномиальные коэффициенты:

$$(z,q)_n=\begin{cases}\Pi_{k=0}^{n-1}(1-zq^k) & ,n>0\\ 1 & ,n=0\\ \Pi_{k=0}^{-n-1}(1-zq^{n+k})^{-1} & ,n<0\end{cases}\qquad \binom{n}{k}_q:=\frac{(q,q)_n}{(q,q)_k(q,q)_{n-k}}$$

Тогда сопряженные веса будут определяться так:

$$w_u^c(i_1,j_1,i_2,j_2)=\frac{(s^2,q)_{i2}}{(q,q)_{i2}}\frac{(q,q)_{i1}}{(s^2,q)_{i1}}w_u(i_1,j_1,i_2,j_2)$$

Также определим L_u, как распределение вероятностей (заметим, что их сумма равна 1) по всем возможным конфигурациям выхода для определенной входящей конфигурации (i_1,j_1):

$$L_u(i_1,j_1,i_2,j_2):=(-s)^{j2}w_u^c(i_1,j_1,i_2,j_2)$$

Часть 2

Уравнение Янга-Бакстера в координатном представлении

Уравнения Янга-Бакстера имеет дело с весами двух вершин, связанных вертикальным ребром, со спектральными параметрами u_1, u_2:

$$w_{u1,u2}^{(m,n)}=\sum_{l\geq 0}w_{u1}(m,k_1,l,k'_1)w_{u2}(l,k_2,n,k'_2),k_1,k_2,k'_1,k'_2\in(0,1)$$

Определим также веса:

$$\widetilde{w}_{u1,u2}^{(m,n)}(k_1,k_2,k'_1,k'_2)=w_{u1,u2}^{(m,n)}(k_2,k_1,k'_2,k'_1)$$

Тогда уравнение Янга-Бакстера в координатном представлении примет вид (вывод в плане опущен, но будет приведен на конференции):

$\widetilde{w}_{u1,u2}^{(m,n)}=X\,w_{u1,u2}^{(m,n)}X^{-1}$, где матрица X зависит от u_1 и u_2, имеет вид:

$$X=\begin{pmatrix}u_1-qu_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & q(u_1-u_2) & (1-q)u_1 & 0\\ 0 & (1-q)u_2 & u_1-u_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_1-qu_2\end{pmatrix}$$

План доказательства: это соотношение может быть доказано напрямую перемножением

Уравнение Янга-Бакстера в операторном виде

Данная часть будет поделена с моей коллегой по докладу, как только мне удастся с ней связаться

Уравнение Я-Б может быть представлено в гораздо более удобном виде.
Пусть у нас есть векторное пространство V = span {e_i: i = 0, 1, 2, ... } и линейные операторы: A(u), B(u), C(u), D(u), заданные на этом пространстве, зависящие от спектрального параметра $u\in\mathbb{C}$, такие, что:

$$A(u)e_g=\frac{1-sq^g u}{1-su}e_g,B(u)e_g=\frac{1-q^{g+1}}{1-su}e_{g+1},D(u)e_g=\frac{u-sq^g}{1-su}e_g,C(u)e_g=\frac{1-s^2q^{g-1}}{1-su}e_{g-1}$$

Запишем все операторы в матрицу монодромии T(u):

$T(u)=\begin{pmatrix}A(u) & B(u)\\ C(u) & D(u)\end{pmatrix}$ T(u) можно рассматривать как оператор: $\mathbb{C}^2\otimes V\rightarrow\mathbb{C}^2\otimes V$, где $\mathbb{C}^2$ – вспомогательное пространство, а V – квантовое

Тогда уравнение Янга-Бакстера примет вид:

$$(T(u_1)\otimes T(u_2))=Y(T(u_2)\otimes T(u_1))Y^{-1},где\,Y=(X^{-1})^T$$