План доклада на майской школе, Н. Сафонкин

Симметрические рациональные функции как статсумма по путям. Симметрические функции Шура и Холла-Литтлвуда. Основные свойства. Тождество Коши.

Рассмотрим векторное пространство $V = \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_j$, где каждое пространство V_j является счетномерным с базисом $\{e_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. В пространстве V рассмотрим подпространство $\overline{V}^{fin}$ всех конечных или бесконечных линейных комбинаций разложимых тензоров, в каждом из которых не более чем конечное число сомножителей отлично от e_0. Базис такого пространства удобно параметризовать наборами целых неотрицательных чисел $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Более точно, запишем этот набор чисел в мультипликативной форме $\mu = 0^{m_0} 1^{m_1} \ldots$. Тогда набору μ соответсвует вектор $e_\mu = e_{m_0} \otimes e_{m_1} \otimes \ldots$. Такие наборы чисел длины N будем обозначать $Sign_N^+$. Определим $Sign^+ = \bigsqcup_{N \geq 0} Sign_N^+$.

На пространстве V рассмотрим операторы $A(u)$ и $B(u)$, которые действуют следующим образом на e_λ при $\lambda \in Sign_N^+$:

$$A(u) e_\lambda = \sum_{\mu \in Sign_N^+} weight_u(\lambda \to \mu) e_\mu \tag{1}$$

$$B(u) e_\lambda = \sum_{\mu \in Sign_{N+1}^+} weight_u((\lambda, -\infty) \to \mu) e_\mu \tag{2}$$

Символом $\lambda \to \mu$ обозначен единственный возможный набор путей на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, такой, что каждый из путей приходит в точку с координатой λ_i и выходит из точки μ_i.

Definition 0.0.1. Пусть $\lambda, \mu \in Sign^+$. Рациональные симметрические функции $F_{\lambda/\mu}(u_1, \ldots, u_n)$ и $G_{\lambda/\mu}(u_1, \ldots, u_n)$ определяются из следующих равенств

$$A(u_1) \cdot \ldots \cdot A(u_n) = \sum_{\mu \in Sign_N^+} G_{\lambda/\mu}(u_1, \ldots, u_n) e_\mu \tag{3}$$

$$B(u_1) \cdot \ldots \cdot B(u_n) = \sum_{\mu \in Sign_{N+n}^+} F_{\lambda/\mu}(u_1, \ldots, u_n) e_\mu \tag{4}$$

Из определения легко выводится следующее предложение.

Proposition 0.0.2. *1. Пусть $N, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda \in Sign_N^+,\ \mu \in Sign_{N+n_1+n_2}^+$. Тогда*

$$F_{\lambda/\mu}(u_1, \ldots, u_{n_1+n_2}) = \sum_{\varkappa \in Sign_{N+n_1}^+} F_{\mu/\varkappa}(u_{n_1+1}, \ldots, u_{n_1+n_2}) F_{\varkappa/\lambda}(u_1, \ldots, u_{n_1}) \tag{5}$$

2. Пусть $N, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda, \mu \in Sign_N^+$. Тогда

$$G_{\lambda/\mu}(u_1, \ldots, u_{n_1+n_2}) = \sum_{\varkappa \in Sign_N^+} G_{\mu/\varkappa}(u_{n_1+1}, \ldots, u_{n_1+n_2}) G_{\varkappa/\lambda}(u_1, \ldots, u_{n_1}) \tag{6}$$

Введем обозначение

$$c(\mu) = \prod_k \frac{(s^2; q)_{n_k}}{(q; q)_{n_k}}, \quad \mu = 0^{n_0} 1^{n_1} \ldots \in Sign^+ \tag{7}$$

$$F^c_{\lambda/\mu} = \frac{c(\lambda)}{c(\mu)} F_{\lambda/\mu}, \quad G^c_{\lambda/\mu} = \frac{c(\lambda)}{c(\mu)} G_{\lambda/\mu} \tag{8}$$

При помощи уравнения Янга-Бакстера будет доказана следующая

Theorem 0.0.3 (Тождество Коши). *Пусть для каждой пары индексов i, j и наборов чисел $u_1, \dots, u_M \in \mathbb{C}$, $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{C}$ выполнено*

$$\left| \frac{u_i - s}{1 - su_i} \cdot \frac{v_j - s}{1 - sv_j} \right| < 1 \tag{9}$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{\varkappa \in Sign^+} G^c_{\varkappa/\lambda}(v_1, \dots, v_N) F_{\varkappa/\mu}(u_1, \dots, u_M) = \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} \frac{1 - qu_iv_j}{1 - u_iv_j} \sum_{\varkappa \in Sign^+} F_{\lambda/\varkappa}(u_1, \dots, u_M) G^c_{\mu/\varkappa}(v_1, \dots, v_N) \tag{10}$$

Из этой теоремы мы выведем простые следствия.

Обозначим $F_{\lambda/(0,\dots,0)} = F_\lambda$ и $G_{\lambda/(0,\dots,0)} = G_\lambda$.

Corollary 0.0.4. 1. *Пусть $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \in Sign^+_N$ и $v, u_1, \dots, u_N \in \mathbb{C}$ такие, что выполняется условие 9. Тогда*

$$\sum_{\varkappa \in Sign^+_N} G^c_{\varkappa/\lambda}(v) F_\varkappa(u_1, \dots, u_N) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - qu_iv}{1 - u_iv} F_\lambda(u_1, \dots, u_N) \tag{11}$$

2. *Пусть $N, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \in Sign^+_N$ и $u, v_1, \dots, v_N \in \mathbb{C}$ такие, что выполняется условие 9. Тогда*

$$\sum_{\varkappa \in Sign^+_{N+1}} G^c_\varkappa(v_1, \dots, v_n) F_{\varkappa/\lambda}(u) = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - su} \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - quv_j}{1 - uv_j} G^c_\lambda(v_1, \dots, v_n) \tag{12}$$

3. *Пусть $N, M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и наборы чисел $u_1, \dots, u_M \in \mathbb{C}$, $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{C}$ удовлетворяют 9. Тогда*

$$\sum_{\lambda \in Sign^+_M} F_\mu(u_1, \dots, u_M) G^c_\lambda(v_1, \dots, v_N) = \frac{(q;q)_M}{\prod_{i=1}^{M}(1 - su_i)} \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} \frac{1 - qu_iv_j}{1 - u_iv_j} \tag{13}$$

Следующая теорема будет сформулирована без доказательства.

Theorem 0.0.5. 1. *Пусть $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in Sign^+_M$. Тогда*

$$F_\mu(u_1, \dots, u_M) = \frac{(1-q)^M}{\prod_{i=1}^{M}(1 - su_i)} \sum_{\sigma \in S_M} \sigma \left(\prod_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq M} \frac{u_\alpha - qu_\beta}{u_\alpha - u_\beta} \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{u_i - s}{1 - su_i} \right)^{\mu_i} \right) \tag{14}$$

2. *Пусть $n \geq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in Sign^+_n$. Обозначим число нулей в μ через k. Тогда $\forall N \geq n - k$*

$$G_\mu(v_1, \dots, v_N) = \frac{(s^2;q)_n}{(q;q)_{N-n+k}(s^2;q)_k} \frac{(1-q)^N}{\prod_{j=1}^{N}(1 - sv_j)} \times$$

$$\times \sum_{\sigma \in S_N} \sigma \left(\prod_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq M} \frac{u_\alpha - qu_\beta}{u_\alpha - u_\beta} \prod_{j=1}^{n-k} \left(\frac{v_j - s}{1 - sv_j} \right)^{\mu_j} \prod_{i=1}^{n-k} \frac{v_i}{v_i - s} \prod_{j=n-k+1}^{N} (1 - sq^k v_j) \right) \tag{15}$$

На основании этой теоремы будет объяснена связь функций $F_{\lambda/\mu}$ и $G_{\lambda/\mu}$ с полиномами Шура и Холла-Литтлвуда.