План Доклада, Дубна 2019, Рыбин Дмитрий

Определение: Левоинвариантная мера Хаара на группе Ли - это мера μ на некоторой сигма-алгебре множеств $\mathfrak{B}$(содержащей компактные), для которой верно $\mu(gA) = \mu(A)$ для любых $A \in \mathfrak{B}$, $g \in G$. Если группа компактна, то меру можно отнормировать, положив $\mu(G) = 1$.
Для конечной группы такая мера всегда есть: $\mu(g) = \frac{1}{|G|}$. Для компактной группы Ли можно её получить, если взять форму $\omega \in \Lambda^{\dim G}(T_eG)^*$ и разнести левыми сдвигами.
Пример: Для U_1 подходит мера $\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}$. Для $GL(1)$ подходит $\frac{\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi}{r}$.
Для конечной группы имеется "среднее арифметическое" всех элементов: $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g$, его аналогом на компактной группе является оператор "усреднения т.е. интегрирования по всей группе по мере Хаара:

$$\int\limits_G g.(-)\mathrm{d}\mu(g) \tag{1}$$

где μ - Левоинвариантная мера Хаара на группе, $g.$ - действие группы на любом тензоре (для этого надо чтобы тензор был связан с каким-либо представлением V группы G), который можно поставить вместо $(-)$.
Например, имея невырожденную билинейную форму B на представлении V, мы можем записать действие группы: $(g.B)(u,v) = B(g^{-1}.u, g^{-1}.v)$, и получить усреднением инвариантную форму:

$$B_{inv}(u,v) = \int\limits_G (g.B)(u,v)\mathrm{d}\mu(g) \tag{2}$$

Утверждение: это действительно инвариантная форма.
В теории представлений конечных групп имея такой объект выводят, что для каждого подпредставления имеется ортогональное дополнение, являющееся подпредставлением. Для компактных групп дело обстоит точно также.
Теорема: Все конечномерные представления компактной группы Ли вполне приводимы.
Определение: Характер представления $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ - это отображения $\chi_V : G \to \mathbb{C}$, определённое как $\chi_V(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$.
Аналогично случаю конечных групп, на характерах есть скалярное произведение, есть Лемма Шура для неприводимых представлений, и след-

ствие из неё: $(\chi_V, \overline{\chi_W}) = 1$ для неприводимых представлений V, W эквивалентно тому, что они равны, поэтому характер (который является функцией на классах сопряжённости) определяет представление однозначно.
Замечание: Для конечных групп характеры были базисом всех функций на классах, для компактных групп Ли необходимы уточнения этой формулировки, при уточнениях она становится верной.

Определение: (Геометрический) тор в группе Ли - это связая абелева компактная подгруппа Ли.
Замечание: Есть понятие алгебраического тора, это подгруппа, изоморфная $(\mathbb{C}^*)^m$, она не компактна.
Явный вид тора в GL_n и U_n - это все матрицы с комплексными числами модуля 1 на диагонали.
Теорема:(без док-ва) Все максимальные (по включению) торы в компактной группе Ли сопряжены и имеют одну и ту же размерность.
Следствие: Представление U_n определяется своим ограничением на максимальный тор. Док-во: Любой элемент сопряжён элементу из выбранного максимального тора, но тогда характер представления определён характером тора, а характер определяет представление однозначно.
Теперь видно, что нам надо определить какими могут быть характеры тора и какие из них появляются как характеры представлений группы U_n.
Теорема: Все неприводимые представления тора одномерны. Характер такого представления задаётся набором из $\dim\mathbb{T}$ целых чисел $(k_1, ..., k_{\dim\mathbb{T}})$. При этом действие элемента $(z_1, ...z_{\dim\mathbb{T}})$ на векторе v определено как: $z_1^{k_1} \cdot ... \cdot z_{\dim\mathbb{T}}^{k_{\dim\mathbb{T}}} v$.

Теорема: Имеется $1-1$ соответствие голоморфных неприводимых представлений GL_n и неприводимых представлений U_n.
Док-во: $\mathrm{Lie(GL_n)} \cong \mathrm{Lie(U_n)}_{\mathbb{C}}$.
Определение: Группа Вейля W максимального тора $\mathbb{T}$ - это группа его автоморфизмов, являющихся сопряжениями элементами из группы Ли G.
(вариативно) **Теорема:** Группы Вейля для GL_n и U_n это S_n.
(Возможное, но необязательное напоминание) **Теорема:** Имеется соответствие (неприводимых) представлений связной группы Ли и её алгебры посредством отображения $\mathrm{d}\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{end}(\mathrm{V})$, строящееся по $\pi : G \to GL(V)$.

Теорема: Характеры группы Ли, ограниченные на максимальный тор $\mathbb{T}$ инвариантны относительно его группы Вейля. Док-во: из определения группы Вейля.
Следствие: Характеры U_n должны быть из $\mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, ..., z_n, z_n^{-1}]^{S_n}$.
Определим для невозрастающего набора целых неотрицательных чисел $(k_1, ..., k_n)$ симметрический многочлен $m_{(k_1,...,k_n)} \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]^{S_n}$, равный просто сумме $\sum\limits_{\sigma \in S_n} z_1^{k_{\sigma(1)}} \cdot ... \cdot z_n^{k_{\sigma(n)}}$, отнормированный так, чтобы все коэффициенты были равны 1. Тогда эти многочлены образую базис пространства всех симметрических из соображений лексикографического порядка.

Пример: Стандартное представление U_n на $V = \mathbb{C}^n$, его характер это $z_1 + ... + z_n = m_{(1,0,0,...)}$, где z_i - диагональные элементы тора.
Определение: Говорят, что представление U_n имеет старший вес $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_\ell)$, если при ограничении на максимальный тор, представление распадается в прямую сумму неприводимых, и λ - это старший в лексикографическом порядке набор целых чисел, для которого имеется это представление максимального тора.
Теорема: Старший вес для $\mathrm{S}^k V$ это $m_{(k,0,0,...,0)}$, для $\Lambda^k V$ это $m_{(1,1,...,1,0,...,0)}$.
Следствие: Представление $\Lambda^n V$, называющееся детерминантным, имеет старший вес $(1, 1, ..., 1)$ и является одномерным.
Старший вес тензорного произведения представлений - это сумма старших весов.

Теорема: Любой невозрастающий набор целых чисел $(k_1, ...k_\ell)$ для U_n является старшим для подходящей тензорной комбинации внешних степеней стандартных представлений и целой степени det (который позволяет получить отрицательные степени в полиномах Лорана).

Док-во: Веса соответствуют S_n-инвариантным функциям на торе, то есть симметрическим полиномам Лорана - $\mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, ..., z_n, z_n^{-1}]^{S_n}$. Следовательно, старший вес для любого конечномерного представления U_n имеет вид $m_{(k_1,...,k_n)}$, здесь уже целые невозрастающие числа. Умножив тензорно на положительную степень детерминантного представления, получим $m_{(k'_1,...,k'_n)} \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]^{S_n}$, теперь утверждение следует из того, что старший(относ. лексикографического порядка) моном в произведении $m_{(t_1,...,t_n)} \cdot m_{(r_1,...,r_n)}$ равен $m_{(r_1+t_1,...,r_n+t_n)}$, и что из наборов чисел $(1,1,...,1,0,...,0)$ можно сложениями получить любой неубывающий.

Примеры: $V^{\otimes 2} \cong \mathrm{S}^2 V \oplus \Lambda^2 V$.
Действие GL_n на Mat_n умножением слева: $Mat_n \cong V^{\oplus n}$
Действие GL_n на однородных степени d многочленах от n переменных - это $S^d V$.