# 1 План Дубна. Тода 5

**Представление Лакса для цепочки Тоды** $2\times 2$ Напишем матрицу Лакса для цепочки Тоды в виде $T(u) = l_n(u)...l_2(u)l_1(u)$, где $l_j(u) = \begin{pmatrix} u - p_j & -e^{-x_j} \\ e^{x_j} & 0 \end{pmatrix}$

Для скобок Пусона имеется $r$-матричная структура

$$\{T_1(u), T_2(v)\} = [r_{12}(u-v), T_1(u)T_2(v)] \tag{1}$$

где $r_{12}(u_1-u_2) = \dfrac{P_{12}}{(u_1-u_2)}$, где $P_{12}$ оператор перестановки.

Заметим, что в отличае от $n\times n$. Скобка квадратичная. Она удовлетворяет слудующему условию. Если $\{A_1(u), A_2(v)\} = [r_12, A_1(u)A_2(v)]$ и $\{B_1(u), B_2(v)\} = [r_12, B_1(u)B_2(v)]$, при этом $\{A_i(u), B_j(v)\} = 0$, то $\{A_1(u)B_1, A_2B_2(v)\} = [r_12, A_1B_1(u)A_2B_2(v)]$

$$\begin{aligned}\{A_1(u)B_1, A_2B_2(v)\} = A_1(u)A_2(u)\{B_1(u), B_2(v)\} + \{A_1(u), A_2(u)\}B_1(u)B_2(v) = \\ = A_1(u)A_2(u)[r_{12}, B_1(u)B_2(v)] + [r_{12}A_1(u)A_2(u)]B_1(u)B_2(v) = [r_{12}, A_1B_1(u)A_2B_2(v)]\end{aligned}$$

Проверим, что $\{l_{(1)}(u), l_{(2)}(v)\} = [r_{12}, l_{(1)}(u)l_{(2)}(v)]$(тут нижний индекс означает пространство в котором мы действуем, а не номер матрицы, поэтому для данного примера мы взяли его в скобки. я могу на доске написать и сверху). Действительно правая часть равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(u-p)(v-p)-(u-p)(v-p)}{u-v} & \dfrac{(v-p)e^{-x}-(u-p)e^{-x}}{u-v} & \dfrac{(u-p)e^{-x}-(v-p)e^{-x}}{u-v} & \dfrac{e^{-2x}-e^{-2x}}{u-v} \\ \dfrac{(u-p)e^{x}-(v-p)e^{x}}{u-v} & 0 & \dfrac{-1+1}{u-v} & 0 \\ \dfrac{(v-p)e^{x}-(u-p)e^{x}}{u-v} & \dfrac{1-1}{u-v} & 0 & 0 \\ \dfrac{e^{2x}-e^{2x}}{u-v} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-x} & e^{-x} & 0 \\ e^{x} & 0 & 0 & 0 \\ -e^{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Что действительно отвечает скобкам Пуассона $\{p, x\} = 1$

Кроме того $\{\mathrm{tr}L^r(u), \mathrm{tr}L^k(v)\} = 0$. Действительно

$$\begin{aligned}\{\mathrm{tr}_1L_1^r(u), \mathrm{tr}_2L_2^k(v)\} = krL_1^{r-1}(u)L_2^{k-1}(v)\{\mathrm{tr}_1L_1(u), \mathrm{tr}_2L_2(v)\} = \\ = krL_1^{r-1}(u)L_2^{k-1}(v)\mathrm{tr}_{12}[r_{12}, L_1(u)L_2(v)] = 0\end{aligned}$$

Таким образом мы видим, что в существует $n$ интегралов движения, коммутирующих с Гамильтонинаном (включая его самого), являющихся коэффициентами при степенях $u$. Можно видеть, что коэффициент при $u^{n-2}$ и является Гамильтонианом. Действительно, для цепочки из двух частиц имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}l_2(u)l_1(u) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} u-p_2 & -e^{-x_2} \\ e^{x_2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-p_1 & -e^{-x_1} \\ e^{x_1} & 0 \end{pmatrix} = \\ = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} u^2 - u(p_1+p_2) + p_1p_2 - e^{-x_2+x_1} & -e^{-x_1}(u-p_2) \\ (u-p_1)e^{x_2} & -e^{-x_1+x_2} \end{pmatrix} = \\ = u^2 - u(p_1+p_2) - (-p_1p_2 + e^{x_2-x_1} + e^{x_1-x_2}) = u^2 + H_{n=2}\end{aligned}$$

Где в последнем равенстве мы учли, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 0$. Что означает, что мы просто выбрали систему отсчета, связанную с центром масс.

**Спектральная дуальность представлений $2 \times 2$ и $n \times n$** Вообще имеет место более общее утверждение, связывающее коэффициенты характеристического многочлена матрицы Лакса $L(v)$ размера $n \times n$ и матрицы Лакса $T(u)$ размера два на два, а именно.

$$v(-1)^{n-1}\det(u - L(v)) = det(v - T(u)) \tag{2}$$

Докажем это утверждение.

Для начала нам нужно будет обернуть матрицы $l_j$ диагональными матрицами, а именно рассмотрим $l'_j(u) = D_j^{-1} l_j(u) D_{j-1}$, где $D_j = \mathrm{diag}(e^{-(1/2)x_{i+1}}, e^{(1/2)x_i})$ $(D_0 = D_n)$, тогда имеем

$$l'(u) = \begin{pmatrix} e^{(1/2)(x_{j+1}-x_j)}(u - p_j) & -e^{-(1/2)(2x_j - x_{j+1} - x_{j+1})} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что при таком преобразовании матрица Лакса перейдет в $T'(u) = D_n^{-1} T D_n$, то есть спектр матрицы не поменяется.

Построим собственный вектор для $2 \times 2$ матрицы Лакса с собственным значением $v$: $\theta = \theta_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ и начнем последовательно действовать на него $l_j$, обозначив $\theta_{j+1} = l'_j(u)\theta_j$. Или в координатах

$$\begin{pmatrix} \phi_{j+1} \\ \psi_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1/2)(x_{j+1}-x_j)}(u - p_j) & -e^{-(1/2)(2x_j - x_{j+1} - x_{j+1})} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_j \\ \psi_j \end{pmatrix} \tag{3}$$

Условие, что $\theta_1$ собственный означает, что $\theta_{n+1} = v\theta_1$ Таким образом имеем систему линейных уравнений на $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ и $\{\psi_k\}_{k=1}^n$:

$$u\phi_j = e^{1/2(x_j - x_{j+1})}\phi_{j+1} + p_j\phi_j + e^{1/2(x_{j-1}-x_j)}\psi_j \quad j < n \tag{4}$$

$$u\phi_n = ve^{1/2(x_n - x_1)}\phi_1 + p_n\phi_n + e^{1/2(x_{n-1}-x_n)}\psi_n \tag{5}$$

$$\psi_{j+1} = \phi_j \quad j < n \tag{6}$$

$$v\psi_1 = \phi_n \tag{7}$$

Выразим $\psi_j$ из этой системы и получим

$$u\phi_1 = e^{1/2(x_1 - x_2)}\phi_2 + p_1\phi_1 + v^{-1}e^{1/2(x_n - x_1)}\phi_n \tag{8}$$

$$u\phi_j = e^{1/2(x_j - x_{j+1})}\phi_{j+1} + p_j\phi_j + e^{1/2(x_{j-1}-x_j)}\phi_{j-1} \quad 1 < j < n \tag{9}$$

$$u\phi_n = ve^{1/2(x_n - x_1)}\phi_1 + p_n\phi_n + e^{1/2(x_{n-1}-x_n)}\phi_{n-1} \tag{10}$$

Заметим теперь, что подобную систему теперь можно переписать в матричном виде но уже на $n$-мерный вектор $\Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ ... \\ \phi_n \end{pmatrix}$, а именно:

$L(v)\Phi_n = u\Phi_n$, где

$$L(v) = \begin{pmatrix} p_1 & e^{(1/2)(x_1-x_2)} & 0 & .... & 0 & v^{-1}e^{(1/2)(x_n-x_1)} \\ e^{(1/2)(x_1-x_2)} & p_2 & e^{(1/2)(x_2-x_3)} & ... & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ ve^{(1/2)(x_n-x_1)} & 0 & .... & 0 & e^{1/2(x_{n-1}-x_n)} & p_n \end{pmatrix}$$

Которая и есть матрица Лакса для замкнутой Тоды $n \times n$

Таким образом, по собственному вектору матрицы $T(u)$ с собственным значеним $v$ мы построили собственный вектор матрицы $L(v)$ с собственным значением $u$. Мы можем проделать процедуру в обратную сторону. А именно стартовав в $\Phi_n$, вводя $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ мы можем получить вектор $\theta_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ v^{-1}\phi_n \end{pmatrix}$.

Заметим, что в (2) мы с правой и левой стороны имеем выражения полиномиальные по $u, v$. С лидирующими членами $(-1)^n(vu^n + (-1)^{n-1}v^2)$ Этот вид очевиден из разложения матриц. Заметим теперь, что у двух этих полиномов совпадают нули. Действительно, по доказанному нами выше, если в левом выражении возник ноль, то это значит, что существует такой вектор $(L(v) - u)\Phi_n = 0$, но по нему мы можем построить вектор $\theta_1$ такой, что $(T(u) - v)\theta = 0$, а значит и у правой части в этом месте тоже ноль. Обратное аналогично. Если вознкает ноль с какой-то кратностью, то значит существует несколько нулевых векторов на одной части и по ним мы можем построить несколько векторов на другой части. Это значит, что отношение правой и левой части является функцией без полюсов везде, то есть константой. Но мы знаем, что ее асимптотики по $u$ и $v$ стремятся к единице, а значит вся функция равна единице.

**Разделение переменных** Мы хотим построить пары переменных, для которых бы вся динамика разбивалась бы на $n$ одномерных задач. Заметим, что с этой целью подойдет любая точка на спектральной кривой. То есть точке $(u, v)$ такой что $\det(T(u) - v) = 0$. Стоящая слева функция является функцией от двух переменных и интегралов движения, которые сохраняются при эволюции по времени. Мы можем включить эволюцию по любому из времен и тогда из условия равенства нулю детерминанта, получим уравнение, связывающее $\dot{u}$ и $\dot{v}$.

Мы можем проделать подобную процедуру для любых точек, на кривой, однако, нам бы хотелось выбрать такие, для которых получаемая Пуассонова структура имела бы наипростейший вид как у импульсов и координат (или экспонент от координат)

Для этого рассмотрим матрицу Лакса в виде $T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$ $B(u)$-полином степени $n-1$ по $u$. Обозначив его нули $u_k(\{p\}, \{x\})$. Они являются функциями от $\{p\}, \{x\}$. В нашем примере с цепочкой для двух частиц $u_1 = p_2 = p$. Всего нулей $n-1$ что согласуется с тем, что мы сказали выше о том, что сидим в системе отсчета центра масс и поэтому должны рассмотривать эффективно не $2n$ мерное фазовое пространство, а $2(n-1)$ мерное.

В качестве вторых пар координат возьмем $v_k = A(u_k)$. Действительно, в точках $u_k$ матрица Лакса верхнетреугольная, поэтому в них существует собственный вектор с подобным значением, что означает, что точка действительно лежит на спектральной кривой.

Из квадратичной $r$-матричной скобки следует, что $\{A(u), A(v)\} = \{B(u), B(v)\} = 0$. Из последне равенства следует, так как $u_k$ выражается через коэффициенты $B(u)$, что $\{u_k, u_l\} = 0$ Кроме того заметим, что для любого полинома $P(u)$ имеющего в своих коэффициентах функции от $x$ и $p$ и произвольной функции координат и импульсов $F$ имеется следующая формула

$$\{F, P(u_k)\} = \{F, P(u)\}|_{u=u_k} + \{F, u_k\}P'(u_k) \tag{11}$$

где $P'(u_k) = \partial_u P(u_k)$

Действительно, для этого достаточно рассмотреть рассмотреть $u_k$ как сложную функцию. $P(u_k) = P(u_k(\{p\}, \{x\}); \{p\}, \{x\})$. Тогда, так как $B(u_k) = 0$ мы имеем

$$0 = \{A(u), B(u_k)\} = \{A(u), B(u')\}|_{u'=u_k} + \{A(u), u_k\}B'u_k$$

Используя квадратичную скобку, а именно $\{A(u), B(v)\} = \dfrac{A(u)B(v) - B(v)A(u)}{u - v}$. получим

$$\{A(u), u_k\} = \frac{B(u)v_k}{B'(u)(u-u_k)}$$

Воспольуемся этим что бы сосчитать скобку $\{u_k, v_l\}$:

$$\{u_k, v_l\} = \{u_k, A(u_l)\} = \{u_k, A(u)\}|_{u=u_l} = -\delta_{kl}v_k$$

Где мы раскрыли неопределенность по Лопиталю.

Осталось найти $\{v_k, v_l\}$

$$\{v_k, v_l\} = A'(u_k)\{u_k, A(u)\}|_{u=u_l} + A'(u_l)\{A(u), u_l\}|_{u=u_k} = 0$$