Гамильтоновы системы с симметриями

Михаил Пирогов

1 Обзор литературы

1. В книгу Переломов [1990] стоит заглянуть, чтобы получить общее представление об отображении момента и редукции. Не стоит искать там аккуратных доказательств.

2. Книга В.И. Арнольд [2000] содержит больше доказательств. Она более математична, но всё ещё написана сжато — тоненькая ведь.

3. В книге Д. Макдафф [2012] доказано почти всё, но она довольно трудная. Детали придётся додумывать самостоятельно. Там есть множество примеров чисто математического характера. Большая часть книги посвящена, собственно, симплектической топологии.

4. Книга V. Guillemin [1984] содержит множество интересных вещей про симплектическую науку и её связь с физикой. В частности, почти всё про отображение момента и редукцию доказано. Первая глава по духу физическая, остальные — математические. Читается не очень быстро, авторы любят писать содержательные рассуждения прямо в тексте, не выделяя их в отдельные блоки.

5. Lee [2002] — универсальная толстая книга про гладкие многообразия. Написана *исключительно* понятно и аккуратно.

6. Jerold E. Marsden [2002] — универсальная толстая книга про симплектические/пуассоновы структуры и симметрию в механике. В ней тоже всё доказывается, причём обычно в более общих формулировках — для пуассоновых многообразий.

2 Откуда берётся симплектическая структура

Многие механические системы описываются уравнениями Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где p_i — обобщённые импульсы, а q_i — обобщённые координаты. Сформулируем три естественных желания:

1. Изучать движение в фазовом пространстве, а не в конфигурационном (видно же, что координаты и импульсы в уравнениях играют близкие роли!)

2. Записать уравнения Гамильтона компактно.

3. Использовать только простейший векторный анализ (как будто мы в XIX веке).

Нам подойдёт такая форма записи:

$$\dot{x} = J\nabla H,$$

где

$$x = (p,\, q)^T, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

В индексной записи это уравнение выглядит так:

$$\dot{x}^i = J^i_j\, \partial^j H.$$

Известно, что для абстрактного многообразия без дополнительной структуры градиент определить нельзя — можно ввести лишь дифференциал функции, который для H имеет координаты $\partial_j H$. Градиент делается из него с помощью подъёма индексов, т.е. изоморфизма, задаваемого римановой метрикой. Поэтому естественно будет опустить индекс j в нашем уравнении, пользуясь обычной евклидовой метрикой. Прежде, чем делать это, перенесём матрицу J в левую часть[1], положив $\Omega = J^{-1}$:

$$\Omega^j_i \dot{x}^i = \partial^j H \;\Rightarrow\; \delta_{kj}\Omega^j_i \dot{x}^i = \delta_{kj}\partial^j H \;\Rightarrow\; \boxed{\Omega_{ki}\dot{x}^i = \partial_k H}.$$

С точки зрения координат опускание и поднимание индексов — вещи чисто формальные, поскольку метрика евклидова. Координаты ни у чего не изменились.

Представим себе теперь, что Ω — матрица некоторой билинейной формы ω. Тогда полученный ответ можно переписать, как

$$\boxed{\omega(\bullet,\, X_H) = \mathrm{d}H},$$

где X_H — векторное поле, в каждой точке $(p,\, q)$ равное фазовой скорости системы. Для этой системы форма ω и будет *симплектической формой*, а векторное поле X_H называют *гамильтоновым векторным полем*, соответствующим гамильтониану H.

Определение 1. Пусть M — гладкое многообразие. Гладкую 2-форму ω на нём называют *симплектической*, если она удовлетворяет трём условиям:

1. *Кососимметричность*, т.е. $\omega(X,\, Y) = -\omega(Y,\, X)$ для любых $X,\, Y \in \mathrm{Vect}\, M$.

2. *Невырожденность*, т.е. отображение $X \mapsto \omega(\bullet,\, X)$ задаёт изоморфизм из $\mathrm{Vect}\, M$ в $\Omega^1 M$.

3. *Замкнутость*, т.е. $\mathrm{d}\omega = 0$.

Определение 2. *Гамильтоновым векторным полем*, соответствующим гамильтониану H, называют такое поле X_H, что $\omega(\bullet,\, X_H) = \mathrm{d}H$.

Первое свойство отражает тот факт, что в половине уравнений Гамильтона есть минус. Второе позволяет по любому гамльтониану построить единственное гамильтоново векторное поле. Третье обеспечивает выполнение вот такого замечательного факта:

Теорема 1. Поток поля X_H сохраняет форму ω, т.е. $L_{X_H}\omega = 0$.

Доказательство.

$$L_{X_H}\omega = \mathrm{d}i_{X_H}\omega + i_{X_H}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\mathrm{d}H = 0.$$

□

Следствие 1. Поток поля X_H сохраняет *фазовый объём*, определяемый формой ω^n.

Замечание 1. Таким образом, третье свойство в определении симплектической формы позволяет выполниться классической *теореме Лиувилля* из гамильтоновой механики.

[1] Если этого не делать, мы придём не к симплектической структуре, а к пуассоновской.

3 Отображение момента

Определение 3. Назовём векторное поле X на симплектическом многообразии M *симплектическим* или *локально гамильтоновым*, если форма $\omega(\bullet, X)$ замкнута.

Замечание 2. Ясно, что поле является гамильтоновым для некоторого гамильтониана тогда и только тогда, когда форма $\omega(\bullet, X)$ точна. Алгебру Ли гамильтоновых векторных полей будем обозначать через $\mathrm{Ham}\, M$, а локально гамильтоновых — через $\mathrm{LHam}\, M$.

Утверждение 1. Векторное поле X является локально гамильтоновым тогда и только тогда, когда его поток сохраняет симплектическую структуру.

Утверждение 2. Пусть группа Ли G действует на M симплектоморфизмами. При этом возникает гомоморфизм $\mathfrak{g} \to \mathrm{LHam}\, M$. Действие называют *гамильтоновым*, если

1. Для любого $a \in \mathfrak{g}$ его образ X_a — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H_a.
2. Гамильтонианы H_a можно выбрать так, что $\{H_a, H_b\} = H_{[a,b]}$.

Замечание 3. В общем случае $\{H_a, H_b\} = H_{[a,b]} + C(a, b)$. От $C(a, b)$ можно гарантированно избавиться, если вторые когомологии алгебры $\mathfrak{g}$ обращаются в ноль. Если у $\mathfrak{g}$ нет ещё и первых когомологий, то H_a находятся однозначно. Точно также не возникнет проблем и с $\mathrm{Ham} \neq \mathrm{LHam}$, если у M нет первых когомологий де Рама. Про все эти вещи чудесно написано в V. Guillemin [1984]; в том числе определены когомологии алгебр Ли.

Определение 4. *Отображением момента* называют $P\colon M \to \mathfrak{g}^*$, заданное правилом

$$P(m)[a] = H_a(m).$$

Теорема 2 (Эквивариантность)**.** Пусть G — связная группа Ли, действующая на симплектическом многообразии M. Тогда её гамильтоново действие при отображении момента μ переходит в коприсоединённое представление, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi_g} & M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*(g)} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Доказательство. См. Д. Макдафф [2012]. или V. Guillemin [1984]. □

Следствие 2. Отображение момента является интегралом движения для G-инвариантного гамильтониана.

Теорема 3. Пусть G действует на многообразии V. Тогда поднятие действия на $M = T^*V$ гамильтоново.

Доказательство. Смотрите, например, В.И. Арнольд [2000]; на самом деле, в этой ситуации $\omega = \mathrm{d}\alpha$, где α — каноническая 1-форма на кокасательном расслоении, и $H_\xi = \alpha(X_\xi)$. □

Пример 1. Стандартное действие $SO(3)$ на $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$, см. Переломов [1990] или Д. Макдафф [2012]. Если правильно отождествить $\mathfrak{so}(3)^*$ с $\mathbb{R}^3$, то отображение момента будет действовать по формуле

$$\mu(p, q) = q \times p.$$

4 Симплектическая редукция

Пример 2. Этот пример стоит читать параллельно с общей схемой, он делает всё понятнее. Он полностью взят из книжки Переломов [1990].

Пусть

$$M = \{(p,\, q)\colon p,\, q \in \mathbb{R}^3\}, \quad H = \frac{p^2}{2} + U\big(|q|\big).$$

Действие $SO(3)$ берём из примера 1. Гамильтониан относительно него инвариантен, поэтому компоненты отображения момента — интегралы движения:

$$\begin{aligned} l_1 &= q_2 p_3 - q_3 p_2, \\ l_2 &= q_3 p_1 - q_1 p_3, \\ l_3 &= q_1 p_2 - q_2 p_1. \end{aligned}$$

Можно было бы ожидать, что три интеграла позволят понизить размерность пространства на 6, но они не совсем независимые, поэтому выйдет лишь на 4.

Зафиксируем значение момента l (и определим тем самым подмногообразие $\tilde{M}_l$, выберем координаты так, чтобы вектор l был параллелен оси x_3. Тогда $\tilde{M}_l$ задаётся уравнениями

$$\begin{aligned} 0 &= q_2 p_3 - q_3 p_2, \\ 0 &= q_3 p_1 - q_1 p_3, \\ \lambda &= q_1 p_2 - q_2 p_1. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что $q_3 = p_3 = 0$, и можно оставить лишь две степени свободы $(q_1,\ p_1,\ q_2,\ p_2)$ с дополнительным условием $q_1 p_2 - q_2 p_1 = \lambda$. Эта задача обладает дополнительной инвариантностью относительно плоских вращений, поэтому разумно перейти в полярные координаты:

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos\varphi, \quad p_1 = p_r \cos\varphi - \frac{p_\varphi}{r}\sin\varphi, \\ q_2 &= r\sin\varphi, \quad p_2 = p_r \sin\varphi + \frac{p_\varphi}{r}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Условие $q_1 p_2 - q_2 p_1 = \lambda$ теперь принимает вид

$$p_\varphi = \lambda,$$

т.е. p_φ — интеграл движения, и H не зависит от φ. Редуцированный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right) + U(r),$$

а зависимость φ от времени находится из уравнения

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\lambda}{r^2}.$$

Теперь можно перейти к описанию общей схемы. Пусть дано гамильтоново действие связной G на многообразии M и отображение момента $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$. Зафиксируем какое-нибудь c — регулярное значение μ. Тогда $\tilde{M}_c = \mu^{-1}(c)$ является подмногообразием.

Утверждение 3. Элемент $g \in G$ оставляет на месте $\tilde{M}_c$ тогда и только тогда, когда $g \in G_c = \operatorname{Stab} c$ относительно коприсоединённого представления.

Доказательство. Это следует из теоремы 2. □

Теперь мы находимся в ситуации, которую уже видели в примере: значение момента уже выбрано, но симметрия использована не до конца. Хочется теперь профакторизовать $\tilde{M}_c$ по действию G_c. Для этого надо накладывать дополнительные условия на действие:

Теорема 4. Пусть группа G_c действует на M *гладко*, *свободно* и *собственно*. Тогда пространство орбит M/G_c — топологическое многообразие размерности $\dim M - \dim G_c$, причём на нём есть единственная гладкая структура такая, что естественная проекция

$$\pi\colon M \to M/G_c$$

является гладкой субмерсией.

Доказательство. См. Lee [2002]. □

Определение 5. Полученное после факторизации многообразие $M_c = \tilde{M}_c/G$ называют *приведённым фазовым пространством.*

Теорема 5. На M_c есть естественная симплектическая структура, и отображение $\pi\colon M \to M_c$ уважает симплектическую структуру.

Определение 6. Если на M есть инвариантный относительно G гамильтониан H, можно построить по нему поле X_H и спустить вниз. Полученное поле $\pi_* X_H$ называют *приведённым полем*.

Теорема 6. Приведённое поле на фазовом пространстве гамильтоново. Значение функции Гамильтона приведённого поля в какой-либо точке приведённого фазового пространства равно значению исходной функции Гамлильтона в соответствующей точке исходного фазового пространства.

Замечание 4. Нетрудно увидеть, что $\dim M_c = \dim M - \dim G - \dim G_c$. В примере 2 $G_l = SO(2)$, поэтому

$$\dim M_c = 6 - 3 - 2 = 1.$$

Замечание 5. Если прочитать про симплектические фактормногообразия в книге Д. Макдафф [2012], можно понять примерную схему доказательства последних двух теорем. В книгах V. Guillemin [1984] и Jerold E. Marsden [2002] есть более полные доказательства.

Список литературы

А.М. Переломов. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*. Наука, 1990.

А.Б. Гивенталь В.И. Арнольд. *Симплектическая геометрия*. РХД, 2000.

Д. Саломон Д. Макдафф. *Введение в симплектическую топологию*. РХД, 2012.

S. Sternberg V. Guillemin. *Symplectic Techniques in Physics*. Cambrige University Press, 1984.

John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2002.

Tudor S. Ratiu Jerold E. Marsden. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Springer, 2002.