Нелинейная сигма-модель

Елена Ланина

Обычно нелинейная сигма-модель с метрикой $g_{ab}(\phi)$ определяется при помощи следующих действий

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} g_{ab}(\phi)\partial^{\mu}\phi^{a}\partial_{\mu}\phi^{b}\, d^{D}x, \tag{0.1}$$

где $\phi^a(x^\mu)$ – компоненты поля ϕ, $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $\eta^{\mu\nu}$ – метрика Минковского. Интегрирование осуществляется по D-мерному пространству Σ; x^μ, $\mu = 1, 2, ..., D$ – координаты этого пространства. Матрица как правило положительно определённая и зависит от компонент поля.

Нелинейная сигма-модель интересна нам по трем причинам:

1. Она дает простой явный пример асимптотически свободной теории.
2. Она дает второе размерное разложение, с помощью которого можно изучать неподвижную точку Вильсона-Фишера.
3. Она является точно решаемой в пределе, который отличен от стандартного предела слабой константы связи.

1 d=2 нелинейная сигма-модель

При $d = 2$ скалярное поле безразмерно ($\int d^2x\, \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ – безразмерно), поэтому любая теория скалярных полей ϕ^i с лагранжианом вида

$$\mathcal{L} = f_{ij}(\{\phi^i\})\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j \tag{1.1}$$

имеет безразмерные константы связи и поэтому перенормируема. Поскольку любая функция $f_{ij}(\{\phi^i\})$ приводит к перенормируемой теории, этот класс скалярных теорий поля содержит бесконечное число маргинальных параметров. (В общем случае коэффициент при операторе с N степенями ϕ и M производными преобразуется как $C'_{N,M} = b^{N(d/2-1)+M-d}C_{N,M}$. Заметим, что этот коэффициент есть просто $(d_{N,M} - d)$, где $d_{N,M}$ – массовая размерность оператора. Иными словами, маргинальные операторы в окрестности точки, отвечающей свободной теории $\mathcal{L}_0$, в точности соответствуют перенормируемым членам взаимодействия.) Чтобы как-то ограничить возможные параметры, следует потребовать выполнения в теории некоторых симметрий.

Простейший выбор – это предположить, что скалярные поля ϕ^i образуют $N-$компонентное векторное поле $n^i(x)$, ограниченное условием

$$\sum_{i=1}^{N} |n^i(x)|^2 = 1 \tag{1.2}$$

Если мы потребуем, чтобы теория поля обладала $O(N)$ симметрией, то тогда $f_{ij} = f_{ij}(|\vec{n}|) = f_{ij}(1) = \text{const}$. Другими словами, единственно возможный вид взаимодействия $g(\{n^i\})$, не содержащего производных, и который можно добавить к (1.1) – это константа, и она не будет влиять на функции Грина поля $\vec{n}$. С учетом этих ограничений наиболее общий лагранжиан с $O(N)$ симметрией, который можно построить из $\vec{n}(x)$ с двумя производными, имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}|\partial_\mu \vec{n}|^2 \tag{1.3}$$

Такая теория имеет прямую физическую интерпретацию. Рассмотрим, например, случай N-компонентной теории ϕ^4 в ее спонтанно нарушенной фазе. Поле ϕ^i приобретает вакуумное среднее, которое можно написать через величину и направления

$$\left\langle \phi^i \right\rangle = \phi_0 n^i(x). \tag{1.4}$$

Флуктуации ϕ_0 отвечают массивному полю σ. Флуктуации направления единичного вектора $\vec{n}(x)$ соответствуют $N-1$ голдстоуновским бозонам. Заметим, что $\vec{n}$ имеет N компонент, подчиненных одной связи (1.2), и, следовательно, содержит $N-1$ степеней свободы. Иначе говоря, нелинейная сигма-модель – это предел теории ϕ^4, при котором масса поля σ стремится к бесконечности, в то время как ϕ_0 остается постоянной.

Удобно разрешить связь и параметризовать $\vec{n}$ с помощью $N-1$ полей голдстоуновских бозонов π^k:

$$n^i = (\pi^1, \ldots, \pi^{N-1}, \sigma), \quad \sigma = (1-\pi^2)^{1/2} \Rightarrow \tag{1.5}$$

$$|\partial_\mu n^i|^2 = |\partial_\mu \vec{\pi}|^2 + \frac{(\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi})^2}{1-\pi^2} \tag{1.6}$$

Тогда лагранжиан (1.3) принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left[|\partial_\mu\vec{\pi}|^2 + (\partial_\mu\sigma)^2\right] = \frac{1}{2g^2}\left[|\partial_\mu\vec{\pi}|^2 + \frac{(\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi})^2}{1-\pi^2}\right] \tag{1.7}$$

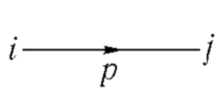
Заметим, что в лагранжиане отсутствует массовое слагаемое для поля $\vec{\pi}$, как и требует теорема Голдстоуна: для каждой спонтанно нарушенной непрерывной симметрии в теории должна содержаться безмассовая частица.

В линейной сигма-модели при $N = 1$ нет непрерывных симметрий, при $N = 2$ имеется единственное направление вращения. Вращение в N измерениях может осуществляться в любой из $N(N-1)/2$ плоскостей, так что $O(N)$ симметричная теория обладает $N(N-1)/2$ непрерывными симметриями. После спонтанного нарушения симметрии остается $(N-1)(N-2)/2$ симметрий, соответствующих вращениям $(N-1)$ полей π. Число нарушенных симметрий равно разности этих чисел: $N-1$.

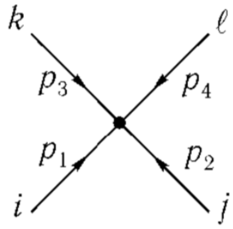
Теория возмущений для поля π^k может быть получена непосредственно из разложения лагранжиана по степеням π^k:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}|\partial_\mu\vec{\pi}|^2 + \frac{1}{2g^2}(\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi})^2 + \ldots \tag{1.8}$$

Это приводит к правилам Фейнмана



$$= \frac{ig^2}{p^2}\delta^{ij}$$



$$= -\frac{i}{g^2}\big[(p_1+p_2)\cdot(p_3+p_4)\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \\ +(p_1+p_3)\cdot(p_2+p_4)\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \\ +(p_1+p_4)\cdot(p_2+p_3)\delta^{i\ell}\delta^{jk}\big]$$

а также к дополнительным вершинам с четным числом полей π^k. Поскольку лагранжиан (1.3) является наиболее общим $O(N)$-симметричным лагранжианом с безразмерными коэффициентами, который можно построить из этих полей, то теорию можно сделать конечной путем перенормировки константы связи g и $O(N)$-симметричного изменения масштаба полей π^k и σ. В перенормированной теории возмущений для каждой возможной $2n-\pi$ вершины имеются расходимости и контрчлены. Однако все эти контрчлены связаны основным требованием, что голый лагранжиан облажает $O(N)$-симметрией.

Теперь вычислим функции Каллана-Симанчика для этой теории. Поскольку теория перенормируема, ее функции Грина подчиняются уравнению Каллана-Симанчика с некоторыми функциями β, γ. В явном виде:

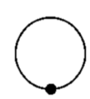
$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + n\gamma(g)\right] G^{(n)} = 0, \tag{1.9}$$

где $G^{(n)}$ – функция Грина n полей π^k или σ. Чтобы узнать функции β и γ в лидирующем порядке теории возмущений, будем вычислять две простые функции Грина в однопетлевом порядке и посмотрим, какого вида функции необходимы для выполнения уравнения Каллана-Симанчика.

Первая функция Грина, которую мы рассмотрим, такова:

$$G^{(1)} = \langle \sigma(x) \rangle \tag{1.10}$$

Разлагая определение (1.5), получим:

$$\langle \sigma(0) \rangle = 1 - \frac{1}{2}\left\langle \pi^2(0) \right\rangle + \cdots \quad = \quad 1 \quad +$$  .

$$\left\langle \pi^k(0)\pi^l(0) \right\rangle = \int\limits_{\mu<|k|<M} \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{ig^2}{k^2}\delta^{kl} \tag{1.11}$$

Мы здесь добавили малую массу μ для инфракрасного обрезания и большую массу M для ультрафиолетового обрезания. Тогда

$$\left\langle \pi^k(0)\pi^l(0) \right\rangle = \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(1-d/2)\left(\frac{1}{(\mu^2)^{1-d/2}} - \frac{1}{(M^2)^{1-d/2}}\right)\delta^{kl} \tag{1.12}$$

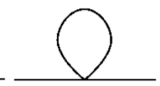
Подставляя этот результат в выражение для $\langle\sigma\rangle$, находим:

$$\langle\sigma\rangle = 1-\frac{1}{2}(N-1)\frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{(\mu^2)^{1-d/2}}-\frac{1}{(M^2)^{1-d/2}}\right)+O(g^4) \underset{d\to 2}{\to} 1-\frac{g^2(N-1)}{8\pi}\log\frac{M^2}{\mu^2}+O(g^4) \tag{1.13}$$

Это выражение удовлетворяет уравнению Каллана-Симанчика до порядка g^2, только если

$$\gamma(g) = \frac{g^2(N-1)}{4\pi}+O(g^4) \tag{1.14}$$

Теперь рассмотрим двухточечную функцию π^k:

$\left\langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p)\right\rangle =$ $+$  $+\cdots=$

$$= \frac{ig^2}{p^2}\delta^{k\ell}+\frac{ig^2}{p^2}(-i\Pi^{k\ell})\frac{ig^2}{p^2}+\cdots.$$

При вычислении Π^{kl} по правилам Фейнмана мы снова встречаемся с интегралом (1.11), а также с интегралом

$$\left\langle\partial_\mu\pi^k(0)\partial^\mu\pi^l(0)\right\rangle = \int\limits_{\mu<|k|<M}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{ig^2k^2}{k^2}\delta^{kl} = \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{(\mu^2)^{1-d/2}}-\frac{1}{(M^2)^{1-d/2}}\right)\delta^{kl} \tag{1.15}$$

В этом выражении нет полюса при $d=0$, а для $d>0$ оно пропорционально положительной степени μ^2, следовательно, можно положить это спаривание равным нулю. Тогда

$$\Pi^{kl}(p) = -\delta^{kl}p^2\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{(\mu^2)^{1-d/2}}-\frac{1}{(M^2)^{1-d/2}}\right) \tag{1.16}$$

Переходя к пределу $d\to 2$, получим:

$$\left\langle\pi^k(p)\pi^l(-p)\right\rangle = \frac{ig^2}{p^2}\delta^{kl}+\frac{ig^2}{p^2}\left(+ip^2\frac{1}{4\pi}\log\frac{M^2}{\mu^2}\right)\frac{ig^2}{p^2}+\cdots = \frac{i}{p^2}\delta^{kl}\left(g^2-\frac{g^4}{4\pi}\log\frac{M^2}{\mu^2}+O(g^6)\right) \tag{1.17}$$

Применение к этому результату уравнения Каллана-Симанчика дает:

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+2\gamma(g)\right]\left\langle\pi^k(p)\pi^l(-p)\right\rangle = \frac{i\delta^{kl}}{p^2}\left[-\frac{g^4}{2\pi}+\beta(g)\cdot 2g+2g^2\gamma(g)\right]=0 \tag{1.18}$$

Подставляя результат (1.14) для $\gamma(g)$, находим:

$$\beta(g) = -(N-2)\frac{g^3}{4\pi}+O(g^5). \tag{1.19}$$

При $N=2$ бета-функция обращается в нуль. Это не случайный факт, а скорее нетривиальная проверка наших вычислений. При $N=2$ можно сделать замену переменных $\pi^1=\sin\theta$. Тогда $\sigma=\cos\theta$, и лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu\theta)^2 \tag{1.20}$$

Это свободная теория поля $\theta(x)$, так что она может и не иметь потока ренормализационной группы.

Ясное физическое обоснование знака эволюции константы связи было дано Поляковым в работе, где дано доказательство асимптотической свободы нелинейной сигма-модели. Поэтому далее планируется излагать более физичный вывод методом Полякова. Из него можно получить, что

$$\frac{d}{d\log b}\bar{g} = -(N-2)\frac{\bar{g}^3}{4\pi}, \tag{1.21}$$

что согласуется с (1.7).

Солгасие с теоремой, доказанной Мермином и Вагнером о том, что двумерная система с непрерывной симметрией не может иметь упорядоченное состояние, в котором нарушающее симметрию поле имеет ненулевое вакуумное среднее.

2 Нелинейная сигма-модель при $2 < d < 4$