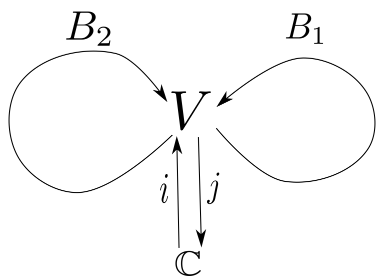

Рассматривается колчан на двух вершинах, где B_1 и B_2 элементы $End(V)$ для конечномерного векторного пространства V, $dim(V) = n$, $i \in Hom(\mathbb{C}, V)$ и $j \in Hom(V, \mathbb{C})$.

Построим по этим данным простейшее колчанное многообразие(многообразие Гизикера) $M_{n,1}$ следующим образом:

$$M_{n,1} := \{(B_1, B_2, i, j) \mid [B_1, B_2] + ij = 0\} /\!\!/ GL_n(\mathbb{C}), \tag{1}$$

где $X /\!\!/ G$ означает взятие аффинно-геометрического фактора(GIT-фактора), получившиеся пространство можно понимать через полиномиальные функции на нём, последние, по определению, являются $GL_n(\mathbb{C})$-инвариантными полиномами от n переменных. В дальнейшем мы будем думать про это многообразие как про множество замкнутых $GL_n(\mathbb{C})$ орбит.

Замечание 1. *В дальнейшем нам понадобится более общий класс колчанных многообразий,*

$$\mathcal{M}(r, n) = \{(B_1, B_2, i, j) | [B_1, B_2] + ij = 0, \prod_j B_j i(\mathbb{C}) = V\} /\!\!/ GL_n(\mathbb{C}), \tag{2}$$

где $B_1, B_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n), i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n), j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^r)$ *и действие* $GL_n(\mathbb{C})$ *задано как* $g \cdot (B_1, B_2, i, j) = (gB_1g^{-1}, gB_2g^{-1}, gi, jg^{-1})$, *при* $r = 1$ *мы возвращаемся с старому определению.*

Основное утверждение это изоморфизм $M_{n,1}$ и $S^n(\mathbb{A}^2)$, как аффинных многообразий.

Теорема 1.

$$M_{n,1} \simeq S^n(\mathbb{A}^2), \tag{3}$$

где $S^n(\mathbb{A}^2)$ *означает симметрическую степень* $\mathbb{A}^2$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую орбиту $GL_n(\mathbb{C}) \cdot (B_1, B_2, i, j)$ и $S := \sum B_\alpha B_\beta \cdots B_\gamma i(1)$. Разложим $V = \mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$. В силу $B_k S \subset S$, и леммы, которую докажем позже($j|_S = 0$), операторы B_k, i, j можно записать в виде

$$B_k = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = (0, *). \tag{4}$$

Рассмотрим преобразование $g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, тогда

$$g(t)Bg(t)^{-1} = \begin{pmatrix} * & t* \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = (0, t*). \tag{5}$$

предел $t \mapsto 0$ в силу замкнутости орбиты всё ещё в ней, значит $j = 0$, $B_k = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Аналогично для $g(t) = t^{-1}1_n$ получаем, что $i = 0$.

Итого получаем $i = j = 0$ с $[B_1, B_2] = 0$ так что можно считать B_j верхне-треугольными. Рассматривая $g(t) = diag(1, t, t^2 \dots)$ в пределе $t \mapsto 0$ получаем, что $B_{1,2}$ полупросты, а значит орбите можно сопоставить n пар собстенных значений матриц B_1, B_2. Отображение в обратную сторону сопоставляет точке $S^n(\mathbb{A}^1)$ две матрицы с данными собственными значениями и два нулевых отображения. $\square$

При доказательстве нам потребовалась следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть $S \in V$ задаётся следующим образом:*

$$S := \sum B_\alpha B_\beta \cdots B_\gamma i(1) \tag{6}$$

Тогда ограничение j на S $j|_S = 0$ зануляется.

Доказательство. $ij = tr(ij) = tr[B_1, B_2] = 0$, случай большего числа B_j получается из этого индукцией по числу B_j. $\square$